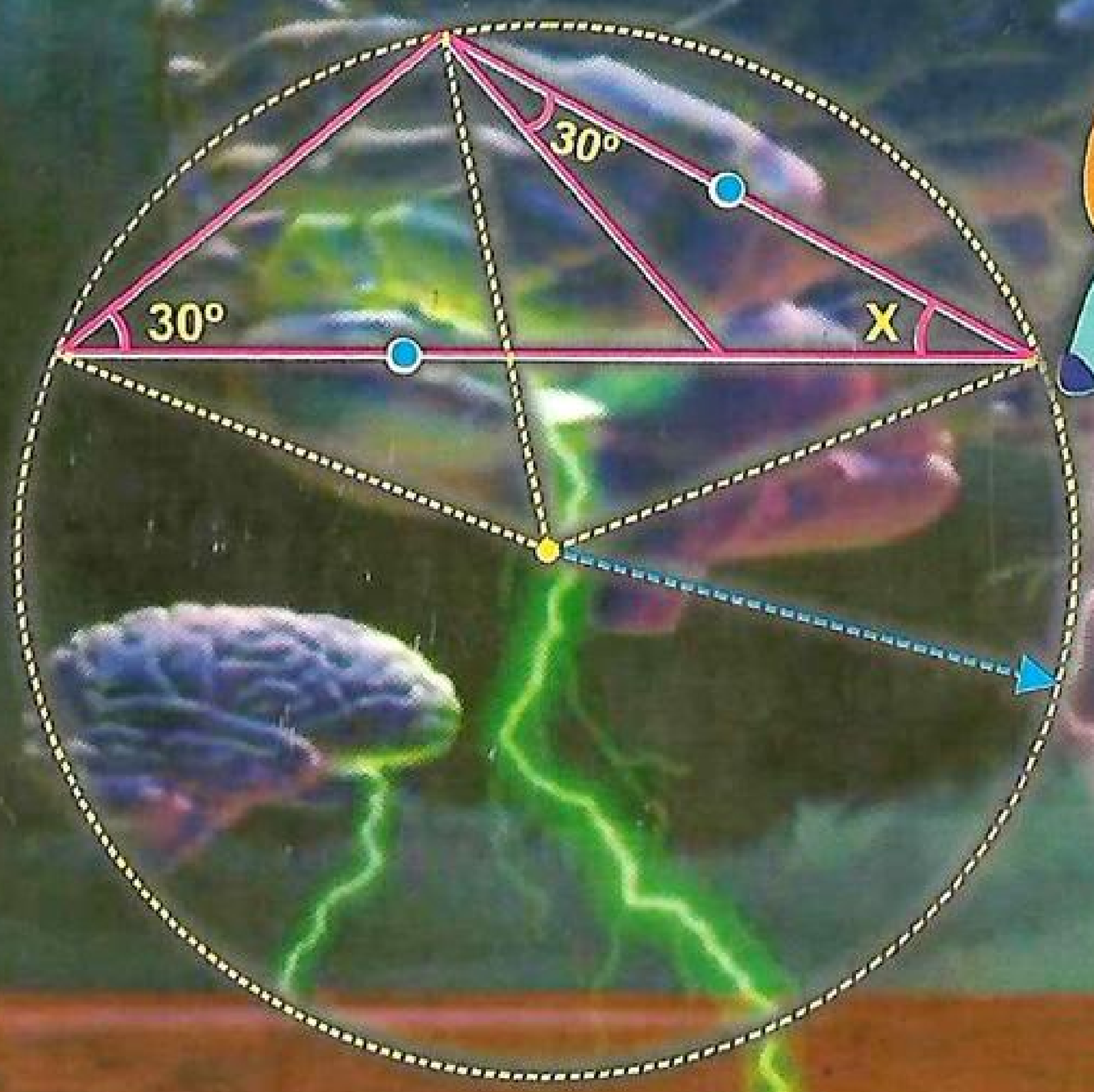
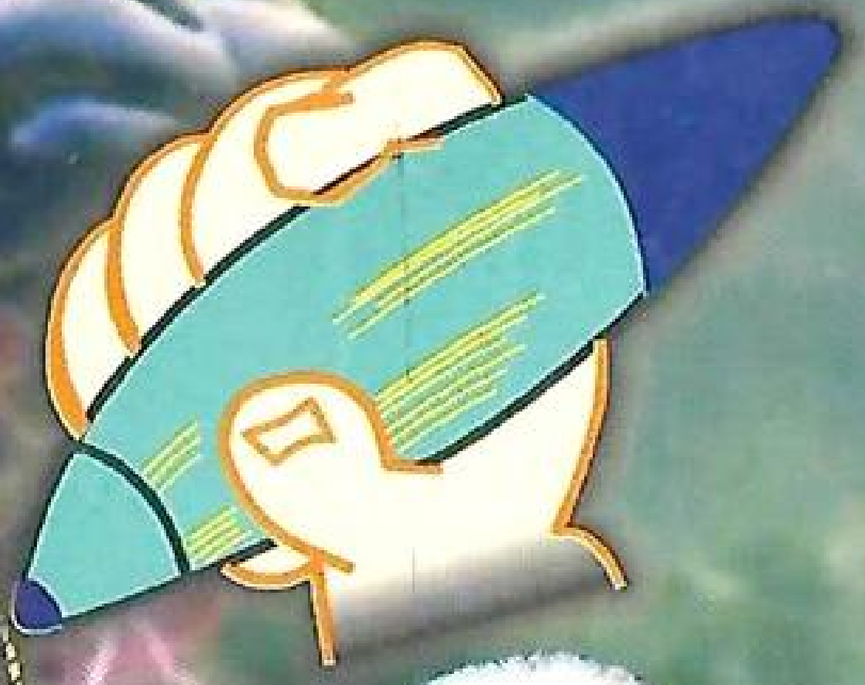
CONSTRUCCIONES EN LA CIRCUNFERENCIA

Empleando cuadriláteros inscriptibles y puntos notables





Einstein

Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares

Ing. José Luis Meza Barcena

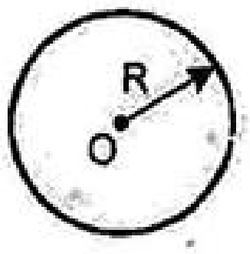
aniel_jd_3@hotmail.com

Scanned by CamScanner

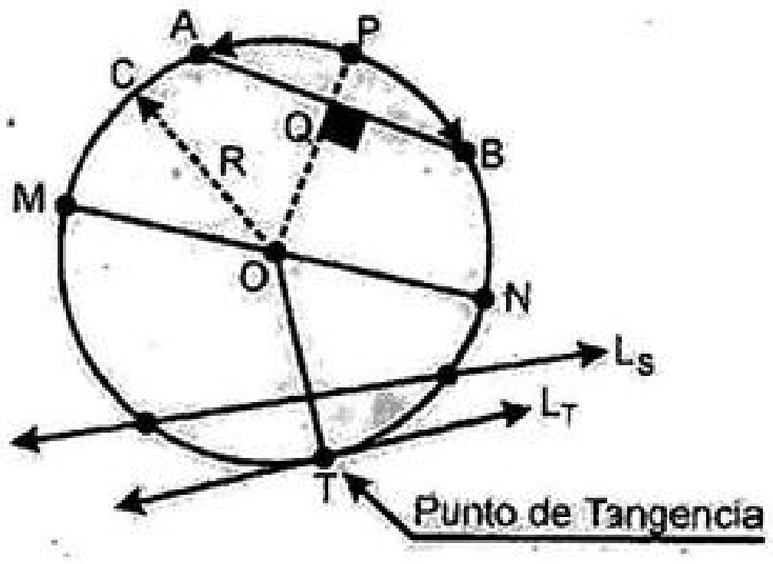
Circunferencia

Es la figura geométrica que está formado por todos los puntos de un mismo plano que se encuentra a una misma distancia de otro punto de ese mismo plano denominado centro.

A la distancia constante de estos puntos al centro se le denomina radio de la circunferencia, es decir:



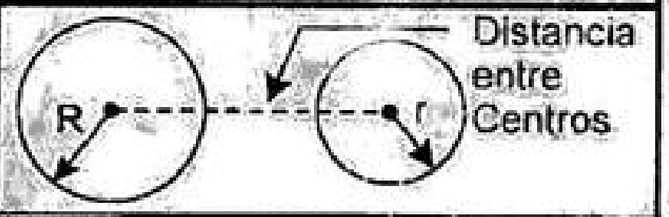
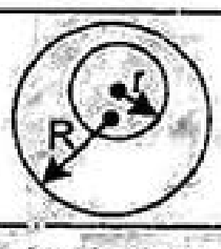
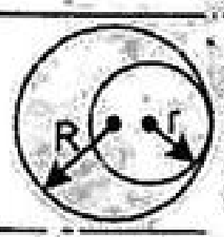
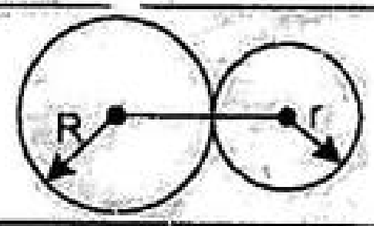
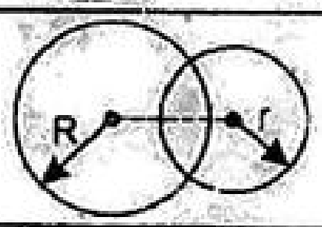
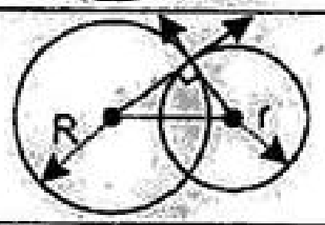
LINEAS ASOCIADAS A LA CIRCUNFERENCIA

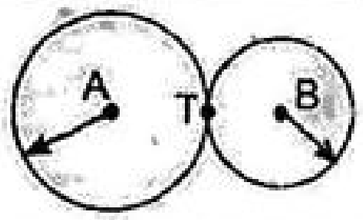
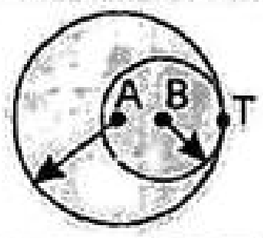


ELEMENTOS

1	Centro	O
2	Radio	R
3	Cuerda	$\overline{AB}$
4	Diámetro	$\overline{MN}$
5	Arco	$\overset{\frown}{AB}$
6	Recta Tangente	L_T
7	Recta Secante	L_S
8	Apotema	$\overline{OQ}$
9	Flecha o Ságita	$\overline{QP}$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIAS	GRÁFICO
EXTERIORES	
INTERIORES	
TANGENTES INTERIORES	 Los centros de las circunferencias y el punto de tangencia son colineales.
TANGENTES EXTERIORES	
SECANTES	
ORTOGONALES	
CONCÉNTRICAS	

Si "A" y "B" son centros y T es punto de tangencia	Se realiza el siguiente trazo
	➧ A, T y B son colineales
	➧ A, B y T son colineales

Nota:

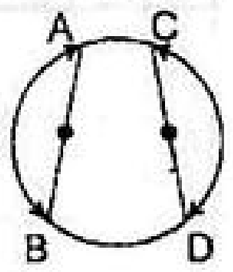
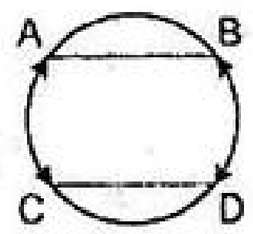
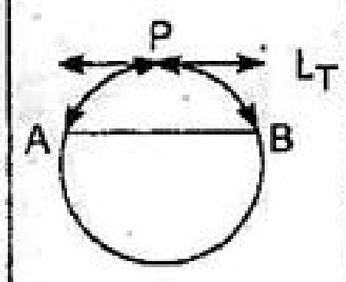
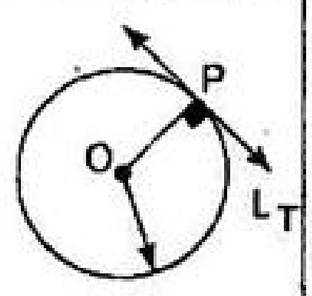
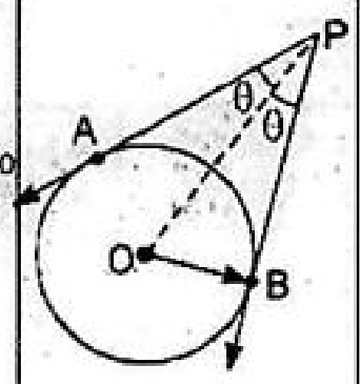
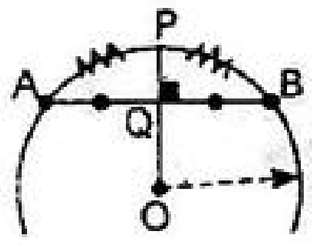
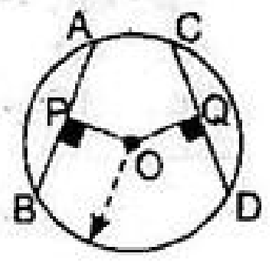
- La Región interior de encierra la circunferencia se denomina: CIRCULO
- La Longitud de circunferencia esta dada por

$$L_C = 2\pi r$$

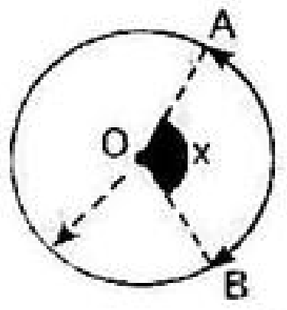
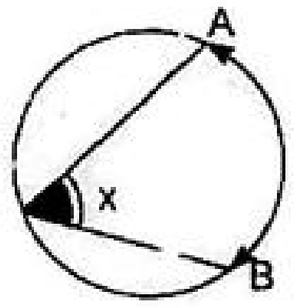
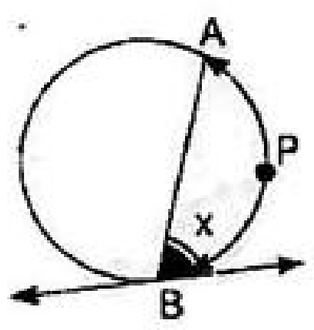
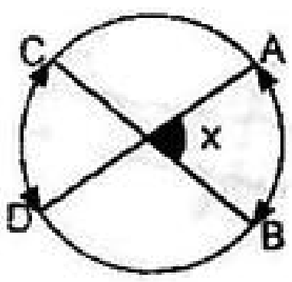
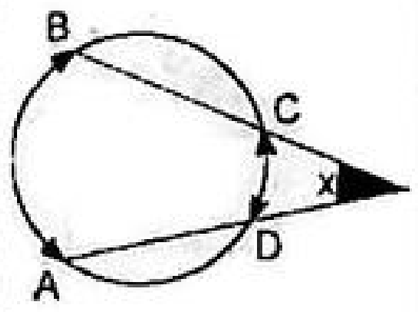
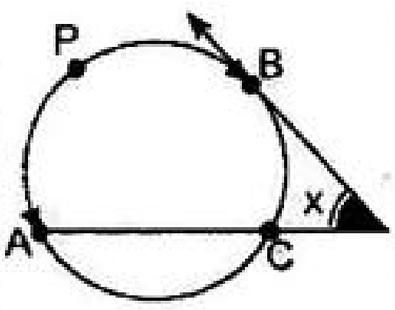
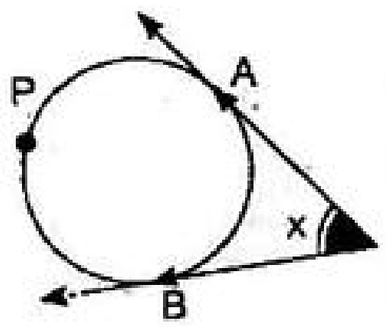
Siendo r: radio de la circunferencia.

Scanned by CamScanner

PROPIEDADES BÁSICAS

Nº	CONDICIÓN	GRÁFICO	RELACIÓN
1	En toda circunferencia cuerdas iguales subtienden arcos iguales y viceversa		Si AB = CD ➧ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
2	En toda circunferencia cuerdas paralelas determinan arcos iguales y viceversa		Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ➧ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$
3	Toda tangente paralela a una cuerda determina arcos iguales y viceversa		Si $L_T \parallel AB$ ➧ $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB}$
4	El radio trazado al punto de tangencia será perpendicular a la recta tangente.		Si: "P" es Punto de Tangencia ➧ $\overline{OP} \perp L_T$
5	Los dos segmentos tangentes trazados desde un punto exterior serán iguales y el segmento que une dicho punto con el centro será bisectriz del ángulo formado por las tangentes.		* $\overline{PA} = \overline{PB}$ también * $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz
6	Toda perpendicular trazada del centro a una cuerda; divide en partes iguales tanto a la cuerda como al arco que determina.		➧ $\overline{AQ} = \overline{QB}$ también $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB}$
7	Si tenemos dos cuerdas iguales as distancias a ellas también serán iguales		Si: AB = CD ➧ $\overline{OP} = \overline{OQ}$

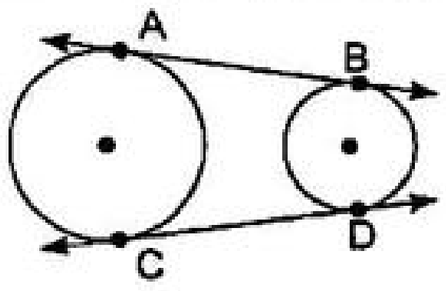
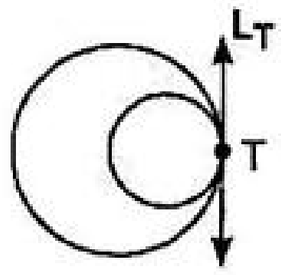
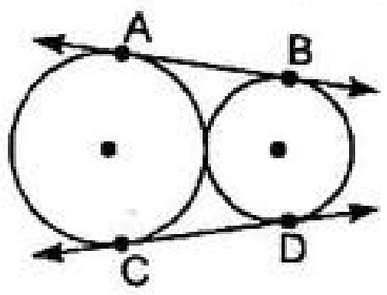
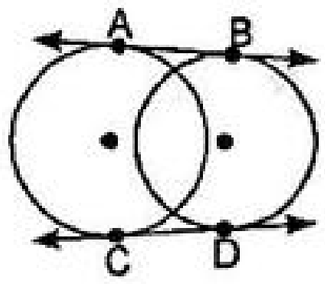
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO	GRÁFICO	SE CUMPLE
CENTRAL		$x = \overset{\frown}{AB}$
INSCRITO		$x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
SEMI INSCRITO		Si: "B" es punto de tangencia $x = \frac{\overset{\frown}{APB}}{2}$
INTERIOR		$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$
EXTERIOR (I)		$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$
EXTERIOR (II)		$x = \frac{\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{BC}}{2}$
EXTERIOR (III)		$x = \frac{\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

La matemática honra el espíritu humano (Leibniz)

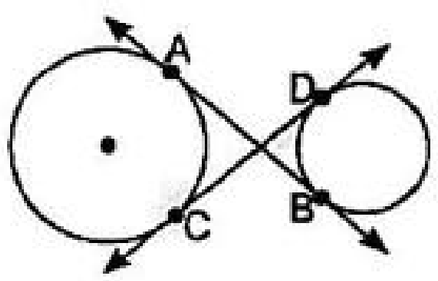
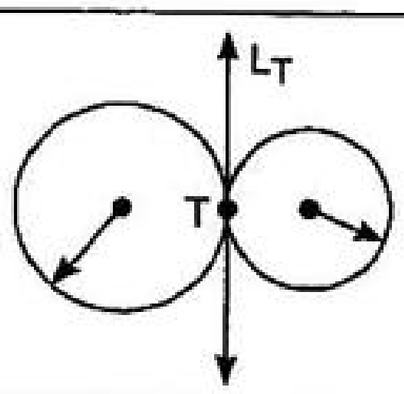
Scanned by CamScanner

TANGENTES COMUNES EXTERIORES PARA DOS CIRCUNFERENCIAS

CASO	GRÁFICO	CUMPLE
I		AB = CD
II		T → Punto de tangencia * Se trazará la tangente común L_T
III		AB = CD
IV		AB = CD

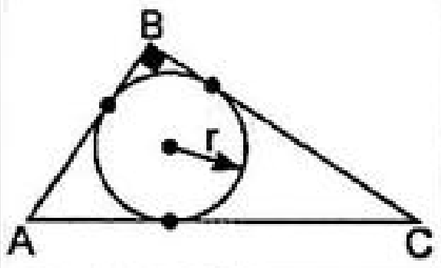
NOTA: *El término figura "inscrita" se refiere a una figura que está contenida en otra (está dentro de ella) y el término "circunscrito" es cuando una figura contiene a otra (es decir lo rodea o lo hace contener)*

TANGENTES COMUNES INTERIORES PARA DOS CIRCUNFERENCIAS

CASO	GRÁFICO	CUMPLE
I		AB = CD
II		T → Punto de tangencia * Se trazará la tangente común L_T

TEOREMAS

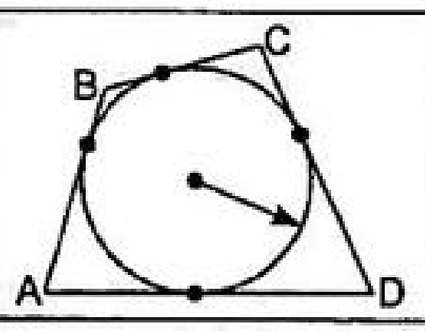
1 PONCELET



r → Inradio

AB + BC = AC + 2r

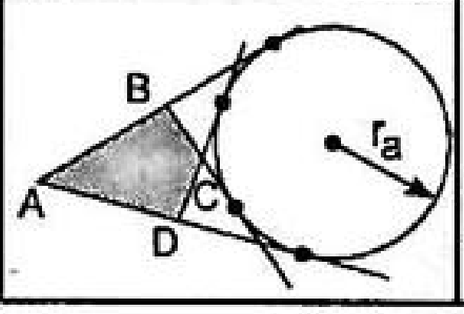
2 PITOT



Para un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia

AB + CD = BC + AD

3 STEINER

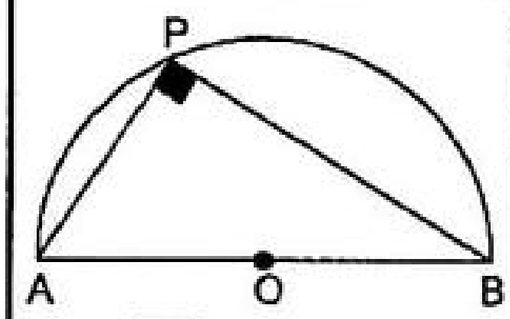


Para un cuadrilátero ex-inscrito.

r_a → Exradio

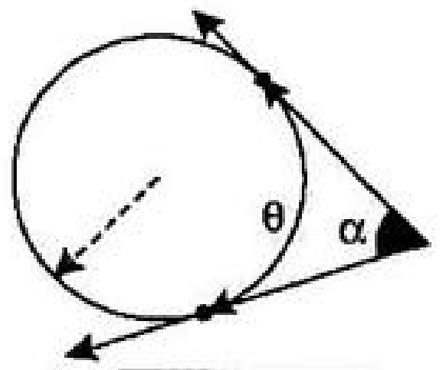
AD – BC = AB – CD

ADICIONAL



Si $\overline{AB}$ es diámetro

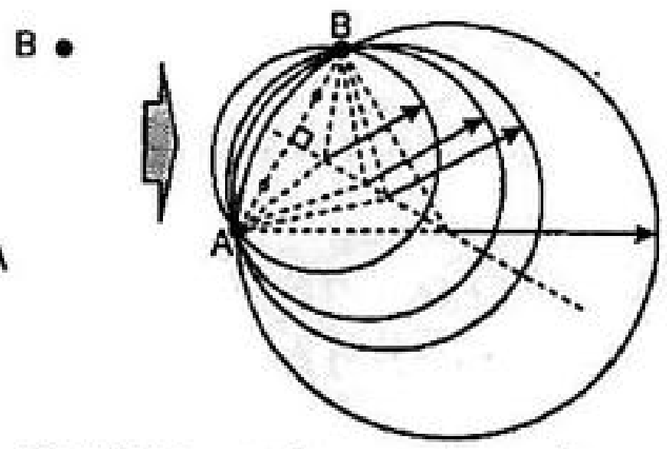
➧ **m∠APB = 90°**



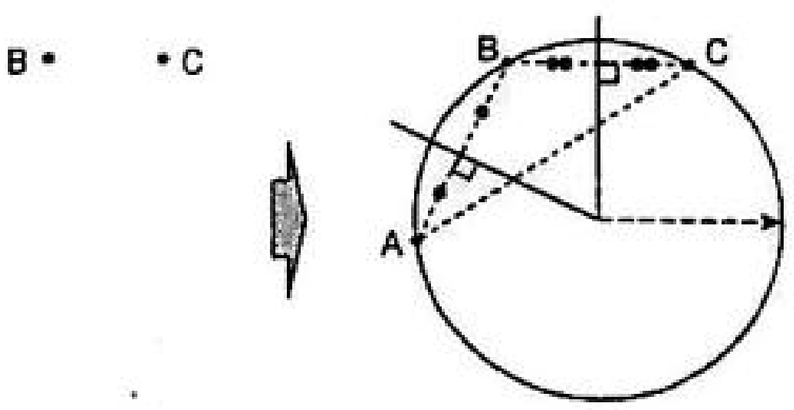
➧ **α + θ = 180°**

Observaciones:

a. Por dos puntos cualesquiera pasan infinitas circunferencias.



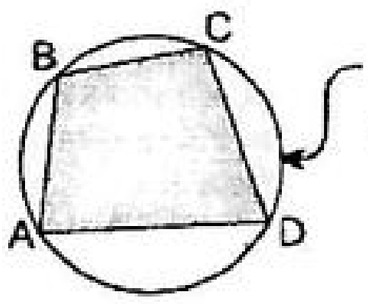
b. Por tres puntos cualesquiera no colíneales, pasa una sola circunferencia.



Scanned by CamScanner

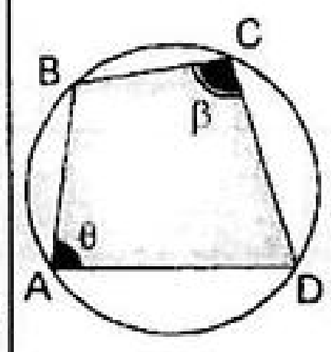
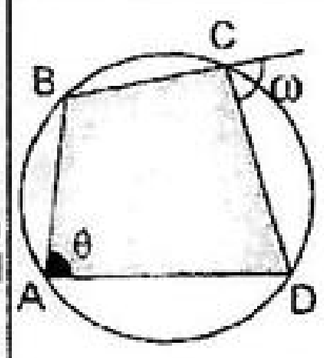
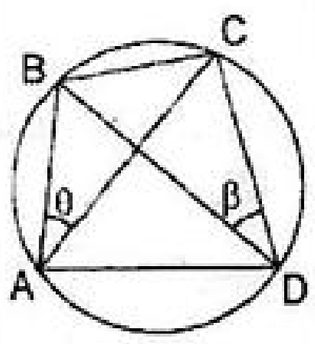
Cuadrilátero Inscrito en una Circunferencia

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.



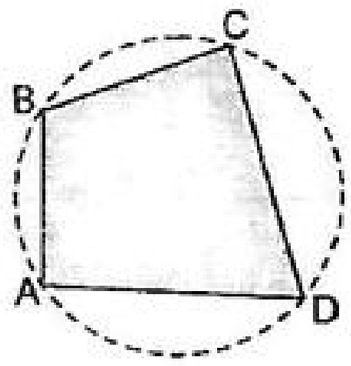
Circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD.

PROPIEDADES

N°	TEOREMA	GRÁFICO	SE CUMPLE
1	En todo cuadrilátero inscrito sus ángulos interiores opuestos son suplementarios		$\theta + \beta = 180°$
2	Consecuencia del primer teorema, en donde un ángulo exterior del cuadrilátero inscrito es igual a un ángulo interior.		$\theta = \omega$
3	En todo cuadrilátero inscrito sus diagonales determinan con los lados opuestos ángulos de igual medida		$\theta = \beta$

Cuadrilátero Inscriptible en una Circunferencia

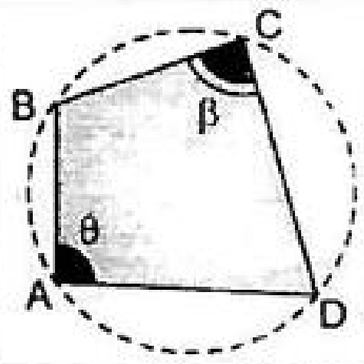
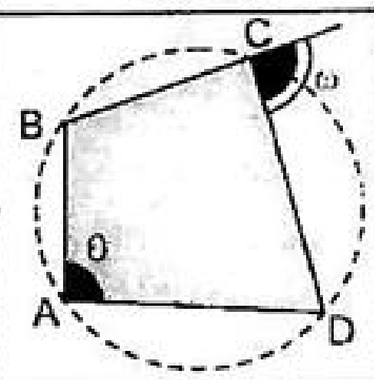
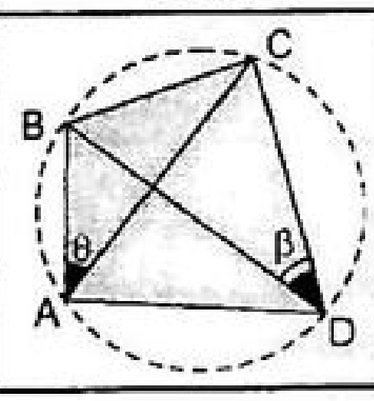
- Es aquel cuadrilátero convexo que puede inscribirse en una circunferencia; es decir que sus vértices pueden ser ubicados en una misma circunfencia.
- Además es aquel cuadrilátero que puede ser inscrito en una circunferencia, para ello debe cumplir con los Teoremas del Cuadrilátero inscrito.

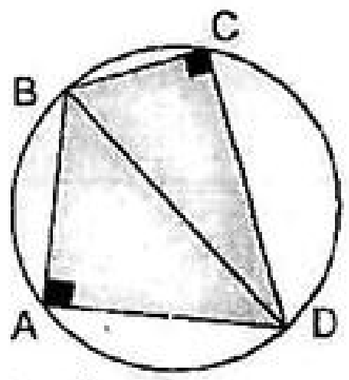


En la figura si: A, B, C y D pueden ser ubicados en una circunferencia entonces:

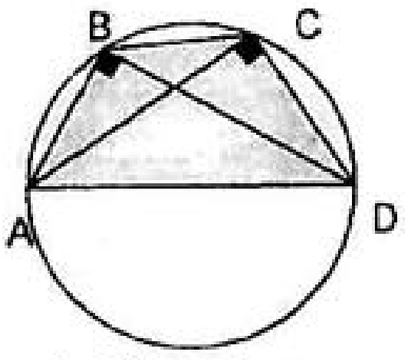
⇨ ABCD: Inscriptible

CONDICIONES PARA QUE UN CUADRILÁTERO SEA INSCRIPTIBLE

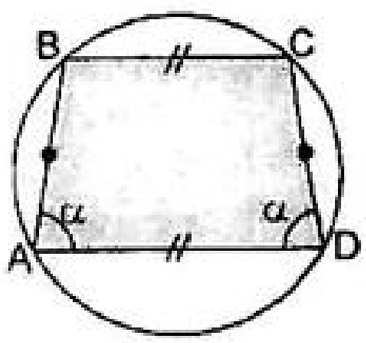
N°	CONDICIÓN	GRÁFICO	SE CUMPLE
1	Si: $\theta + \beta = 180°$		ABCD es Inscriptible
2	Si: $\theta = \omega$		ABCD es Inscriptible
3	Si: $\theta = \beta$		ABCD es Inscriptible



⇨ ABCD es Inscriptible



⇨ ABC es Inscriptible



El trapecio Isósceles ABCD es Inscriptible

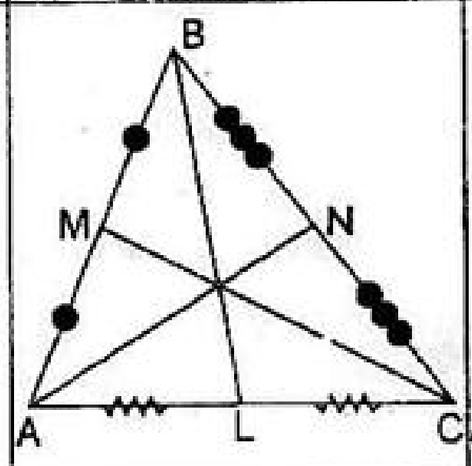
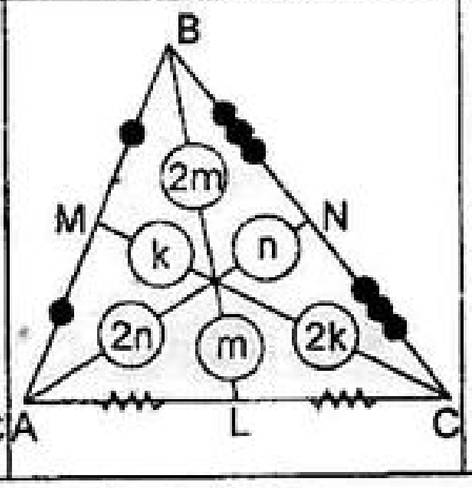
He aquí la matemática, la creación más original del ingenio humano (Whitehead)

Scanned by CamScanner

PUNTOS NOTABLES

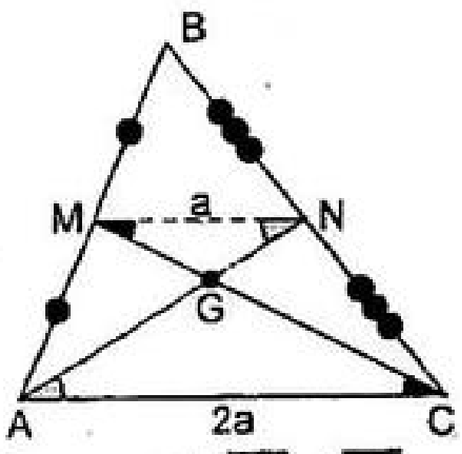
Puntos notables de un triángulo son aquellos puntos determinados por la intersección de las lineas notables de una misma especie (medianas, bisectrices, alturas, y mediatrices).

1 BARICENTRO (G)

DEFINICIÓN	GRÁFICO	SE CUMPLE:	PROPIEDADES
Es el punto de intersección de las medianas del triángulo, se le denomina también baricentro ó centro de gravedad.			• El baricentro siempre es un punto interior a todo triángulo. • Todo triángulo tiene un sólo baricentro. • Para determinar el baricentro de un triángulo bastará con trazar dos medianas. • El baricentro divide a la mediana en dos segmentos que esten en la relación de 2 a 1 siendo mayor el adyacente al vertice.

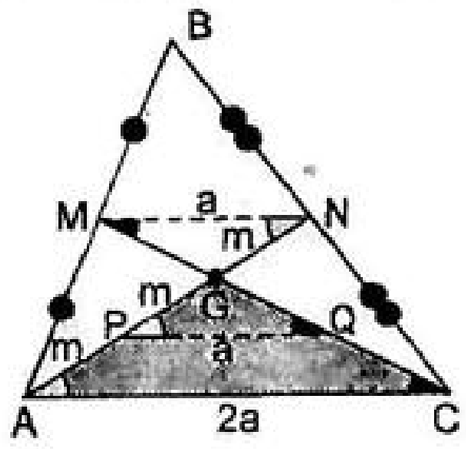
DEMOSTRACIÓN

En la figura Trazamos la base media $\overline{MN}$ del triángulo ABC

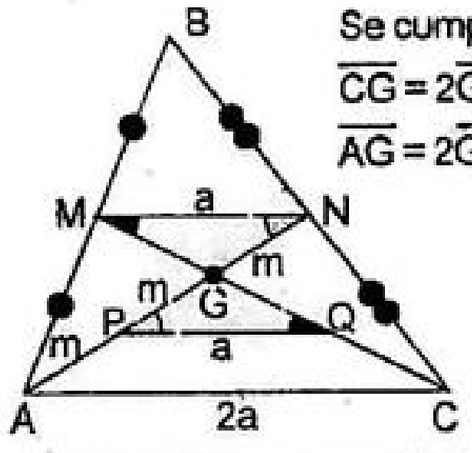


donde se cumple: $\overline{AC} = 2\overline{MN}$

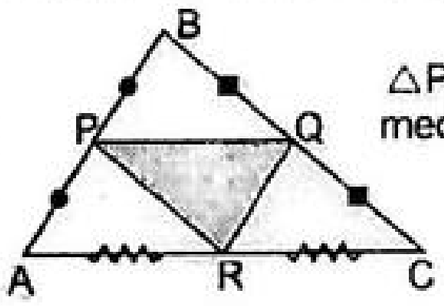
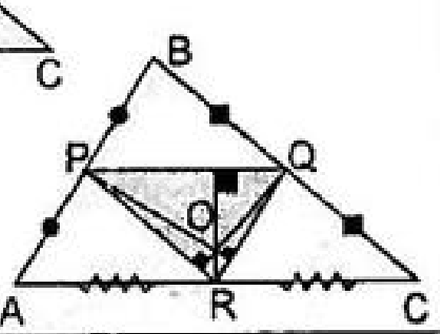
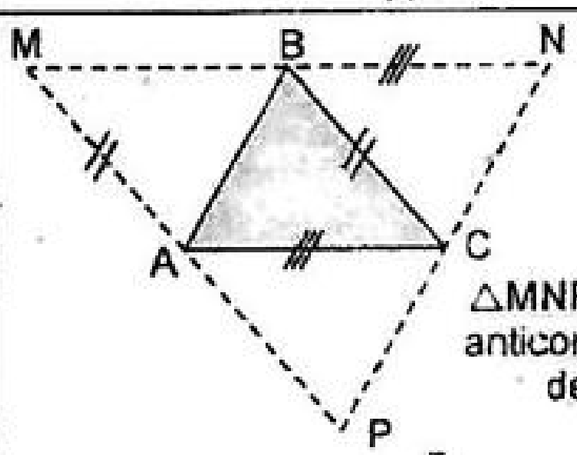
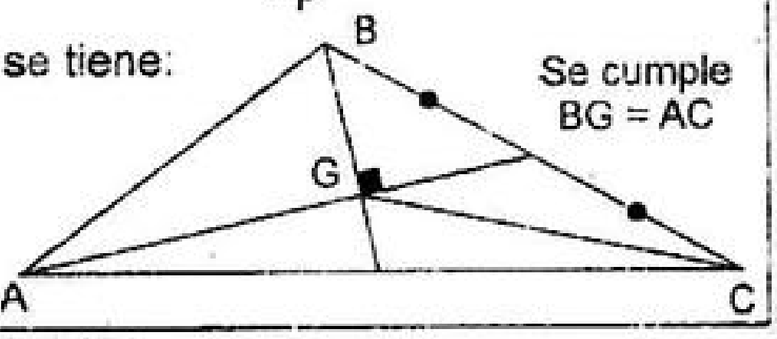
En el triángulo ABC tomamos el segmento PQ tal que $\overline{PQ} // \overline{AC}$ y $\overline{PG} = \overline{AP}$, también se cumple: $\overline{PQ} // \overline{AC} // \overline{MN}$.



Se observa que los triángulos MGN y PGQ son congruentes.



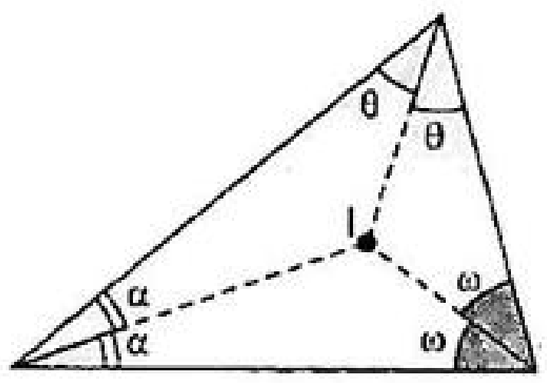
Se cumple:
$\overline{CG} = 2\overline{GM}$
$\overline{AG} = 2\overline{GN}$

TRIÁNGULO	CARACTERÍSTICAS	FIGURA
MEDIANO O CMPLEMENTARIO	✓ Es aquel que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo dado. ✓ Todo triángulo tiene triángulo mediano. ✓ Los lados de todo triángulo son paralelos a los lados del respectivo triángulo mediano. ✓ Las medianas de todo triángulo, son también medianas para su respectivo triángulo mediano. ✓ El baricentro de todo triángulo es también baricentro para su respectivo triángulo mediano. ✓ Las mediatrices de todo triángulo son alturas del respectivo triángulo mediano.	 △PQR → triángulo mediano del △ABC O → circuncentro del △ABC O → ortocentro del △PQR 
ANTICOMPLEMENTARIO	✓ El circuncentro de todo triángulo, es ortocentro del respectivo triángulo mediano. ✓ Es aquel que se forma al trazar por los vértices de un triángulo dado paralela a sus lados. ✓ Los vértices de todo triángulo son puntos medios de los lados del respectivo triángulo anticomplementario. ✓ Las medianas de todo triángulo son también medianas para sus respectivos triángulos anticomplementarios. ✓ El baricentro de todo triángulo, es también baricentro para su respectivo triángulo anticomplementario. ✓ El ortocentro de todo triángulo, es circuncentro del respectivo triángulo anticomplementario. ✓ Si en un triángulo dos medianas se cortan perpendicularmente, se cumple que la distancia del baricentro al tercer vertice es igual al lado opuesto.	 △MNP → triángulo anticomplementario del △ABC Si se tiene:  Se cumple BG = AC

Toda mi física no pasa de una geometria (Descartos)

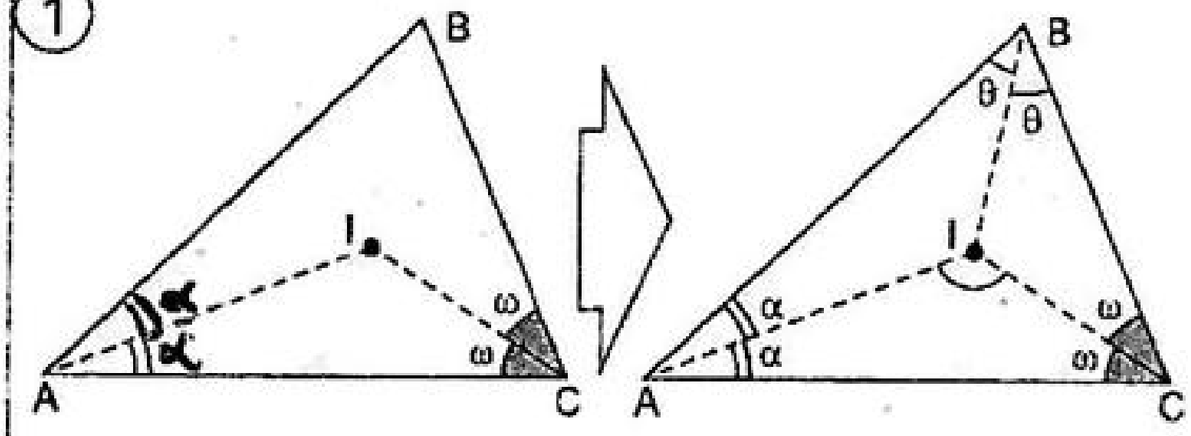
Scanned by CamScanner

❷ INCENTRO (I)

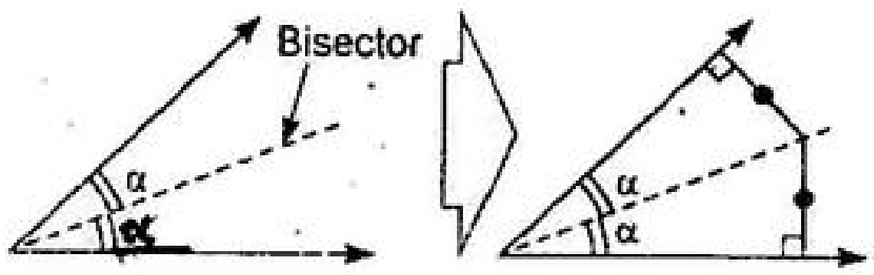
DEFINICIÓN	GRÁFICO	CARACTERÍSTICAS
Es el punto de concurrencia de las tres bisectrices interiores de un triángulo	 I → Incentro	Todo triángulo tiene un sólo incentro. Para hallar el incentro de un triángulo basta con trazar dos bisectrices interiores. El incentro siempre es un punto interior a todo triángulo. El incentro equidista de los lados de todo triángulo. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyo radio se llama inradio.

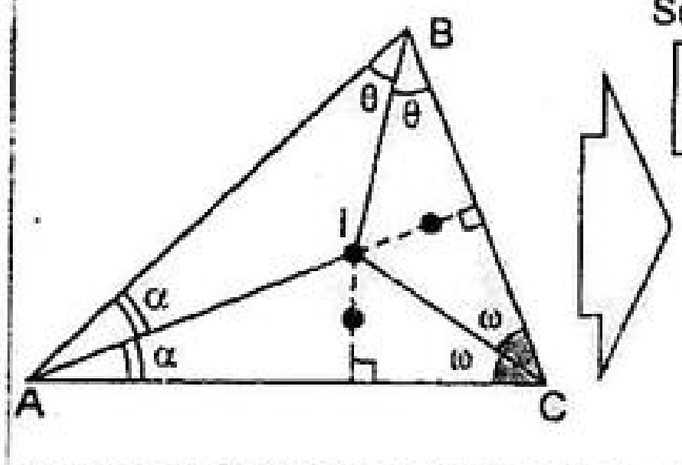
PROPIEDADES

①



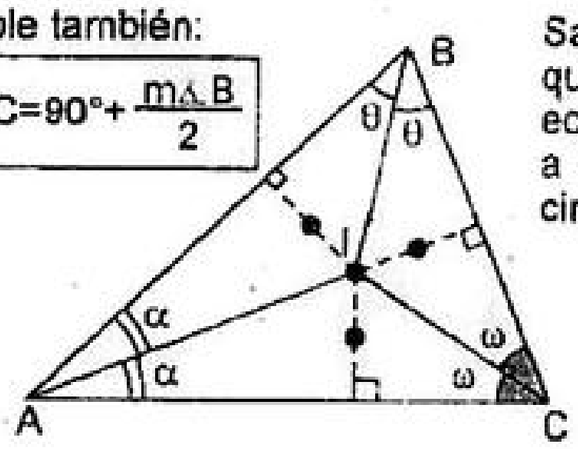
Sabemos la siguiente propiedad:



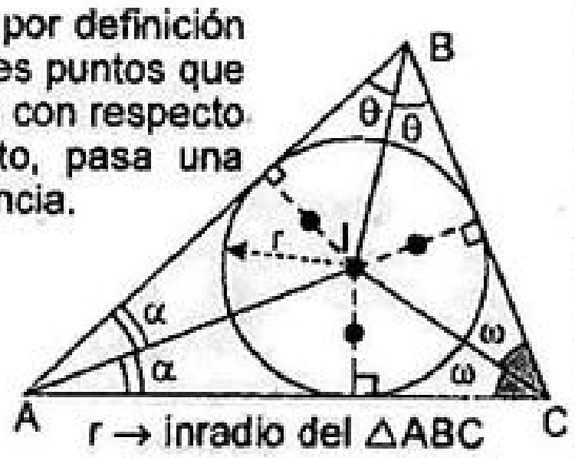


Se cumple también:

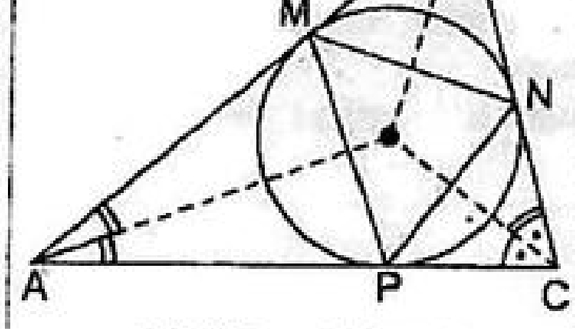
$$m\triangle AIC = 90° + \frac{m\triangle B}{2}$$

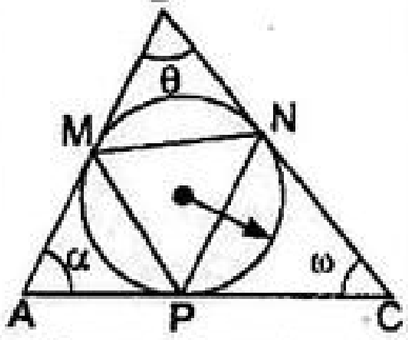


Sabemos por definición que por tres puntos que equidistan con respecto a un punto, pasa una circunferencia.

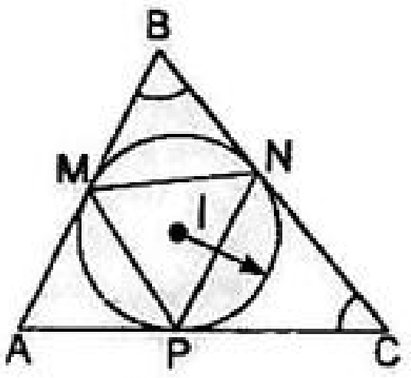


r → inradio del △ABC

TRIÁNGULO	CARACTERÍSTICA	GRÁFICO	PROPIEDADES
TANGENCIAL	Es aquel que se forma de unir los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en un triángulo dado.	 △MNP → triángulo tangencial del △ABC	Todo triángulo tiene un triángulo tangencial. Se cumple: $\triangle NMP = 90° - \frac{\omega}{2}$ $\triangle MPN = 90° - \frac{\theta}{2}$ $\triangle MNP = 90° - \frac{\alpha}{2}$



Se cumple que el incentro de un triángulo es el circuncentro de un triángulo tangencial.

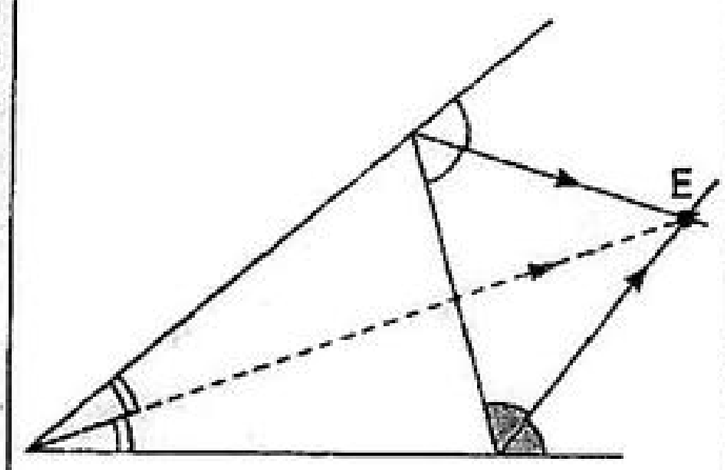


"I" → incentro del △ABC
circuncentro del △MPN

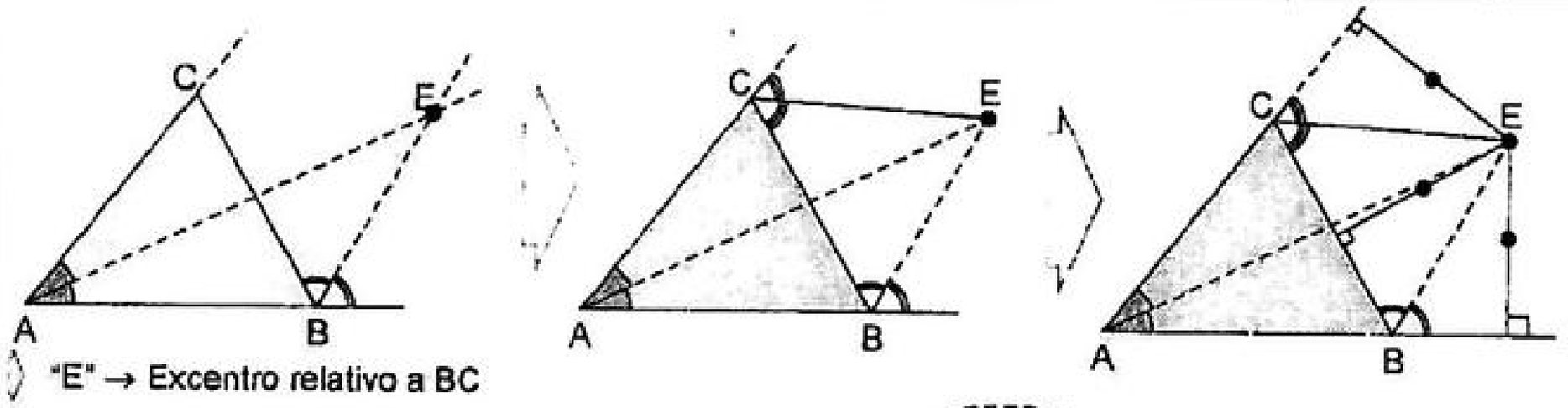
Toda mi física no pasa de una geometría. (Descartes)

Scanned by CamScanner

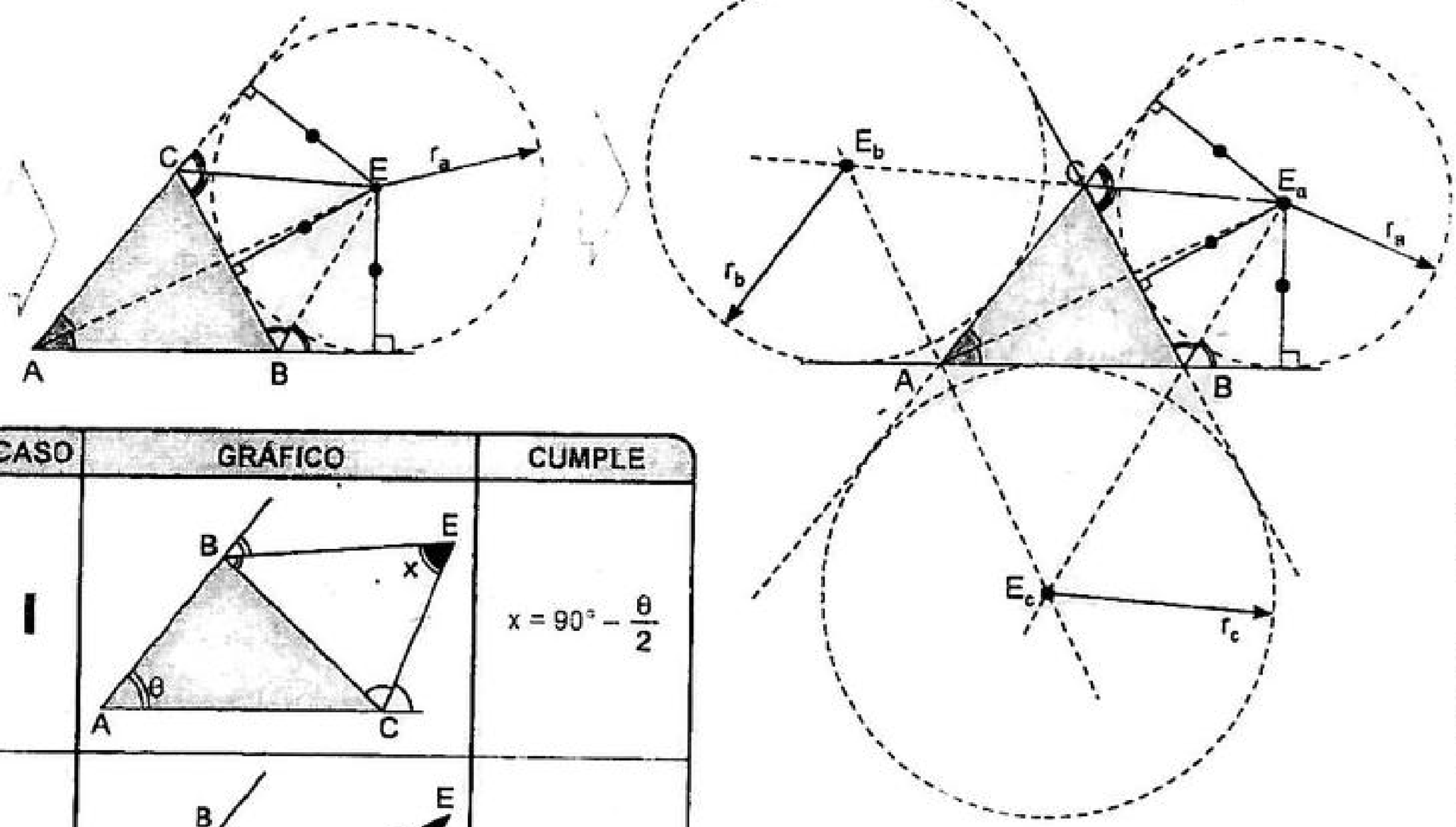
❸ EXCENTRO (E)

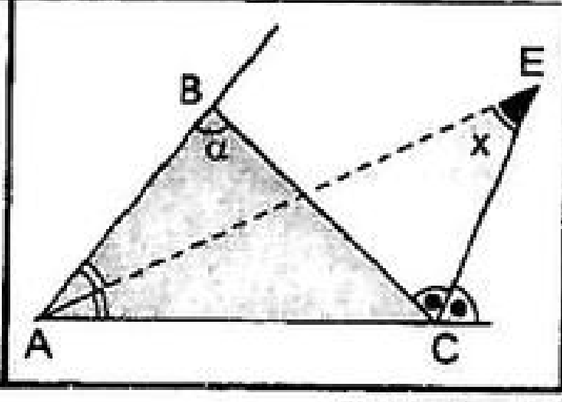
DEFINICIÓN	GRÁFICO	CARACTERÍSTICAS
Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y la bisectriz interior del tercer ángulo y se le denomina también "EXCENTRO".	 E → Excentro	✓ El excentro siempre está en el exterior del triángulo y este punto es equidistante de los tres lados del triángulo. ✓ Todo triángulo tiene tres excentros. ✓ Para hallar uno de los tres excentros de un triángulo basta con trazar una bisectriz interior y una bisectriz exterior (de dos ángulos diferentes) ó bien basta con trazar dos bisectrices exteriores. ✓ Los excentros son centros de las circunferencias exinscritas al triángulo cuyos radios se denominan EXRADIOS.

PROPIEDADES



"E" → Excentro relativo a BC



CASO	GRÁFICO	CUMPLE
I		$x = 90° - \frac{\theta}{2}$
II		$x = \frac{\alpha}{2}$

Donde

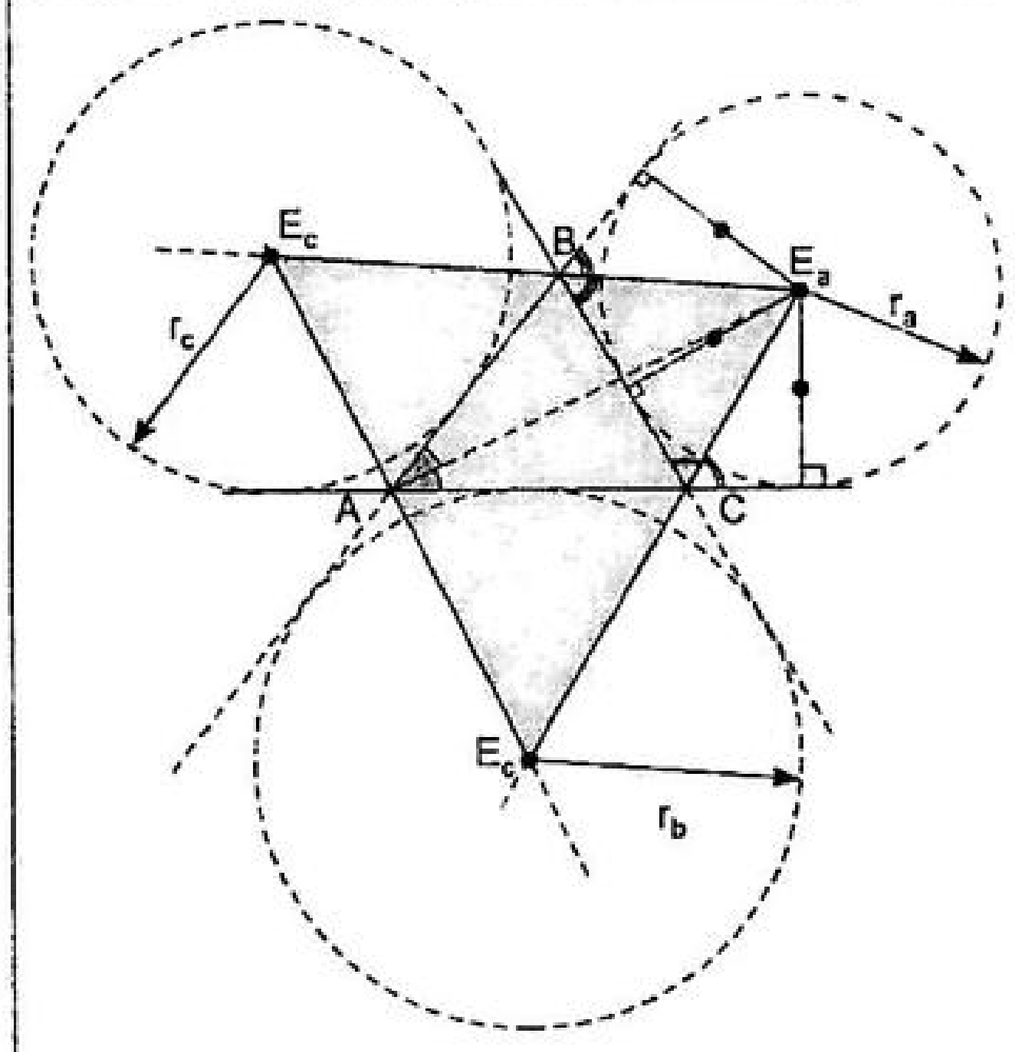
E_a → Excentro relativo al lado BC

"r_a" → Exradio relativo al lado BC

El mundo esta cada vez más dominado por la matemática (A.F Rambaud)

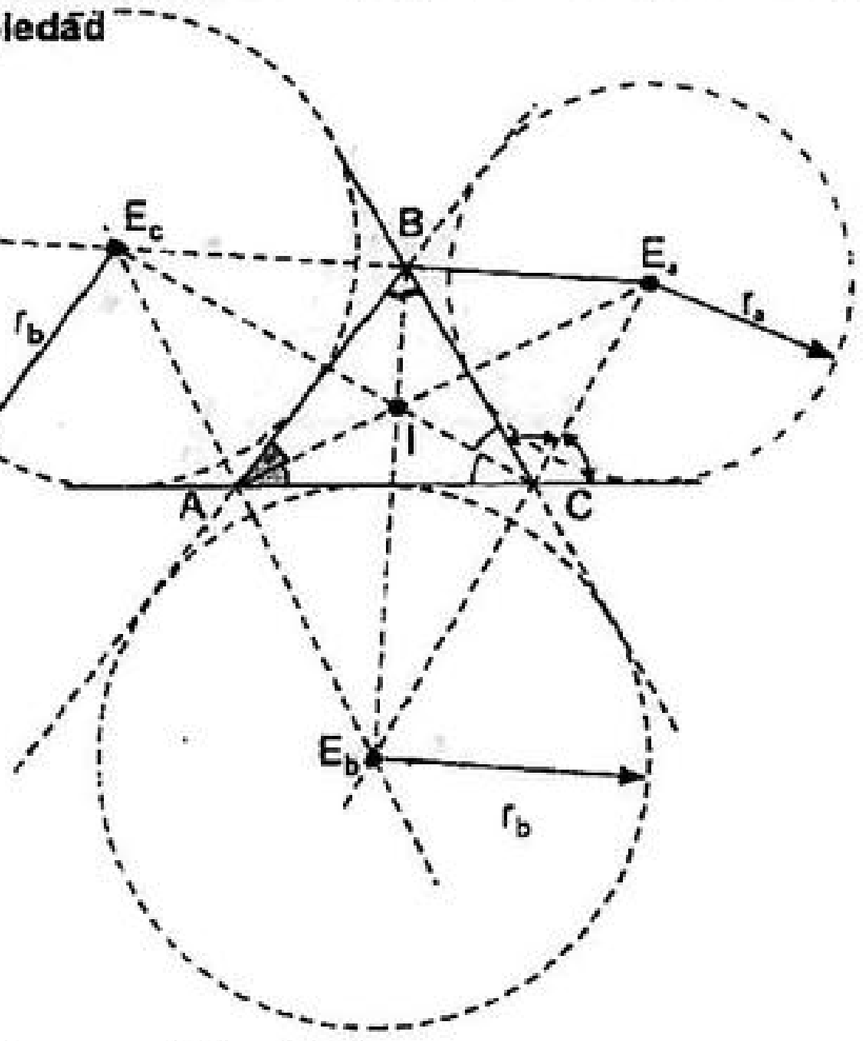
Scanned by CamScanner

ADICIONAL

TRIÁNGULO	CARACTERÍSTICA	GRÁFICO	CARACTERÍSTICAS
EX-INCENTRAL O ANTIORTICO	Es aquel triángulo que se forma al unir los excentros del triángulo dado.		◇ Todo triángulo tiene triángulo exincentral ◇ En todo triángulo sus bisectrices exteriores son perpendiculares a los lados del respectivo triángulo exincentral. ◇ En todo triángulo sus bisectrices exteriores son los lados del respectivo triángulo ex-incentral. ◇ En todo triángulo los lados de su triángulo ex-incentral son respectivamente paralelas a los lados de su triángulo tangencial. ◇ El incentro de un triángulo es el ortocentro de su triángulo exincentral. ◇ Los excentros equidistan exteriormente de los lados de todo triángulo.

* $\triangle E_aE_bE_c$ → Triángulo excentral del $\triangle ABC$
* E_a, E_b, E_c → Excentros relativos a sus lados respectivamente
* r_a, r_b, r_c → Exradios

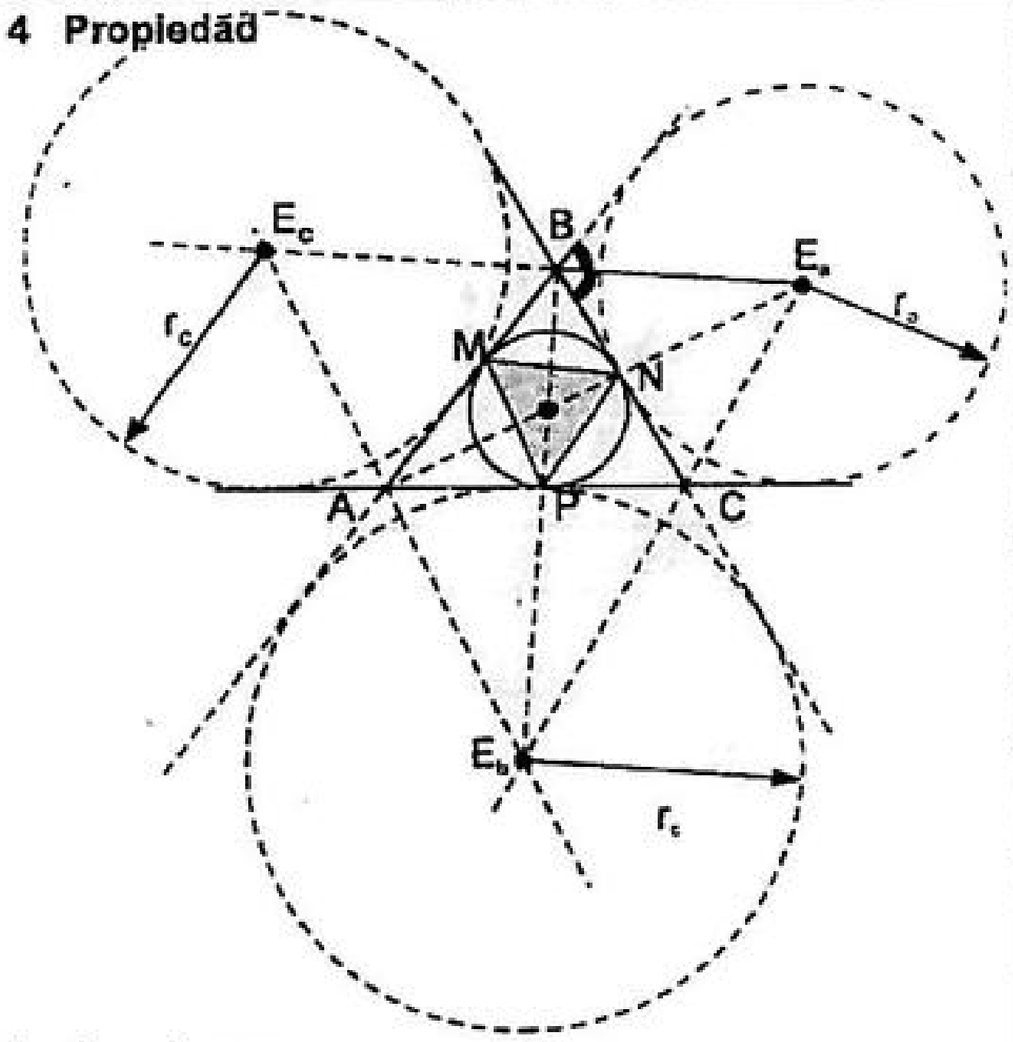
2 Propiedad



Aquí se observa: $\overline{IC} \perp \overline{E_aE_b}$
$\overline{IB} \perp \overline{E_aE_c}$
$\overline{IA} \perp \overline{E_bE_c}$

También: I { Incentro del $\triangle ABC$ / Ortocentro del $\triangle E_aE_bE_c$

4 Propiedad



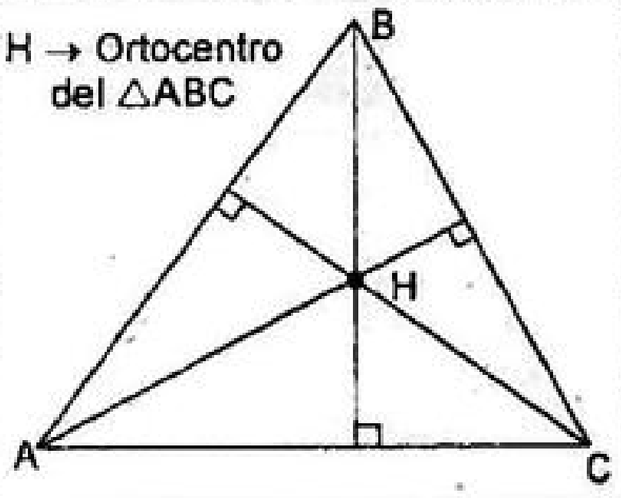
Aquí se observa:
$\triangle MNP$ → triángulo tangencial del $\triangle ABC$
$\triangle E_aE_bE_c$ → triángulo exincentral del $\triangle ABC$

$E_aE_c \,//\, MN$
$E_aE_b \,//\, NP$
$E_bE_c \,//\, MP$

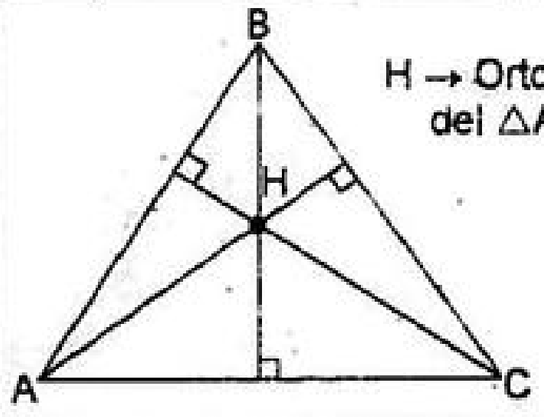
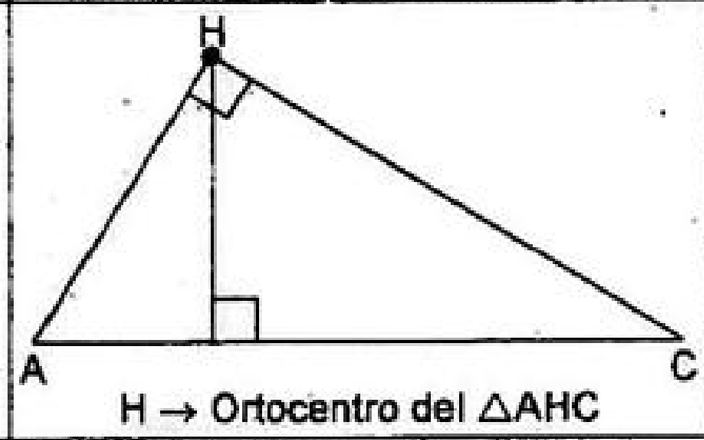
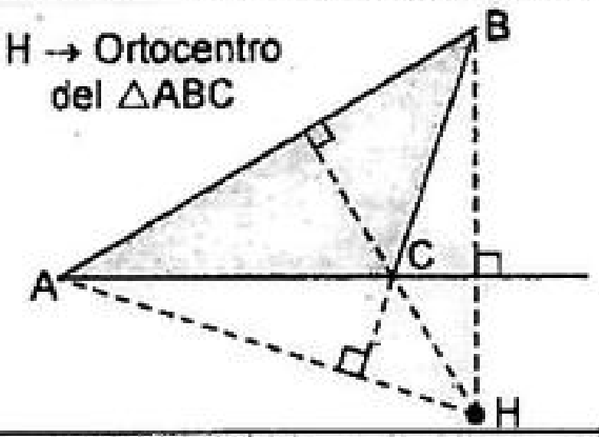
El mundo está cada vez más dominado por la matemática. (A.F. Rambaud)

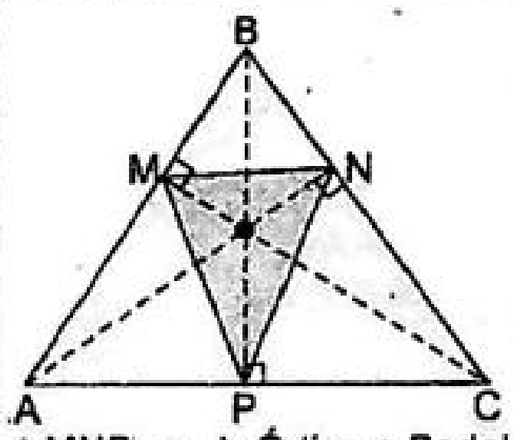
Scanned by CamScanner

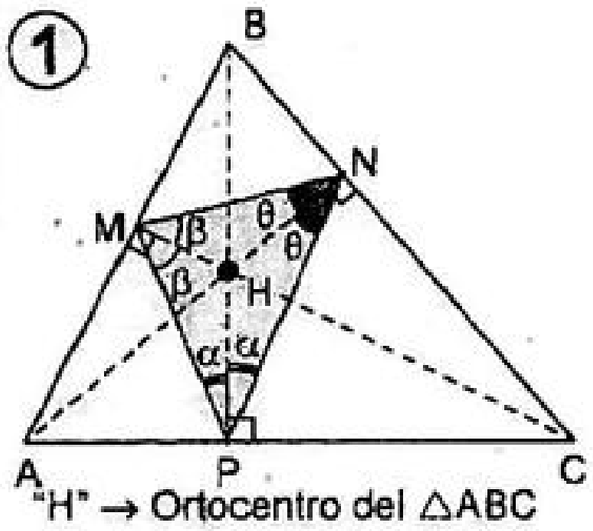
4 ORTOCENTRO (H)

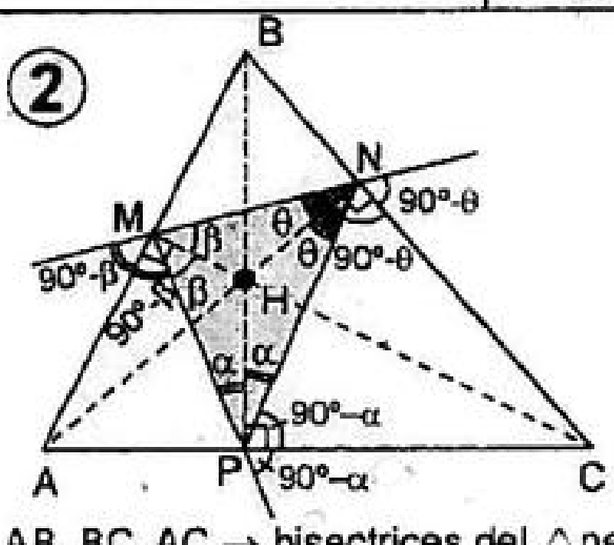
DEFINICIÓN	GRÁFICO	PROPIEDADES
Es el punto de intersección de las alturas.	H → Ortocentro del △ABC 	◇ Todo triángulo tiene un solo ortocentro. ◇ Para hallar el ortocentro de un triángulo basta con trazar las alturas. ◇ El ortocentro no siempre es un punto interior a un triángulo ◇ En un triángulo acutángulo el ortocentro es un punto interior. ◇ En un triángulo rectángulo el ortocentro se halla en el vértice del ángulo recto. ◇ En un triángulo obtusángulo el ortocentro es un punto exterior.

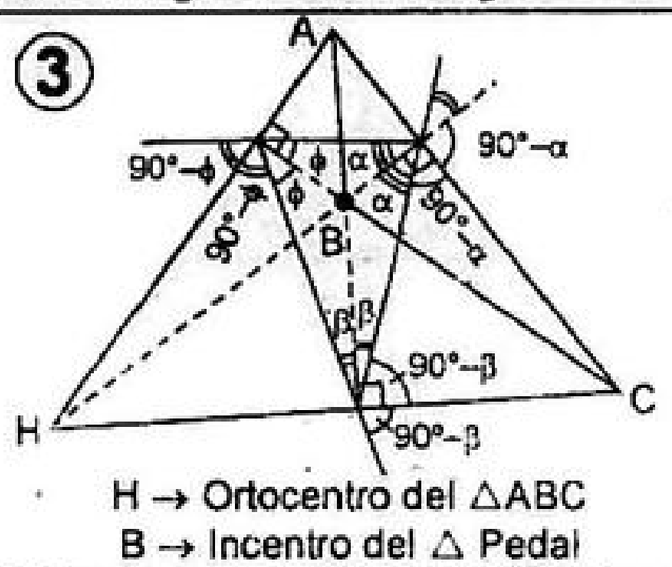
POSICIONES DEL ORTOCENTRO

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO	TRIÁNGULO RECTÁNGULO	TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO
 H → Ortocentro del △ABC	 H → Ortocentro del △AHC	H → Ortocentro del △ABC 

TRIÁNGULO	CARACTERÍSTICA	PROPIEDADES	GRÁFICO
ÓRTICO O PEDAL	Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo, al cual se le denomina triángulo "ORTICO"	 △MNP → △ Órtico o Pedal △ABC → △Antiórtico	1. El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo ORTICO. 2. En todo triángulo acutángulo sus lados son bisectrices exteriores de dicho triángulo PEDAL. 3. Los vertices de un triángulo son los excentros de dicho triángulo PEDAL. 4. En todo triángulo obtusángulo, los lados que forman el ángulo obtuso y la altura relativa al tercer lado, son bisectrices interiores del respectivo triángulo ORTICO. 5. En todo triángulo obtusángulo el lado que se opone al ánguio obtuso con las alturas relativas a los otros dos lados, son bisectrices EXTERIORES de dicho ángulo. 6. El vértice al ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo es el incentro del respectivo triángulo PEDAL y su ortocentro con los vértices de los ángulos agudos son los EXCENTROS. 7. El triángulo rectángulo no tiene triángulo PEDAL.

① 
"H" → Ortocentro del △ABC
"H" → Incentro del △MNP

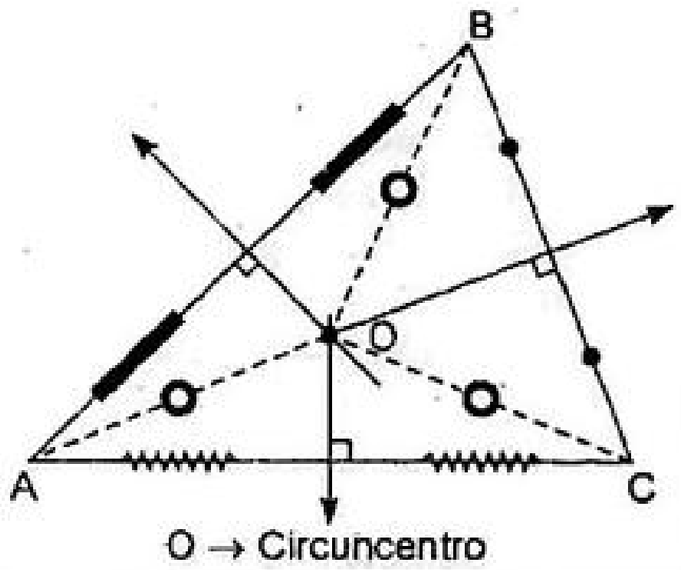
② 
AB, BC, AC → bisectrices del △pedal y los vértices A, B y C son excentros del △pedal

③ 
H → Ortocentro del △ABC
B → Incentro del △ Pedal
* A, H y C son excentros del triángulo pedal
* B → es el ortocentro del △AHC

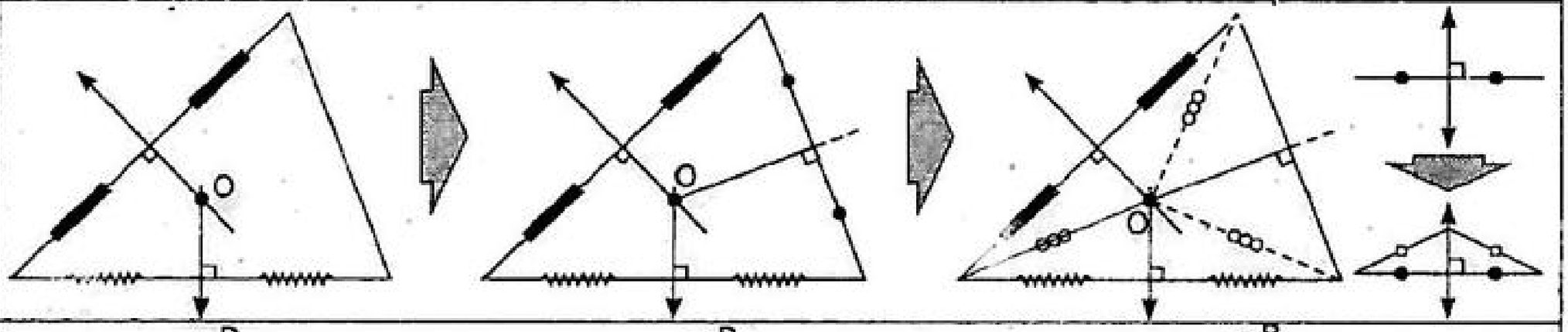
El mundo está cada vez más dominado por la matemática. (A.F. Rambaud)

Scanned by CamScanner

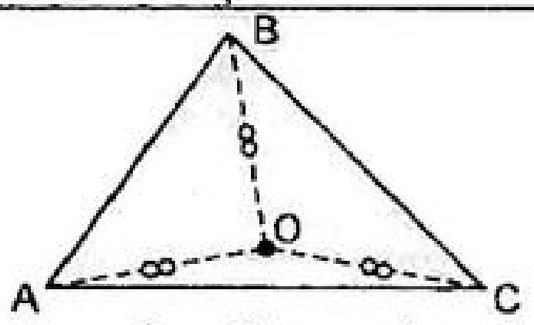
5 CIRCUNCENTRO (O)

DEFINICIÓN	GRÁFICO	CARACTERÍSTICAS
Es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.	 O → Circuncentro	1. Todo triángulo tiene un sólo circuncentro. 2. Para determinar el circuncentro de un triángulo bastará trazar dos de sus mediatrices. 3. El circuncentro equidista de los vértices de todo triángulo. 4. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyo radio se denomina circunradio. 5. El circuncentro no siempre es un punto interior de un triángulo. 6. En todo triángulo, el ángulo que se forma al unir dos vértices con el circuncentro siempre es igual al doble del ángulo del tercer vértice.

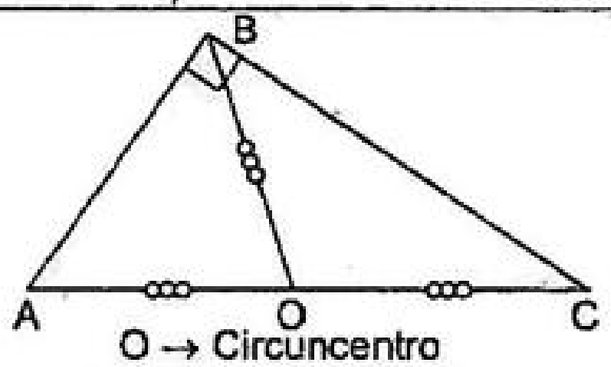
2



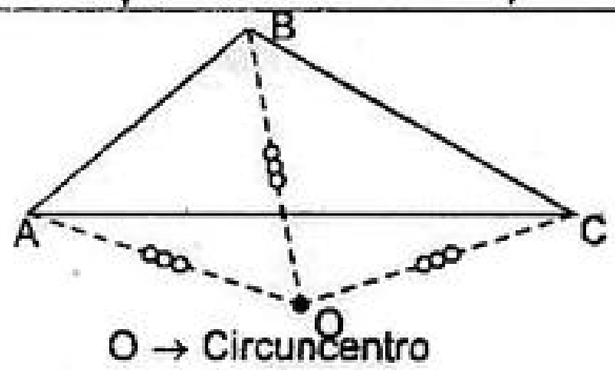
3



O → Circuncentro
△ABC → Acutángulo

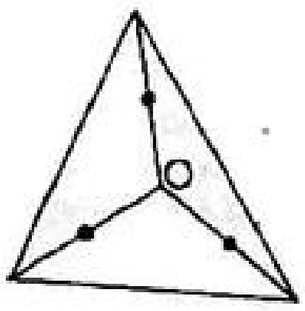


O → Circuncentro
△ABC → Rectángulo

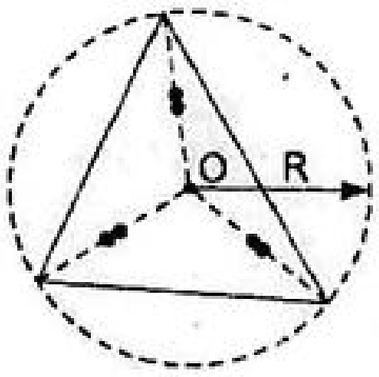


O → Circuncentro
△ABC → Obtusángulo

4

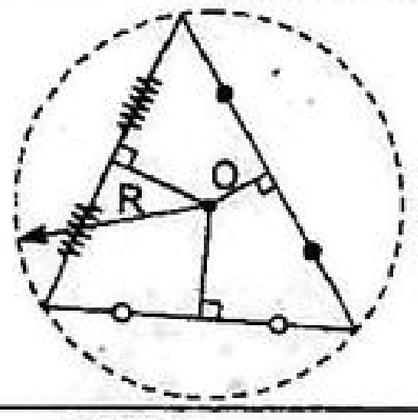


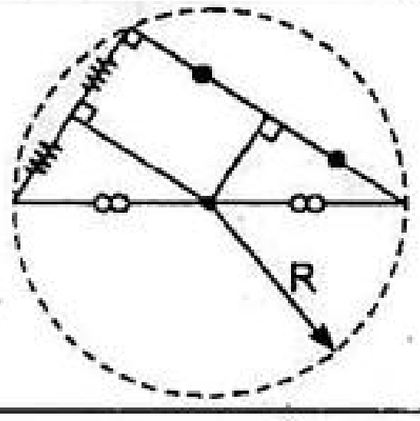
Sabemos que por tres puntos cualquiera no colineales pasa una sola circunferencia donde "O" es centro

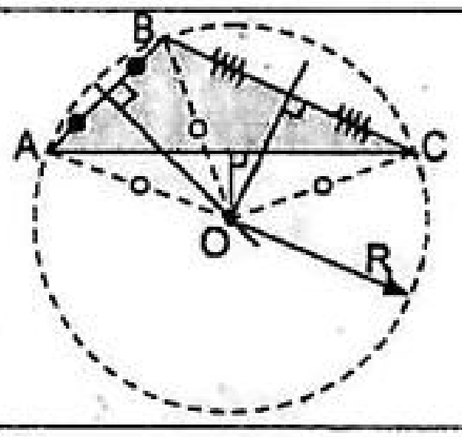


* O → Circuncentro y es el centro de la circunferencia circunscrita al △ABC
* R → circunradio

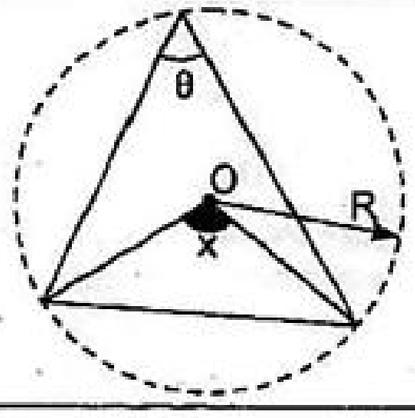
5



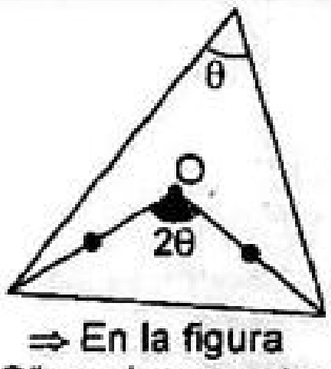




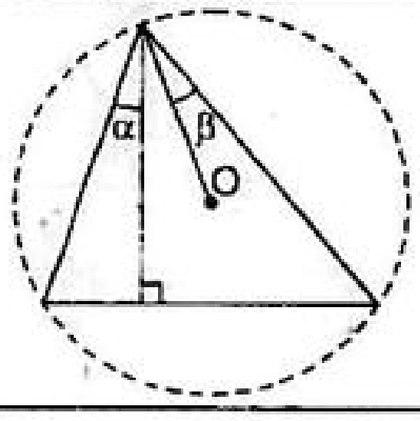
ADICIONAL



O → Circuncentro
⇒ x = 2θ



⇒ En la figura "O" es circuncentro

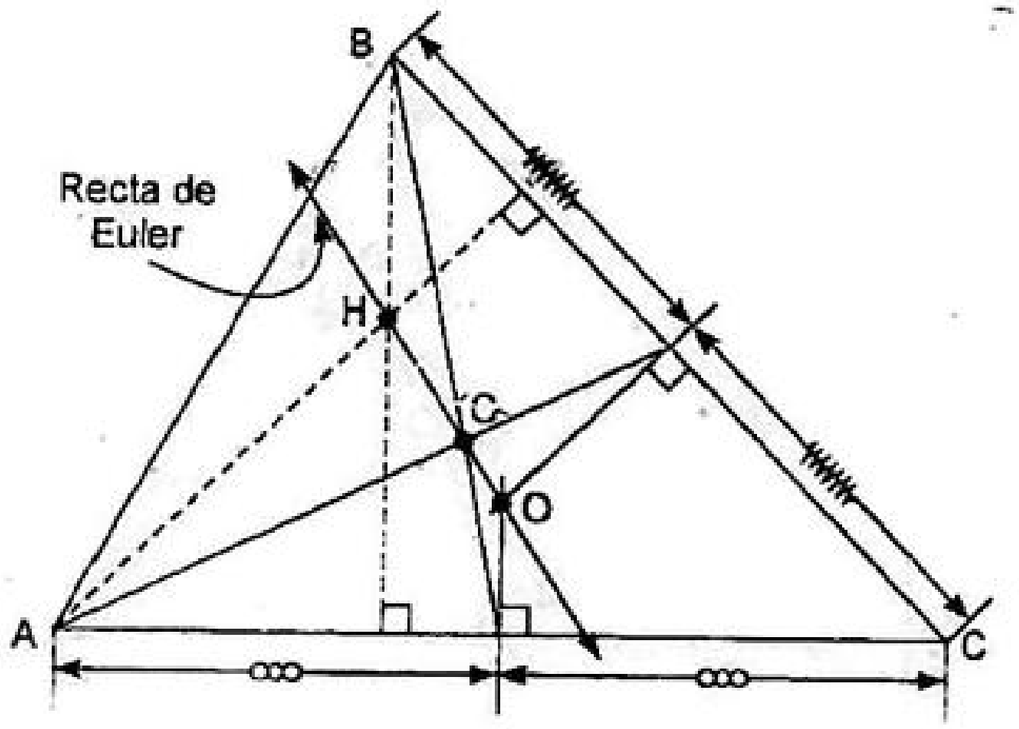


Si: O → Circuncentro
⇒ α = β

Scanned by CamScanner

La recta de Euler

En todo triángulo exceptuando el triángulo equilátero se cumple que el ortocentro, baricentro y el circuncentro son puntos contenidos en una linea recta. (Puntos colineales)



donde: H → Ortocentro del △ABC

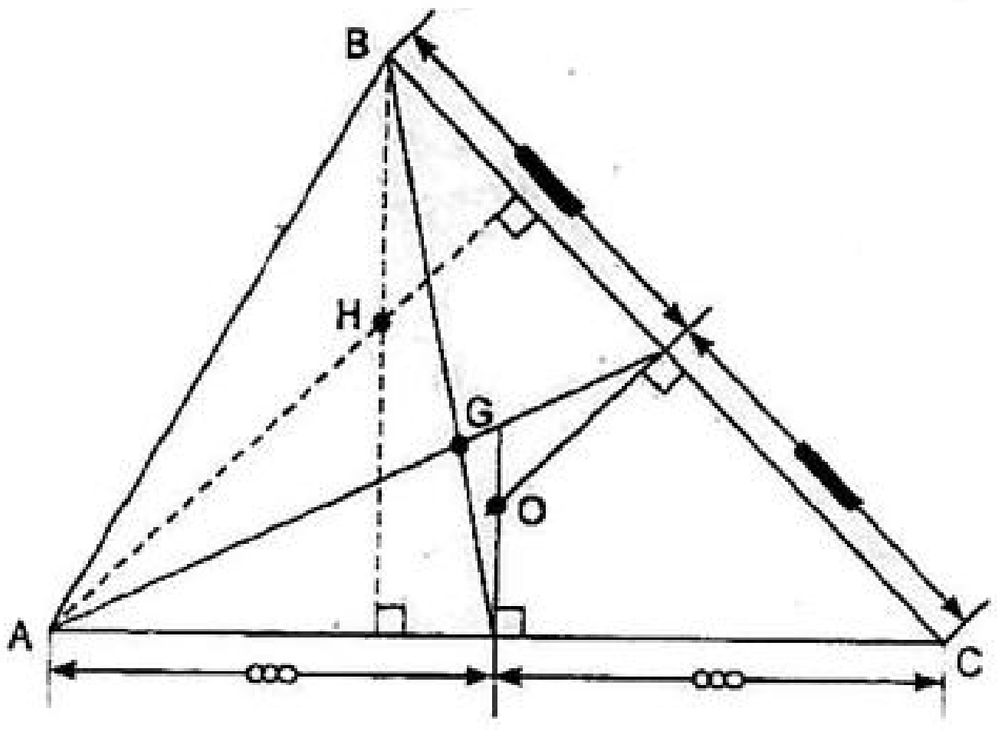
G → Baricentro del △ABC

O → Circuncentro del △ABC

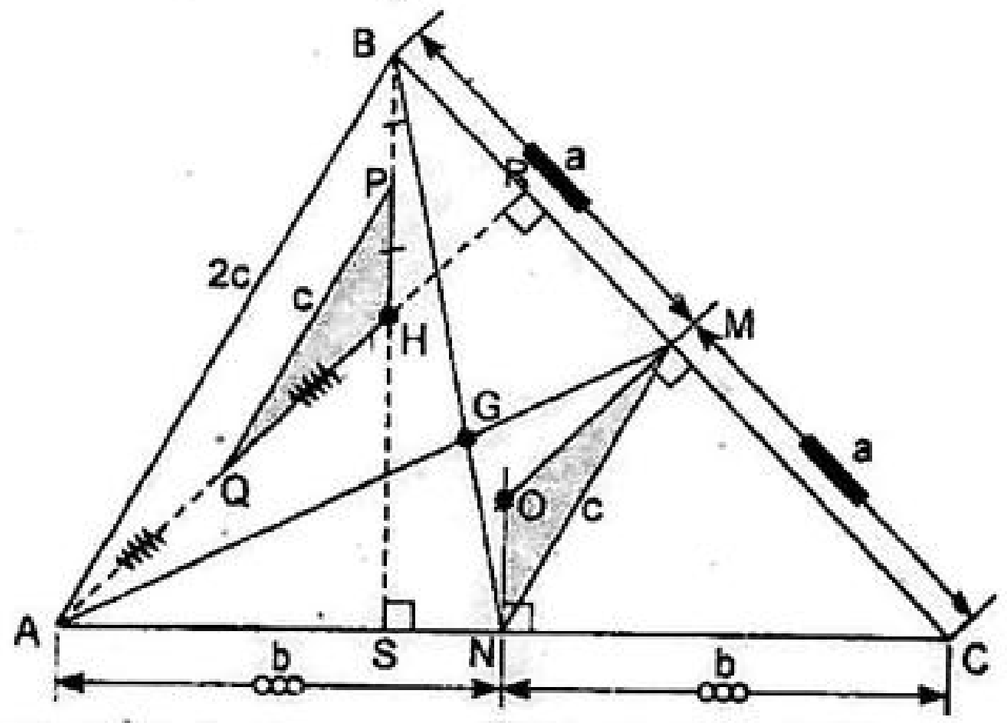
⇒ se cumple: **H, G y O son puntos colineales**

DEMOSTRACIÓN

Paso Nº 1: Ubicamos el ortocentro (H), el baricentro (G) y el circuncentro (O) en un triángulo ABC no equilátero.



Paso Nº 2: Se traza la base media MN y PQ de los triángulos ABC y ABH respectivamente, donde MN//AB y PQ//AB. ($\overline{PQ} = \overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$)



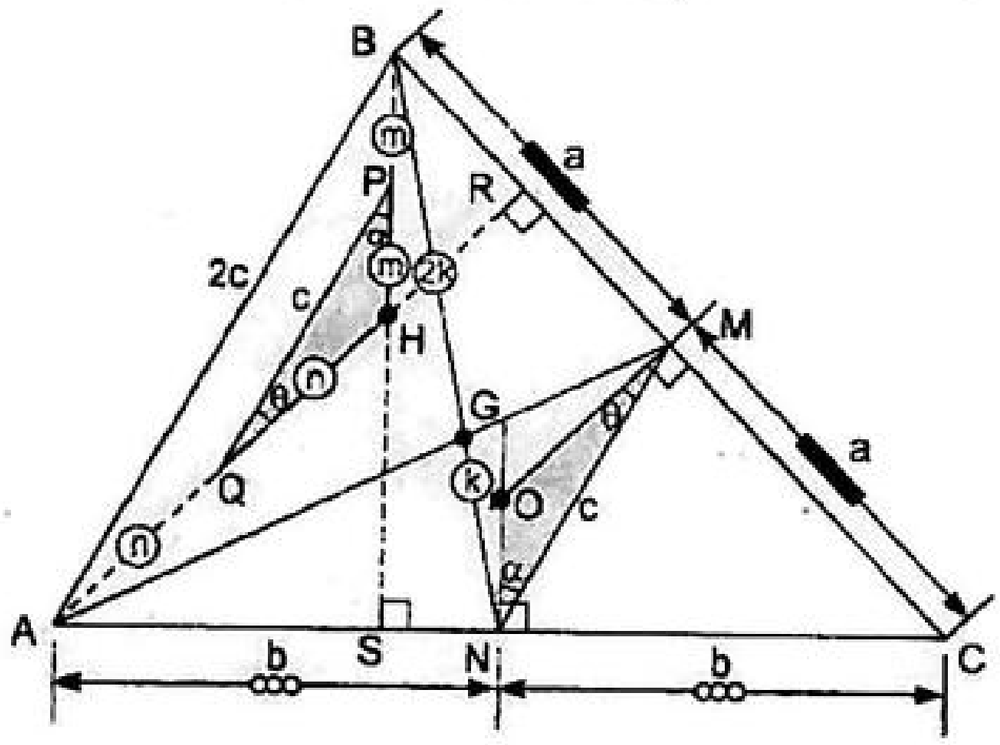
Paso Nº 3: Se observa que: $\overline{BS} // \overline{ON}$ y $\overline{AR} // \overline{OM}$

También: $\overline{PQ} // \overline{MN} // \overline{AB}$

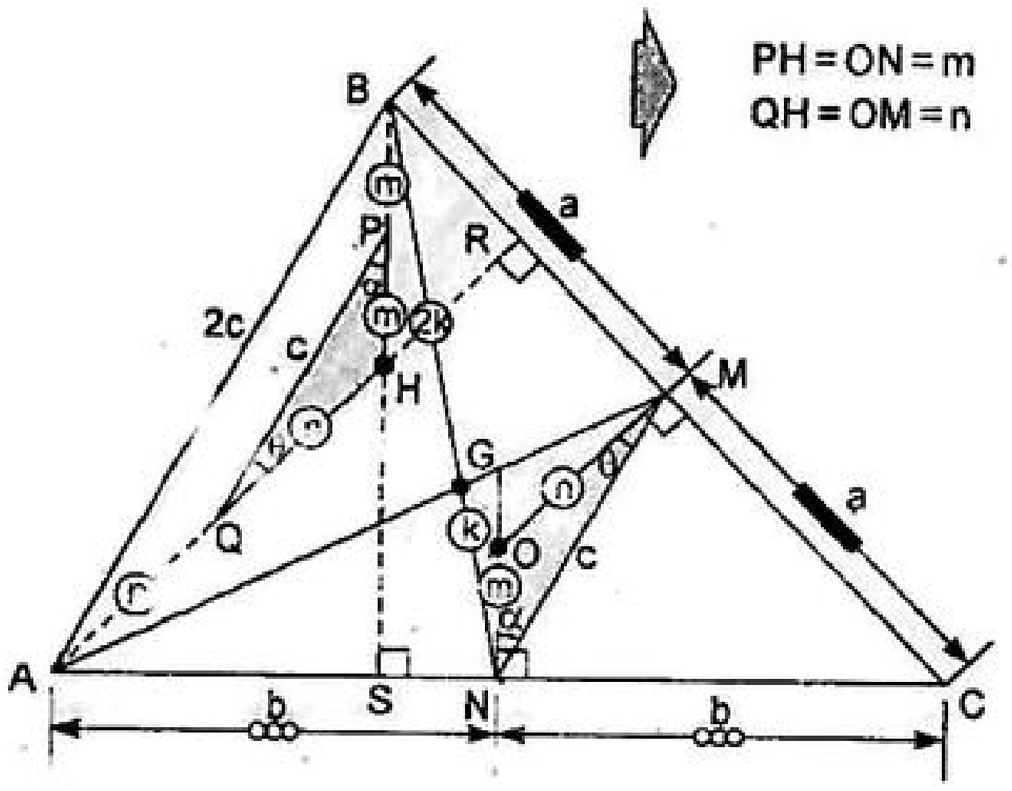
Entonces: $m\triangle QPH = m\triangle ONM = \alpha$

$m\triangle PQH = m\triangle OMN = \theta$

(Prop. de alternos internos)



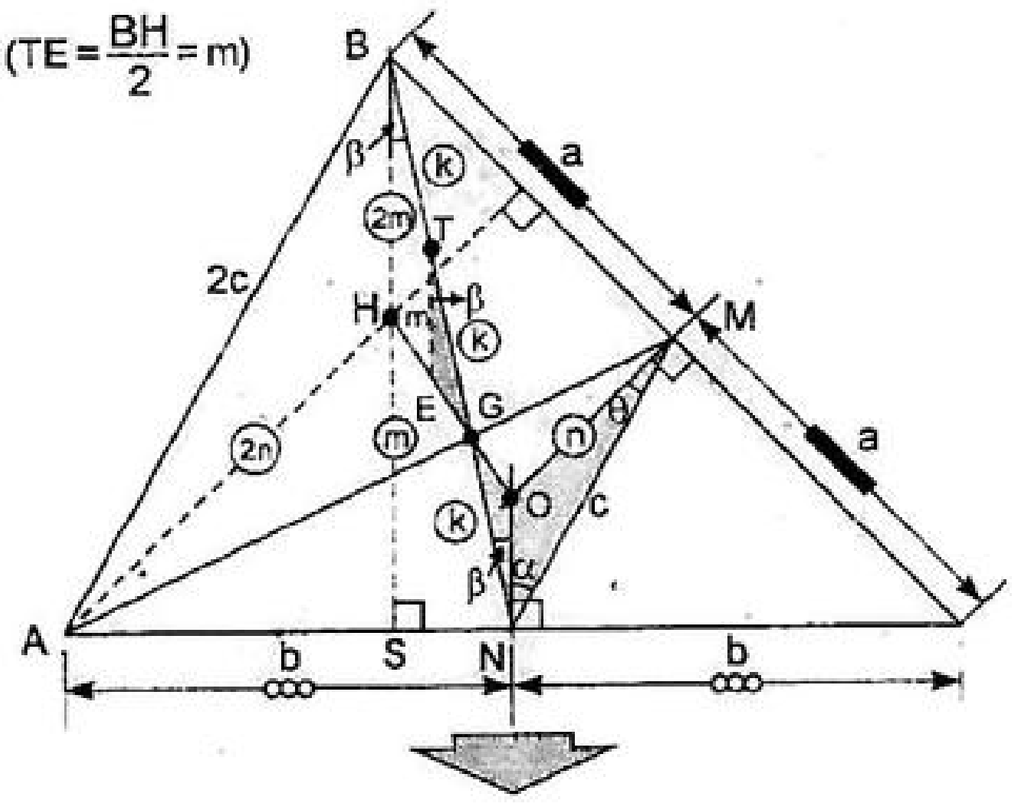
Paso Nº 4: Se observa que los triángulos PHQ y MON son congruentes (Caso: ALA)



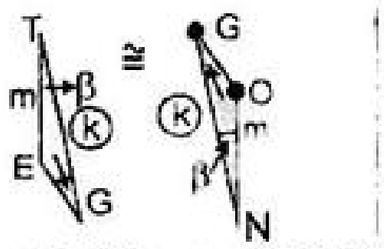
Scanned by CamScanner

Paso N° 5: Por ser G → baricentro se cumple: BG = 2GN
Ahora ubicaremos un punto T en $\overline{BG}$ tal que: $\overline{BT} = \overline{TG}$
Además TE//BH como: BS//ON ⇒ TE//ON
Luego: HE = EG (Teorema de los puntos medios)

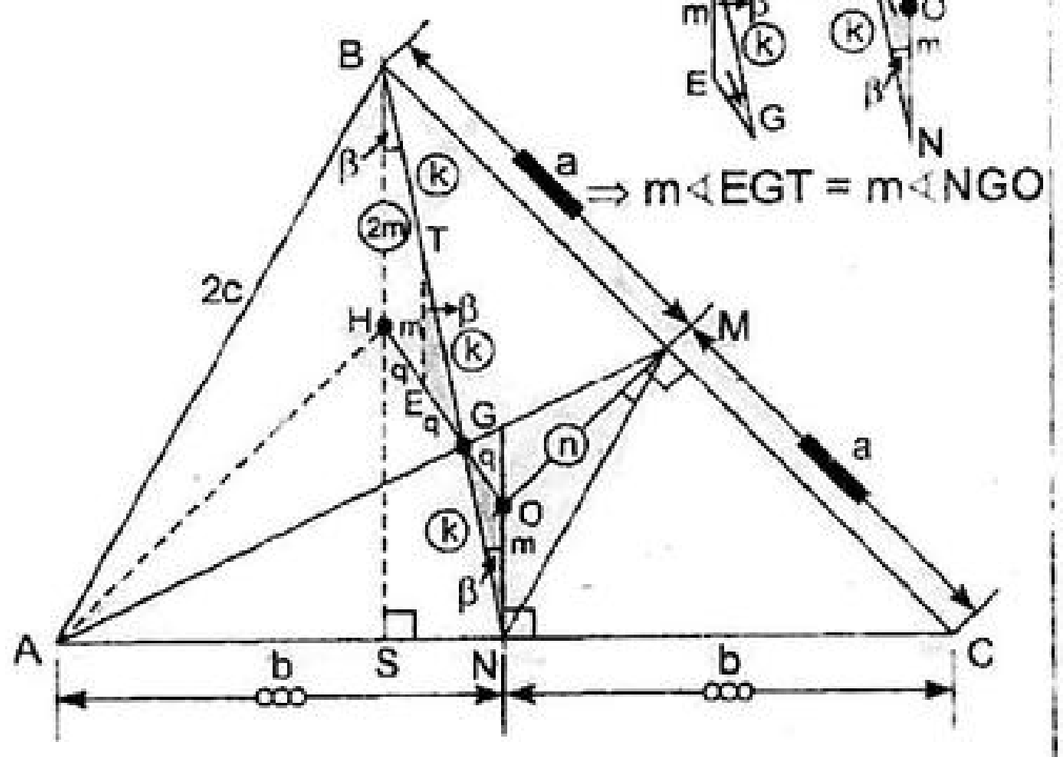
$(TE = \frac{BH}{2} = m)$



Se observa que los triángulos △TEG y △GNO son congruentes (Caso: L.A.L.)

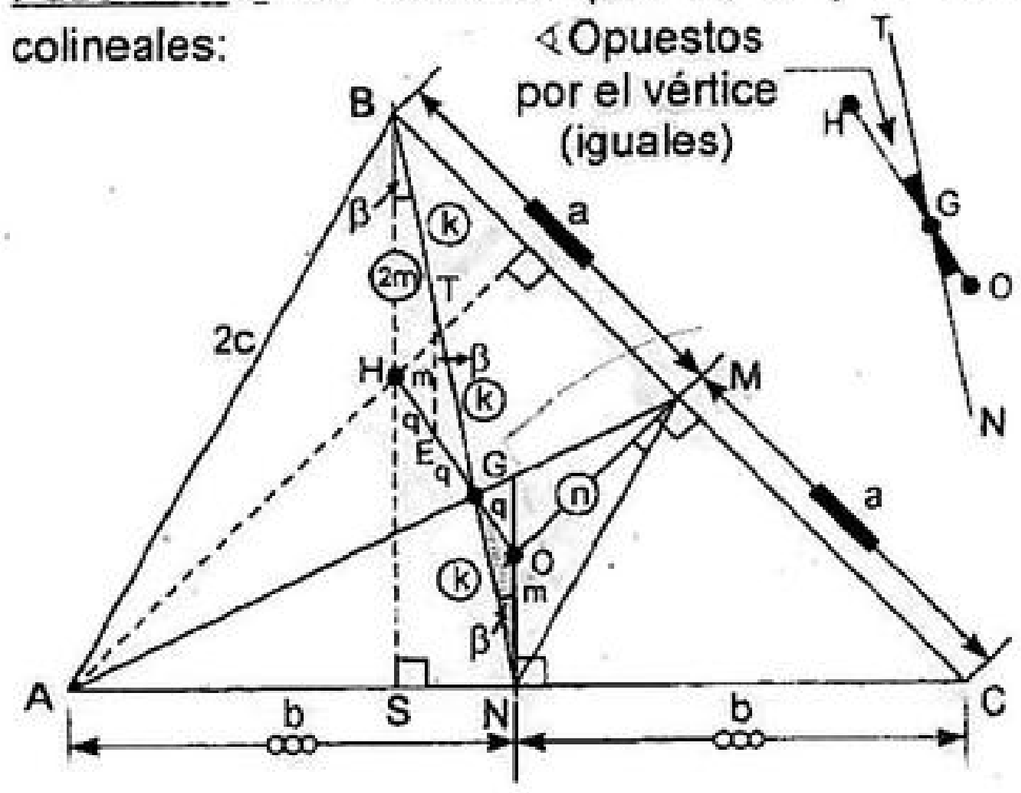


⇒ m◁EGT = m◁NGO



Paso N° 6: Se observa que: H, G y O son colineales:

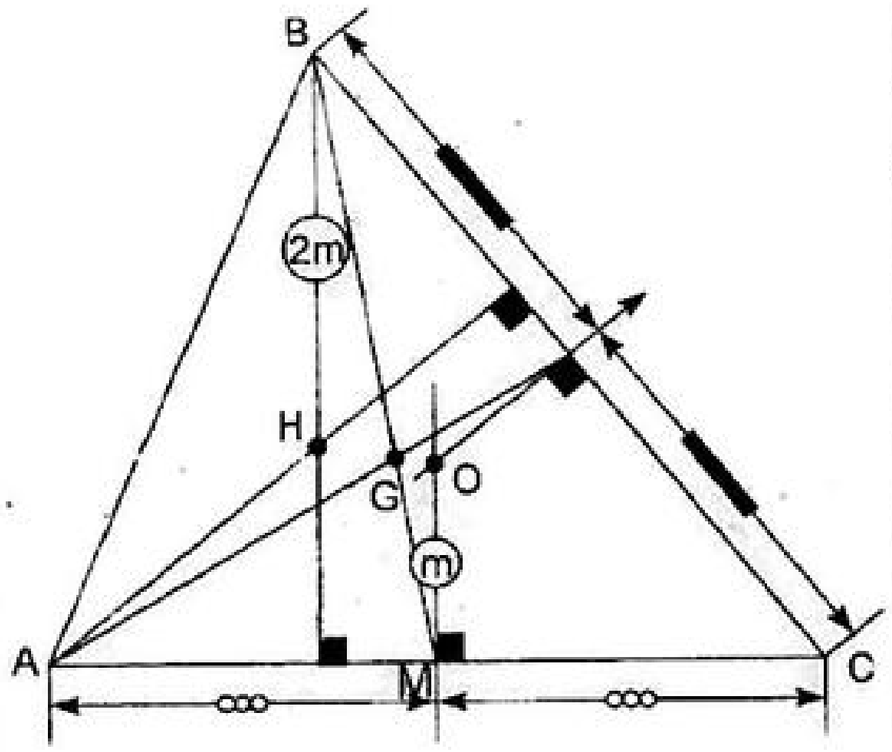
◁Opuestos por el vértice (iguales)



PROPIEDADES

1

En todo triángulo no equilátero se cumple que la distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia trazada desde el circuncentro al lado opuesto a dicho vértice.

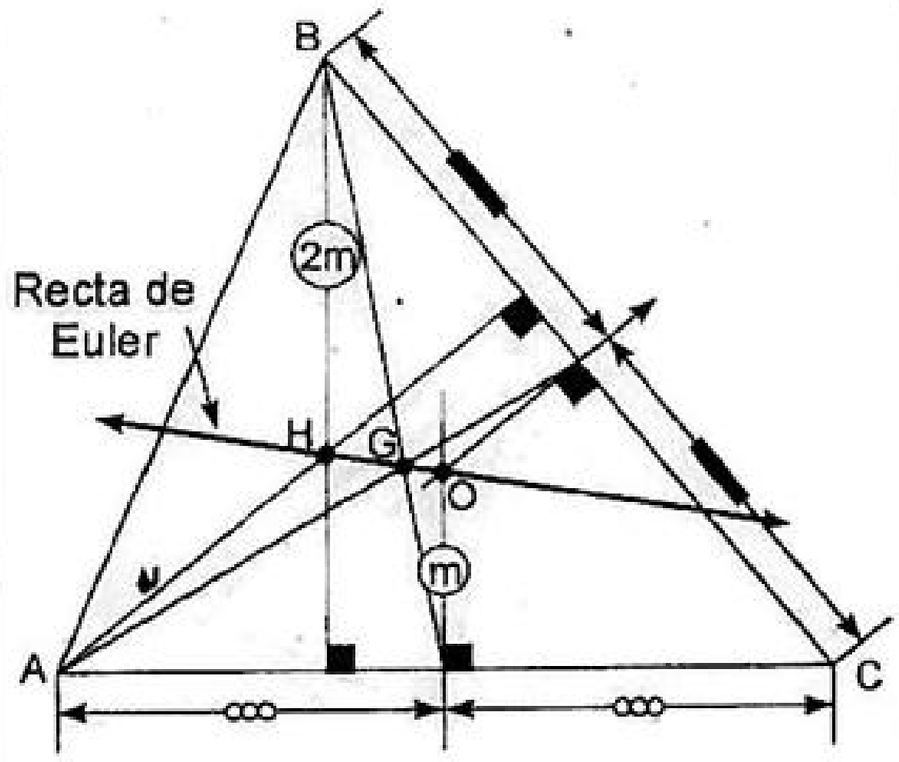


donde: O → circuncentro
H → ortocentro

$\boxed{BH = 2OM}$

2

En todo triángulo no equilátero se cumple que la distancia del ortocentro al baricentro es igual al doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

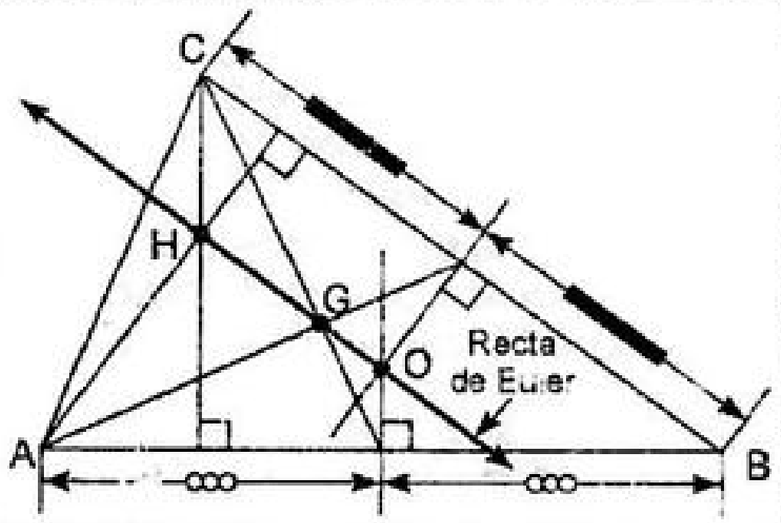
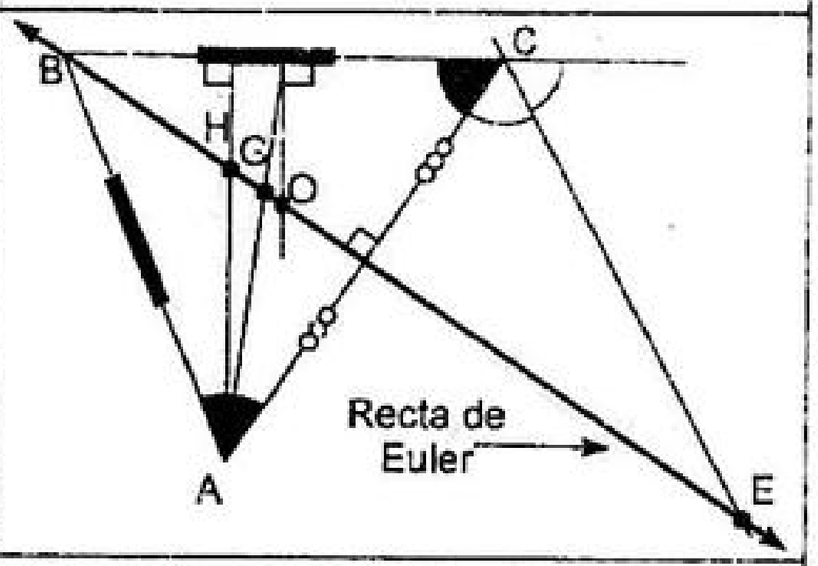
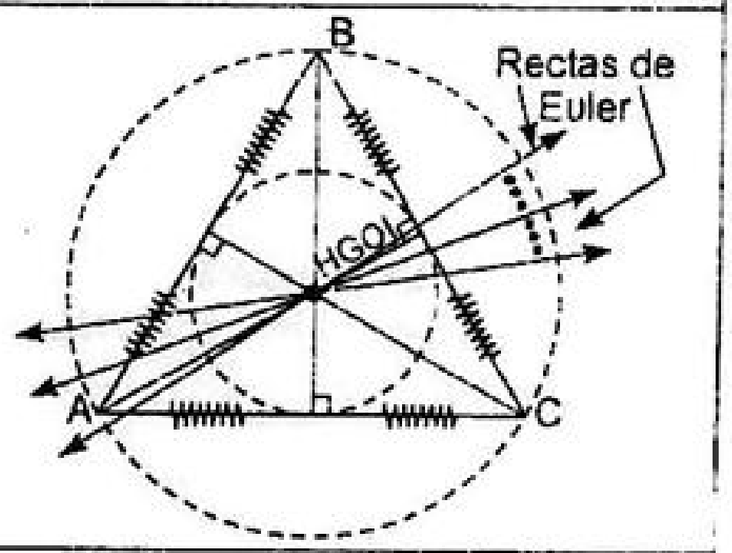
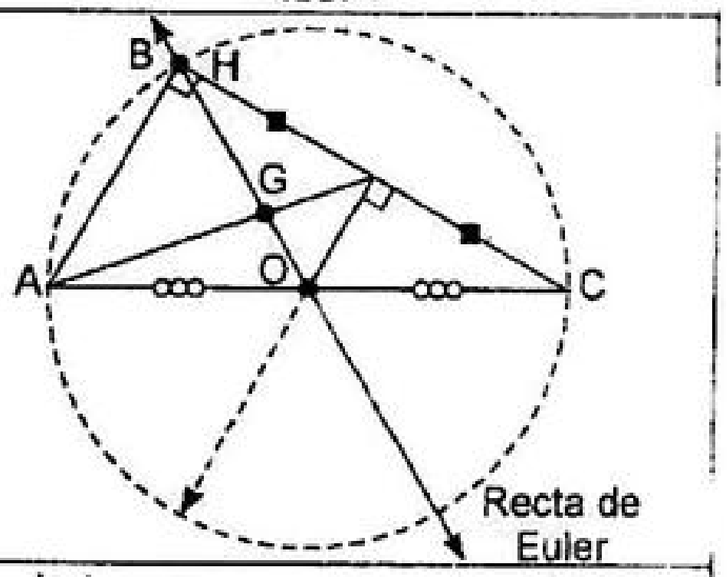
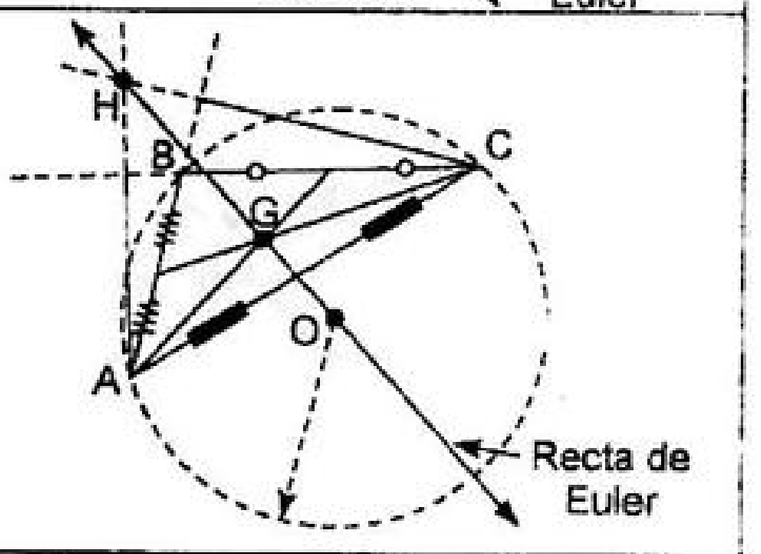


donde: H → ortocentro
G → baricentro
O → circuncentro

$\overline{HG} = 2\overline{GO}$

Scanned by CamScanner

POSICIONES DE LA RECTA DE EULER SEGÚN EL TIPO DE TRIANGULO

N°	TRIÁNGULO	SE CUMPLE QUE	CONDICIÓN	GRÁFICO
1	ESCALENO Y ACUTÁNGULO	El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo se hallan en linea recta.	H → ortocentro G → baricentro O → circuncentro Además: $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$	
2	ISÓSCELES (Acutángulo)	El ortocentro, el baricentro, circuncentro, además el incentro y el excentro relativo a la base se encuentra en la linea o en la recta de Euler.	H → Ortocentro G → Baricentro O → Circuncentro I → Incentro E → Excentro relativo a la base Además: AB = BC	
3	EQUILÁTERO	El ortocentro, el baricentro el circuncentro y el incentro, coinciden en un sólo punto. Obs.: Todo triángulo equilátero tiene infinitas rectas de Euler.	H → Ortocentro G → Baricentro O → Circuncentro I → Incentro Además: AB = BC = AC	
4	RECTÁNGULO	El ortocentro, el baricentro y el circuncentro están contenidos en la recta de Euler que coincide con la menor mediana del triángulo rectángulo.	H → ortocentro G → baricentro O → circuncentro Además: AB y BC ⇒ catetos	
5	OBTUSÁNGULO	El ortocentro, el baricentro y el circuncentro se encuentran en una línea recta (recta de Euler)	H → ortocentro G → baricentro O → circuncentro Además: $m\sphericalangle B > 90°$ (obtuso)	

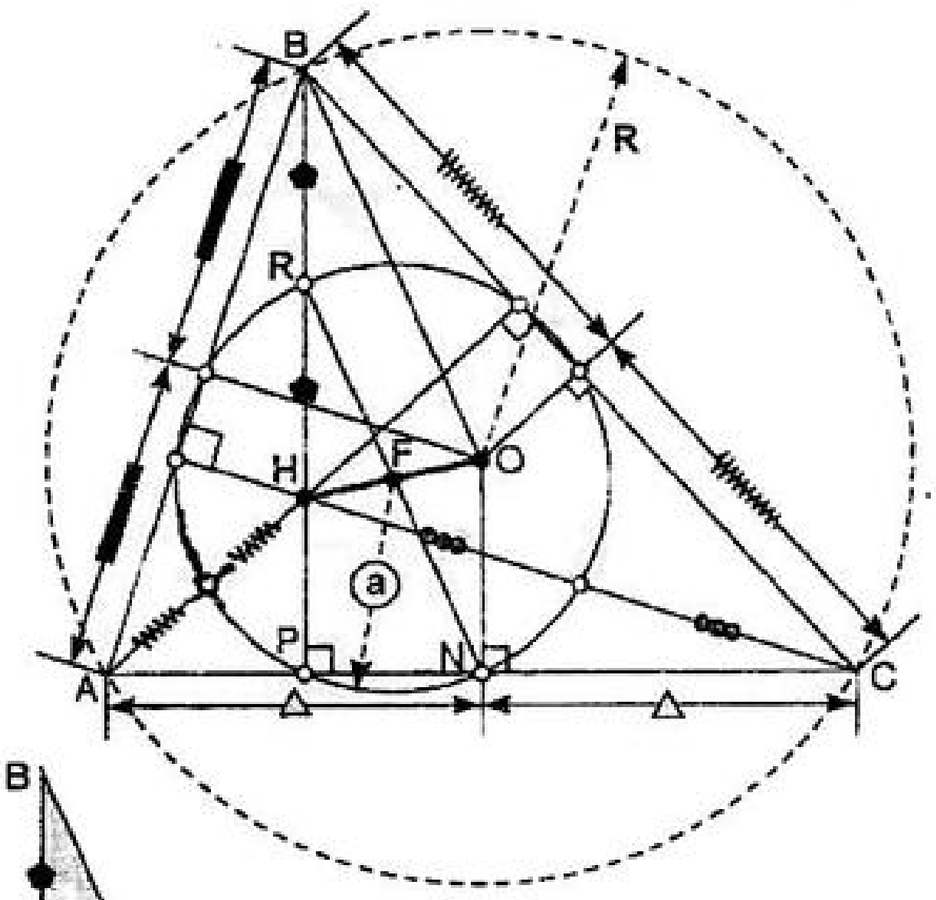
Toda mi física no pasa de una geometría. (Descartes)

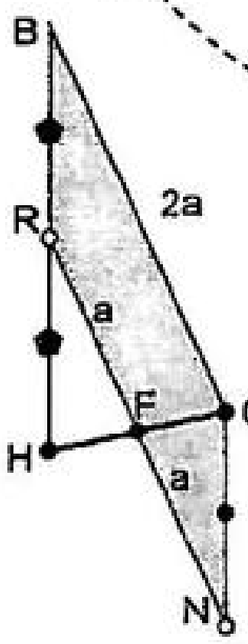
Scanned by CamScanner

TEOREMA

TEOREMA DE LA CIRCUNFERENCIA DE EULER

Los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos comprendidos entre cada vértice y el ortocentro de un triángulo, son nueve puntos que se encuentran en una misma circunferencia. A esta circunferencia se le denomina "Circunferencia de los nueve puntos".





De la figura:

$\Rightarrow \triangle HRF \cong \triangle FNO \Rightarrow HF = FO$

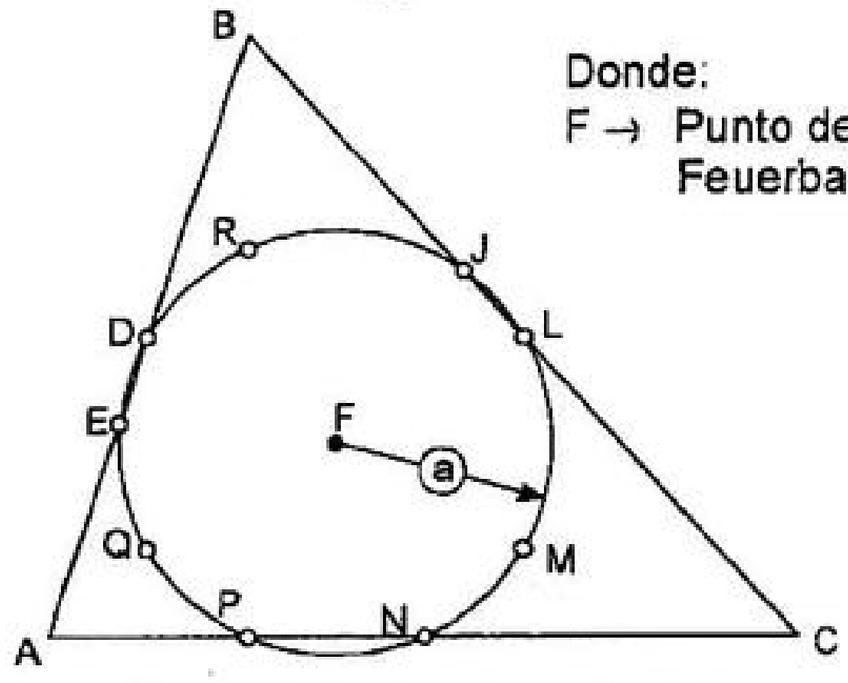
En la figura:

$\square BRNO$ es un paralelogramo

donde:

$BO = R$, también $BO = RN = 2a$

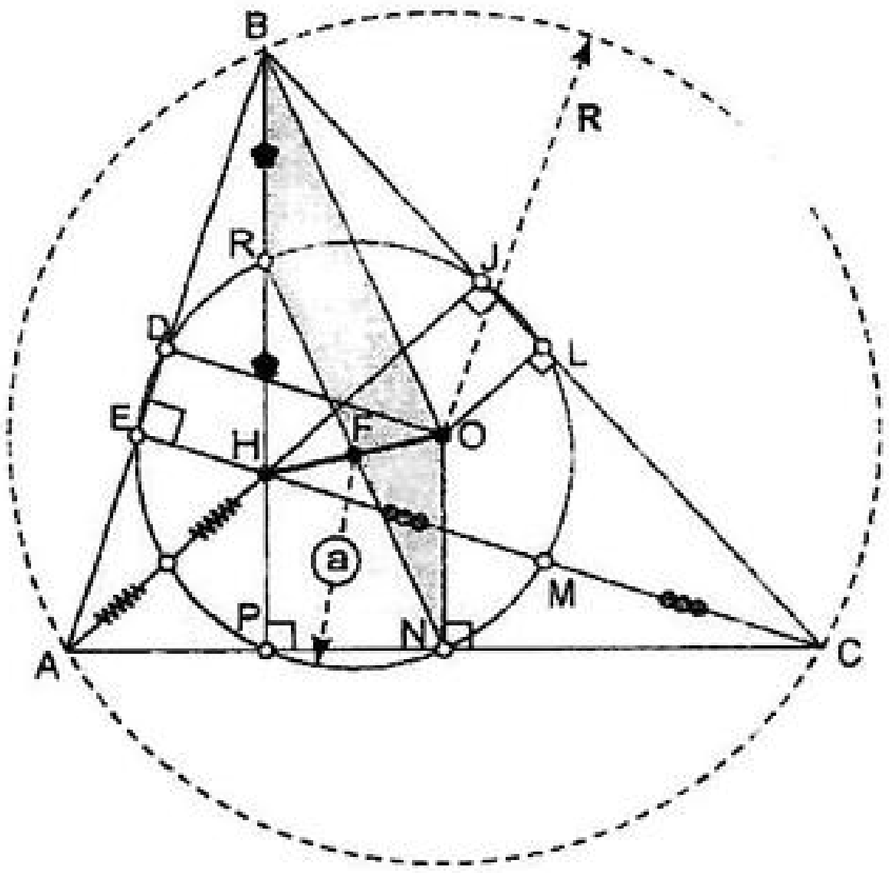
donde: $a = R/2$



Donde:

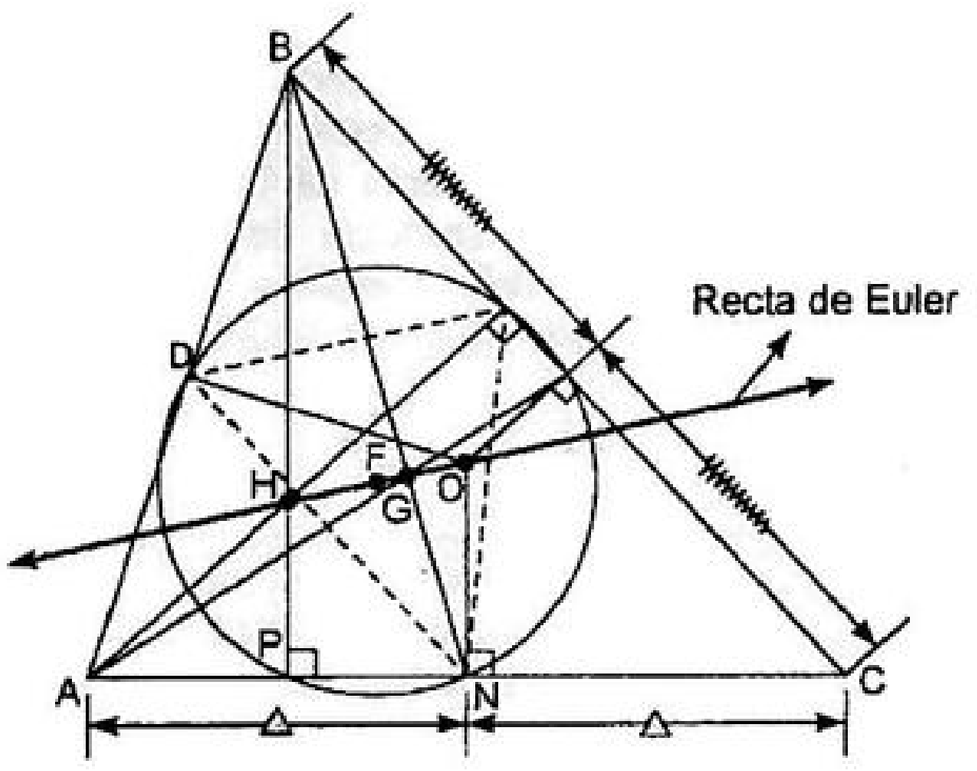
F → Punto de Feuerbach

F → Centro de la circunferencia de los nueve puntos Eulerianos



PROPIEDADES

* El ortocentro, el centro de la circunferencia de Euler y el circuncentro de un triángulo no equilátero se hallan en linea recta.
* El centro de la circunferencia de Euler es el punto medio del segmento que tiene el ortocentro con el circuncentro del triángulo dado. HF=FO, donde F: punto de Feuerbach.
* El radio de la circunferencia de Euler es igual a la mitad del circunradio del triángulo dado

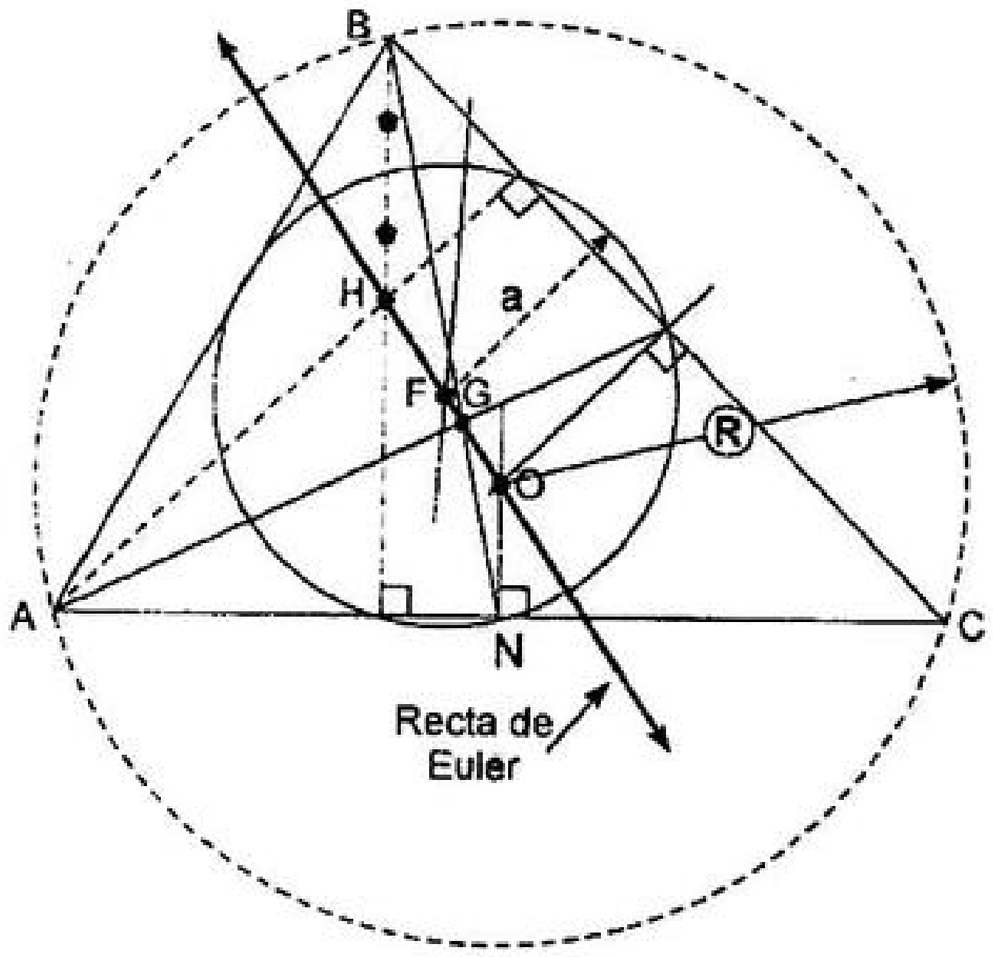


* El punto de FEUERBACH (F) es el circuncentro del triángulo mediano o complementario.

Scanned by CamScanner

TEOREMA DE LA RECTA DE EULER

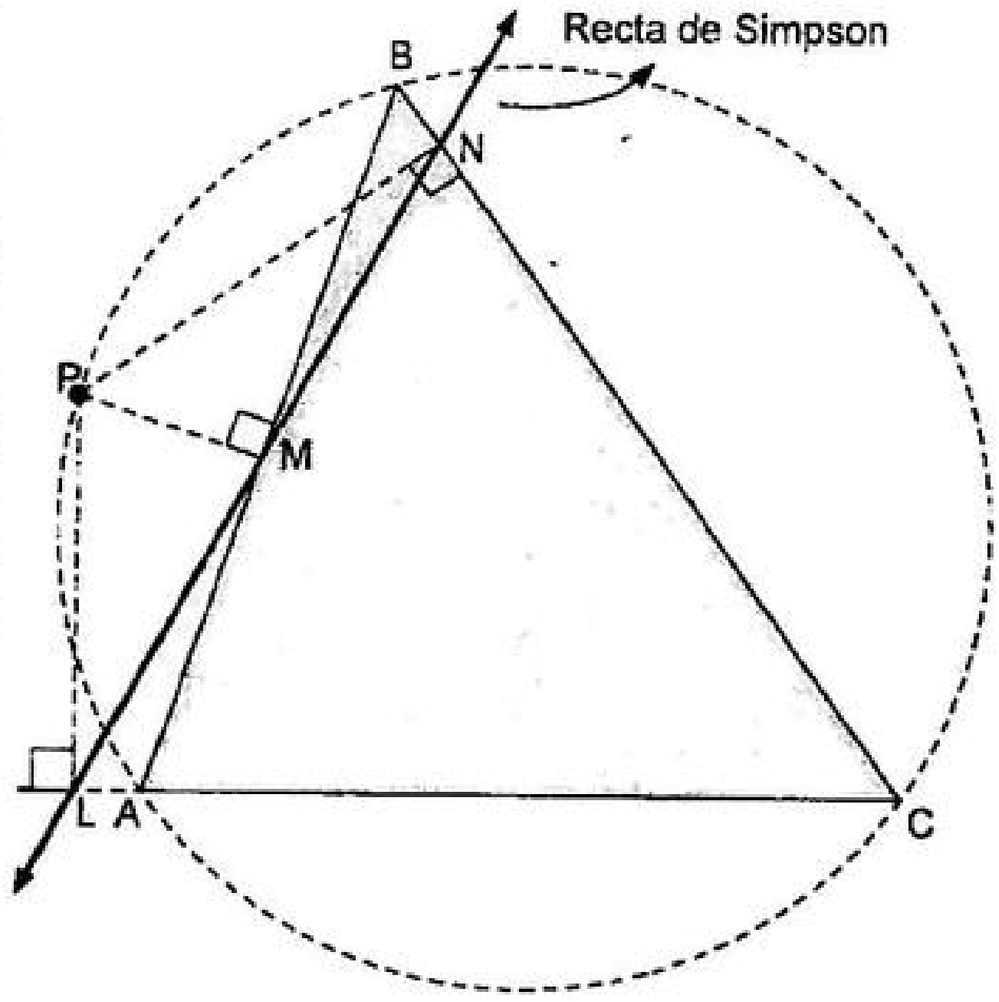
El ortocentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos (punto de Feuerbach), el baricentro y el circuncentro representan alineados en ese orden, a cuya recta se soporte se le denomina "Recta de Euler"



H → Ortocentro
F → Punto de Feuerbach
G → Baricentro
O → Circuncentro
R → Circunradio del △ABC
a → radio de la circunferencia euleriana

TEOREMA DE LA RECTA DE SIMPSON

- Los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto arbitrario de una circunferencia a los lados de un triángulo inscrito en esta última, se encuentran en una misma línea recta.



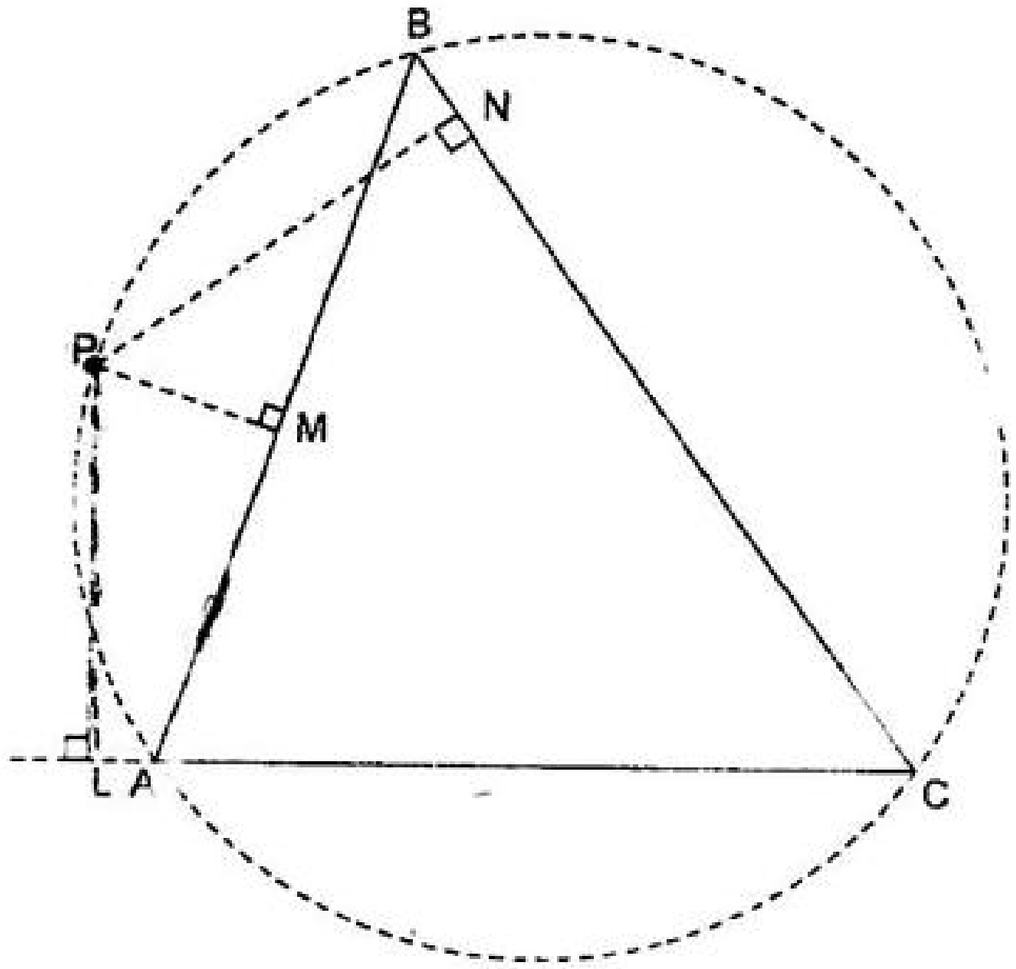
L, M y N: son fuentes colineales

DEMOSTRACIÓN

Paso Nº 1:

Sea "P" el punto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y PL, PM y PN las perpendiculares

Demostremos que los puntos L, M y N están en línea recta (Recta de Simpson).



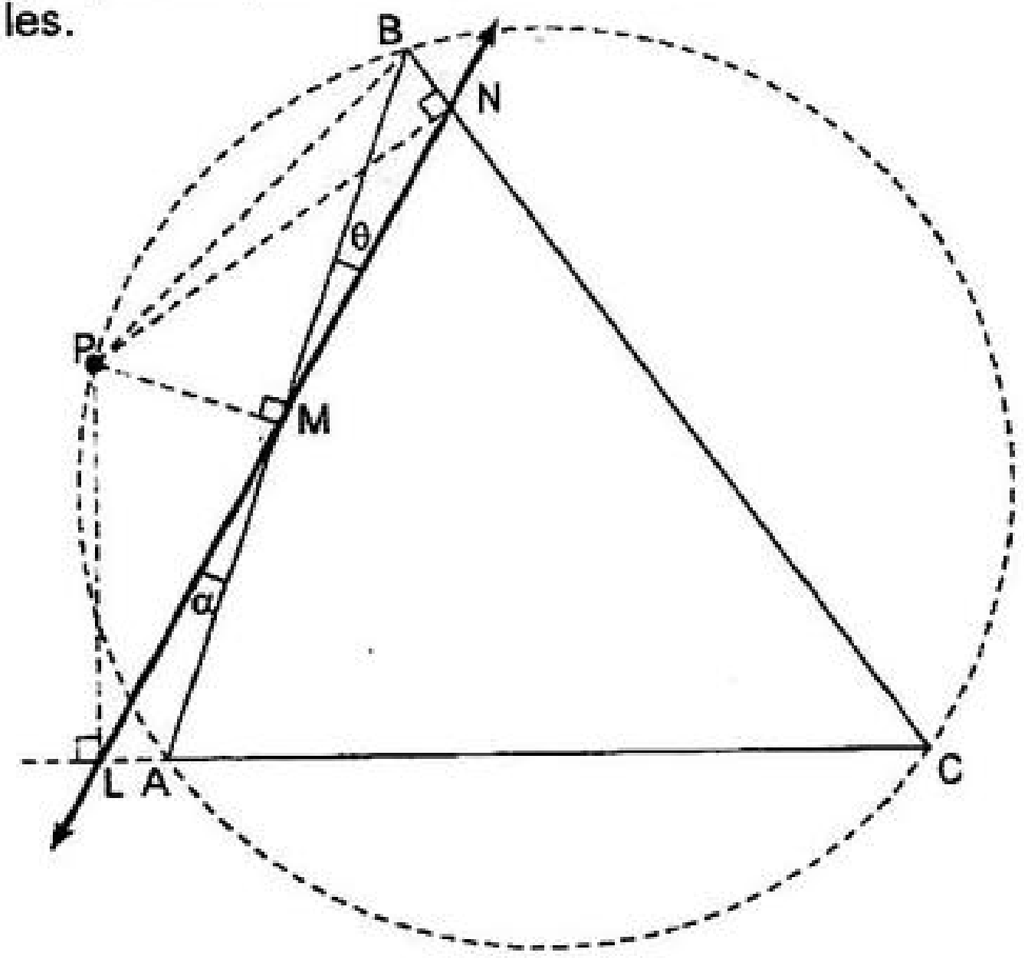
PROPIEDADES

1	La distancia de un vertice al ortocentro es el duplo de la distancia del circuncentro al lado opuesto: $\overline{BH} = 2\overline{ON}$.
2	La distancia del ortocentro al baricentro es el duplo de la distancia entre el baricentro y el circuncentro: $\overline{HG} = 2\overline{GO}$
3	Los cuatro puntos notables que descanzan en la recta de Euler forman una cuaterna armónica: $$\frac{HF}{FG} = \frac{HO}{GO}$$

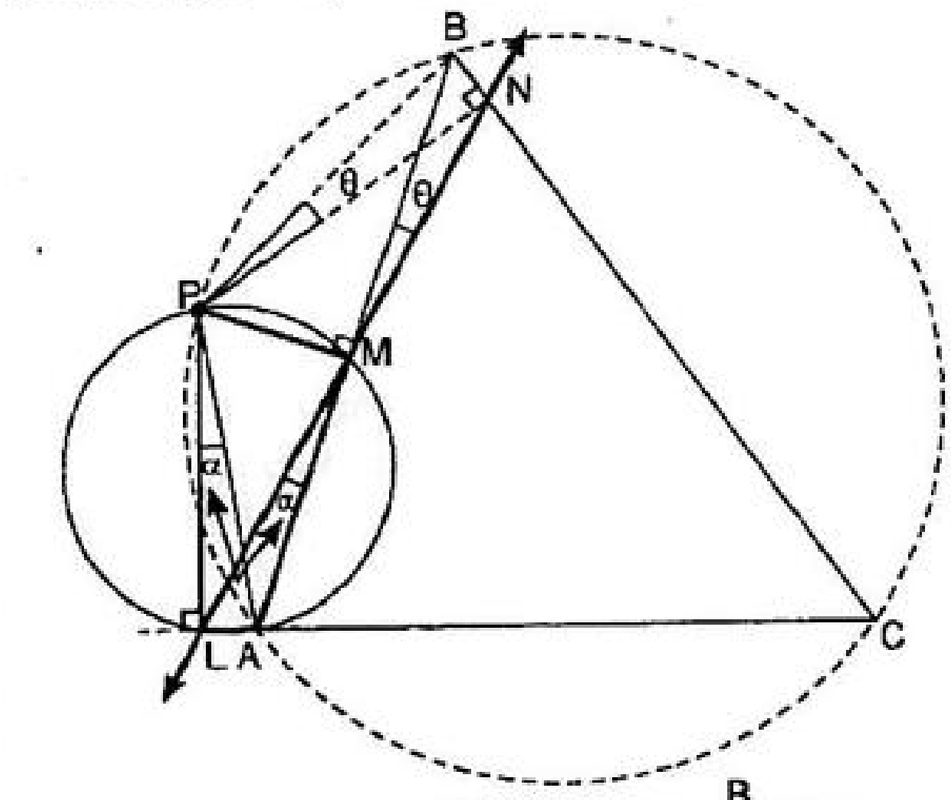
Scanned by CamScanner

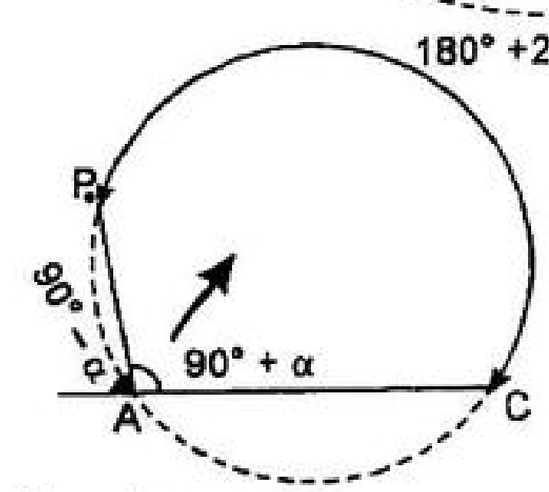
Paso Nº 2:

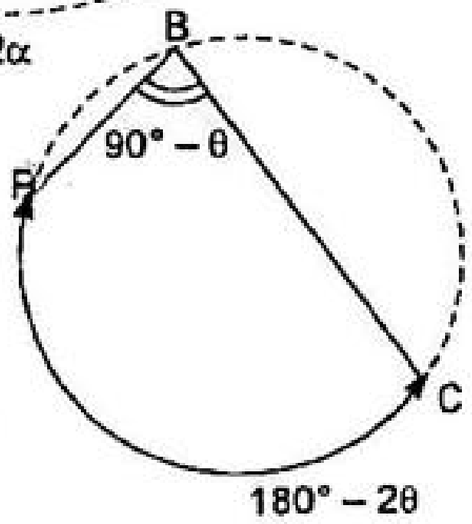
Para verificar que L, M y N están alineados, habrá que probar que los ángulos BMN y LMA son iguales.



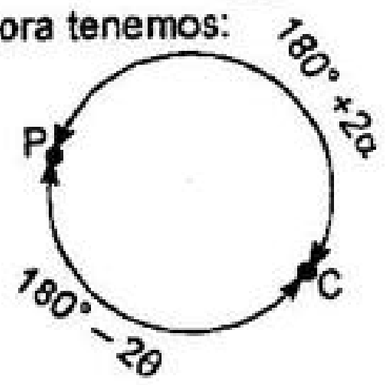
Se observa que los cuadriláteros LPMA y PMNB son inscriptibles, entonces, se cumple:







Ahora tenemos:



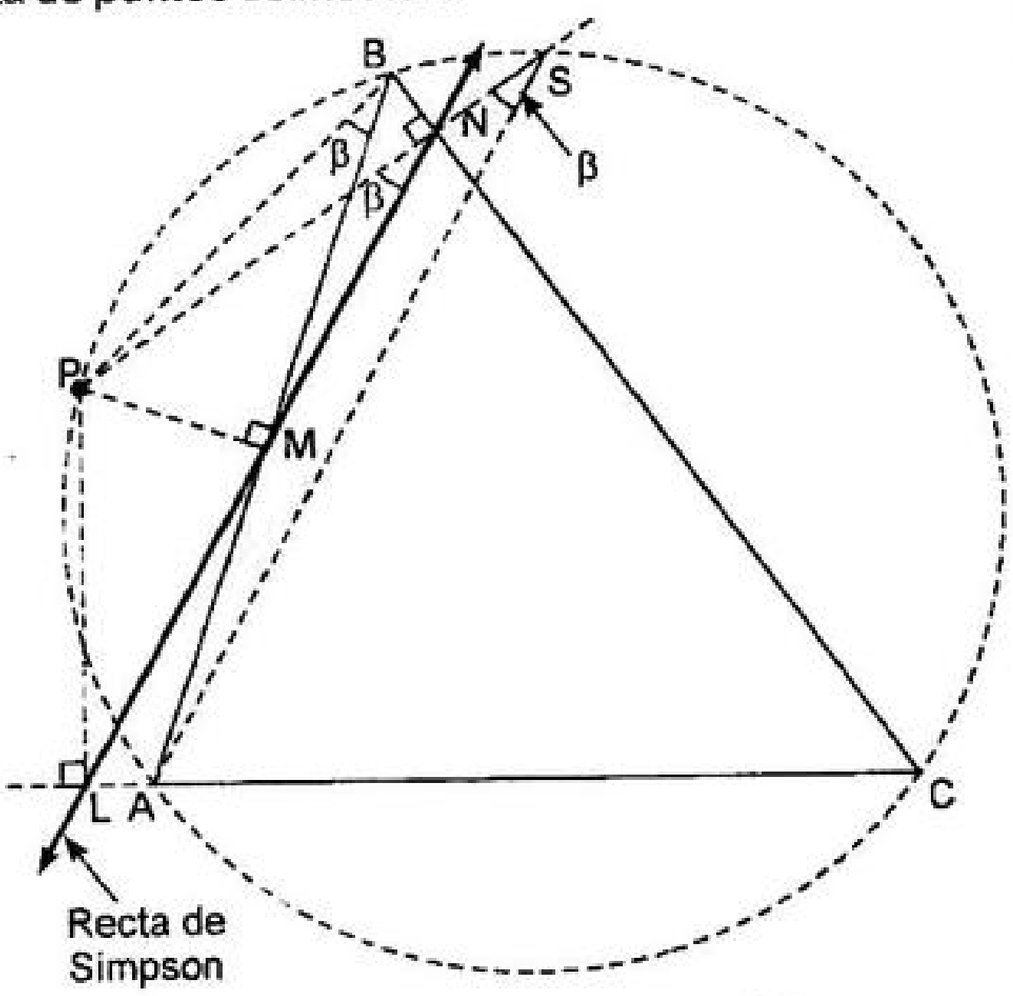
De la figura se cumple:

$180° + 2\alpha + 180° - 2\theta = 360°$

$\alpha = \theta$

Paso Nº 3:

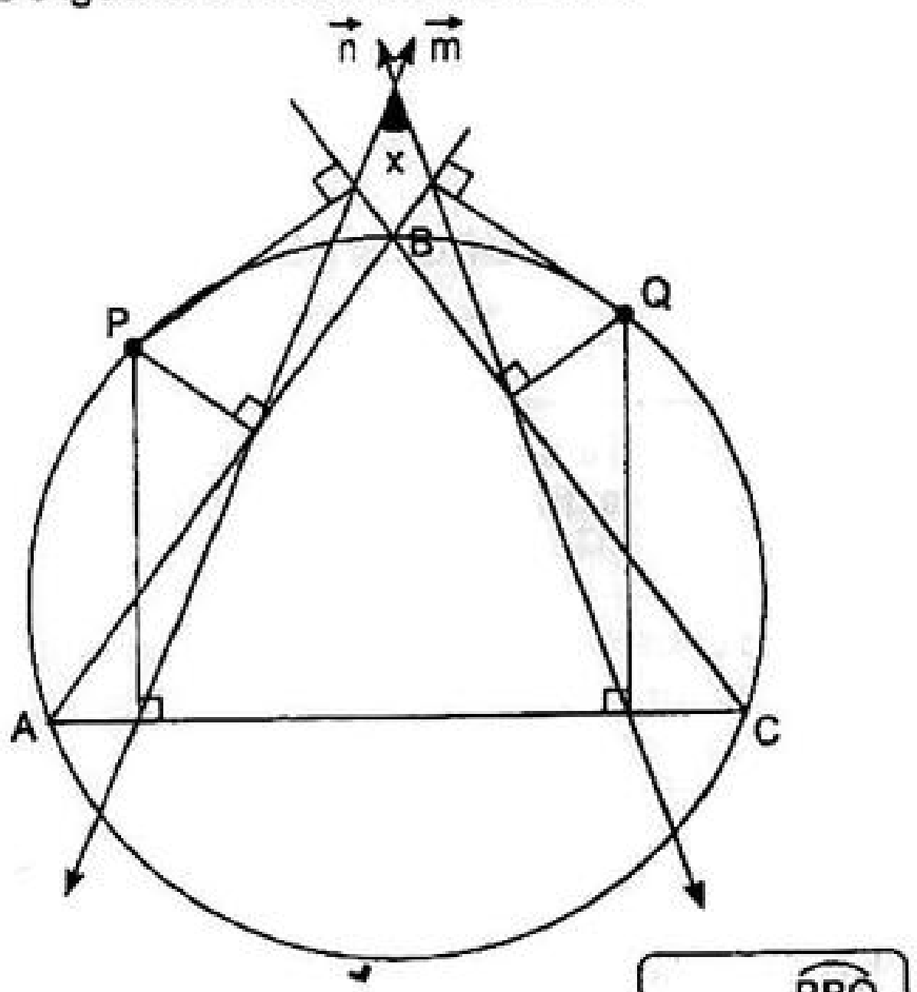
Se obtuvo que los ángulos: $m\sphericalangle LMA = m\sphericalangle BMN$, entonces los puntos L, M y N pertenecen a una recta de puntos colineales.



NOTA: Si $\overline{PM}$ se prolonga hasta "S"; $\overline{SA}$ será paralela a la recta de Simpson, ya que los ángulos PNL y PSA son iguales al ángulo PBM.

ÁNGULO ENTRE LAS RECTAS DE SIMPSON

Dado el triángulo ABC inscrito en la circunferencia se trazan las rectas de Simpson desde los puntos P y Q. El ángulo que forman dichas rectas es constante e igual a la mitad del arco $\overset{\frown}{PBQ}$.



Se cumple: $x = m\dfrac{\overset{\frown}{PBQ}}{2}$

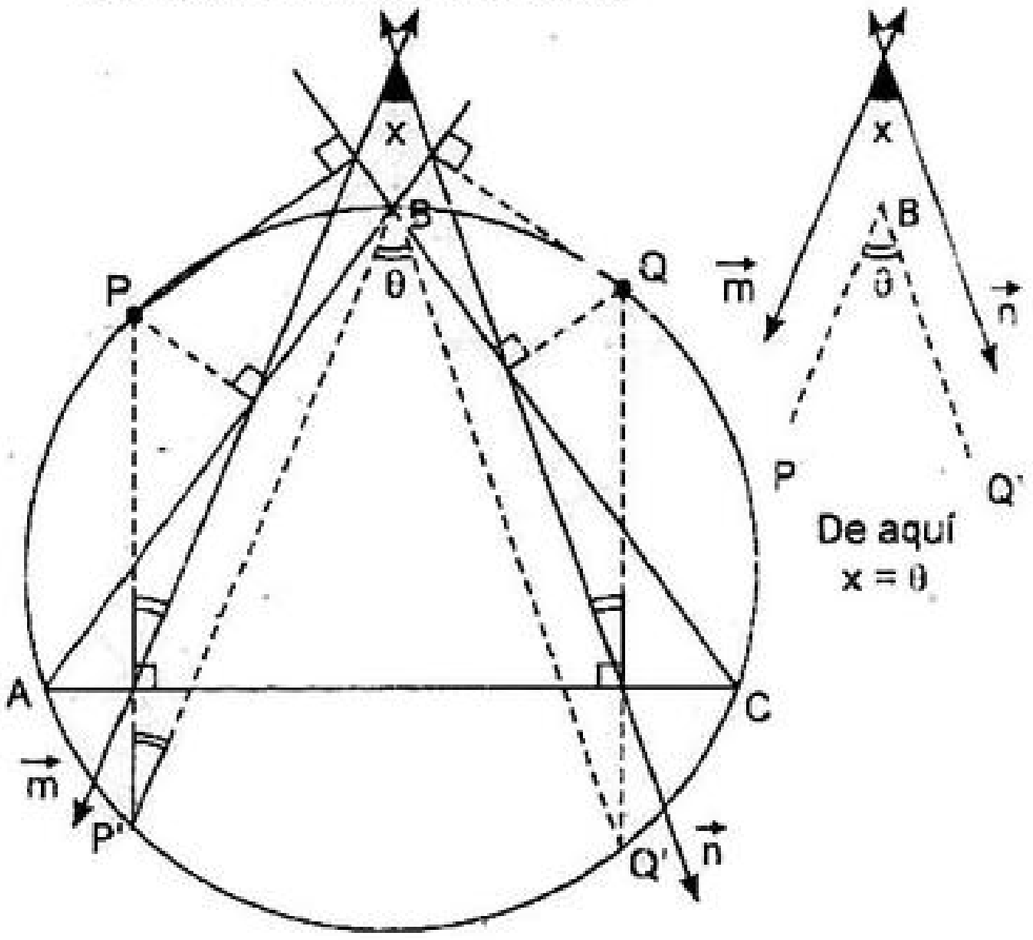
Scanned by CamScanner

Demostración:
Sea "x" el ángulo formado por $\vec{m}$ y $\vec{n}$, rectas de Simpson,
Demostraremos que:

$$x = \frac{\overset{\frown}{PBQ}}{2}$$

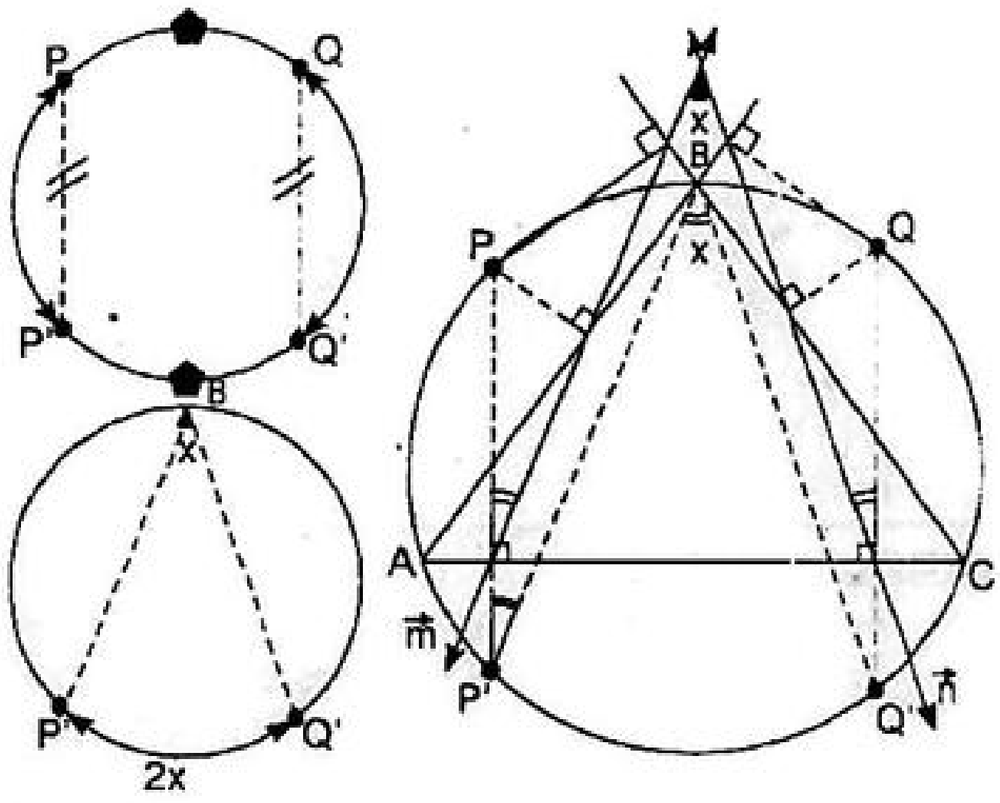
Para ello, se procede como sigue:

- Por la nota del Teorema anterior sabemos que $\overline{BP'}$ es paralela a la recta $\vec{m}$ y $\overline{BQ'}$es paralela a la recta $\vec{n}$, esto hace que el ángulo "x" sea igual al ángulo P'BQ' (por ser ángulos de lados paralelos).



Se observa que: $\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$ entonces por propiedad en la circunferencia, los arcos

$$\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{P'Q'}$$



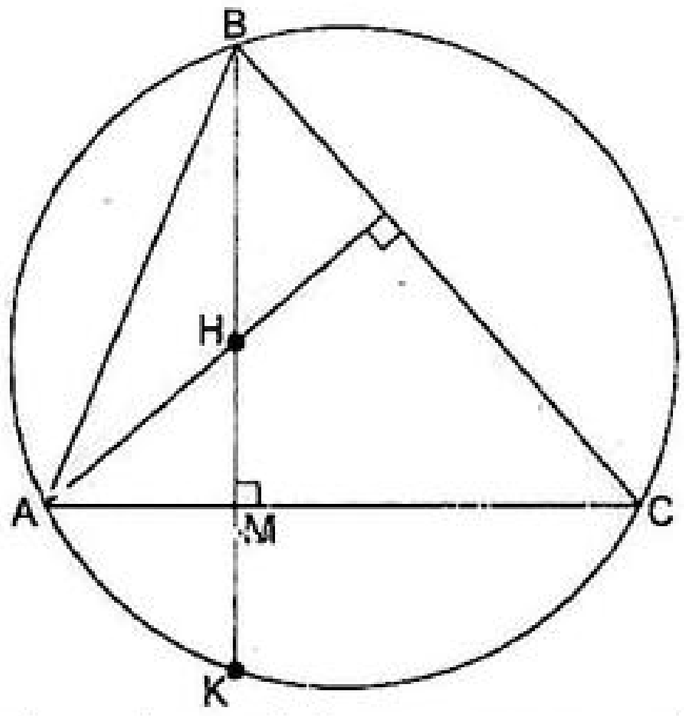
De aquí se cumple:

ángulo $x = m\sphericalangle P'BQ' = m\sphericalangle PBQ = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{m\overset{\frown}{PBQ}}{2}}$

Nota. Cuando los puntos P y Q son los extremos, de un diámetro, el ángulo x será de 90 °.

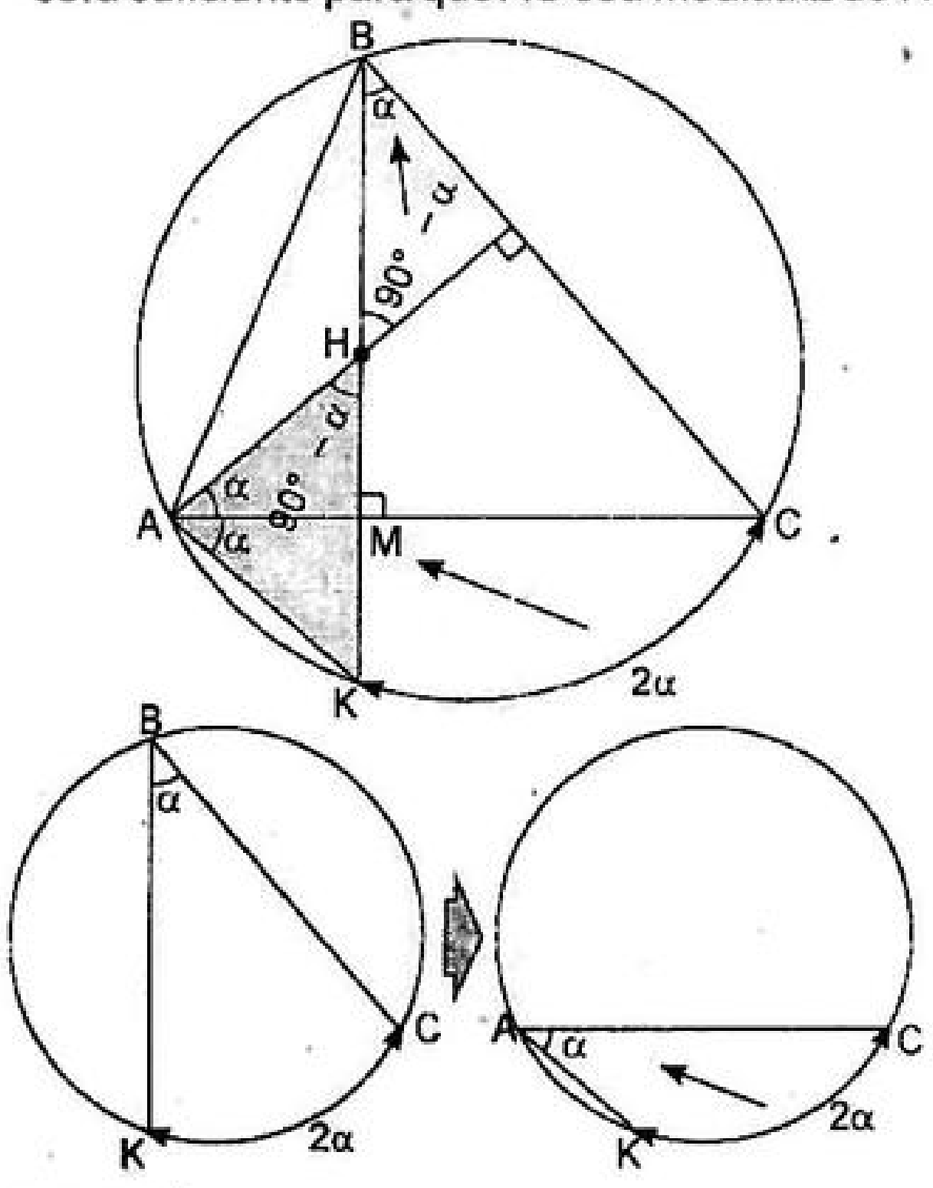
TEOREMA

La altura BM de un triángulo ABC, corta a $\overline{AC}$ en M y a la circunferencia circunscrita en "K". Demostrar que AC es mediatriz del segmento HK (H es el ortocentro).

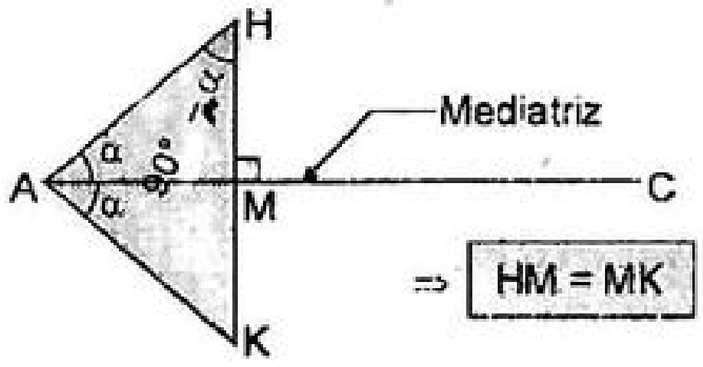


- Para demostrar este teorema, se procede como sigue:

  Sea "BM" la altura del triángulo ABC y "H" el ortocentro. Demostremos que HM = MK; ello será suficiente para que AC sea mediatriz de HK.



Luego se observa:

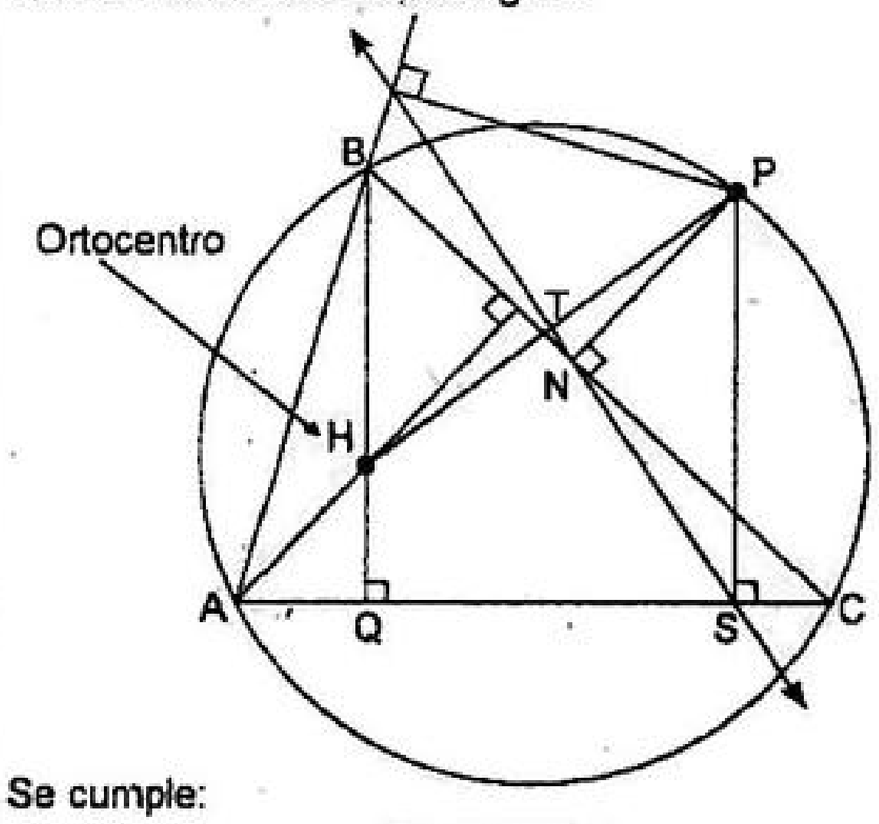


$\Rightarrow \boxed{HM = MK}$

Scanned by CamScanner

TEOREMA

La recta de Simpson de un punto "P" con respecto a un triángulo dado, biseca el segmento que une "P" con el ortocentro del triángulo.



Se cumple:

HT = TP

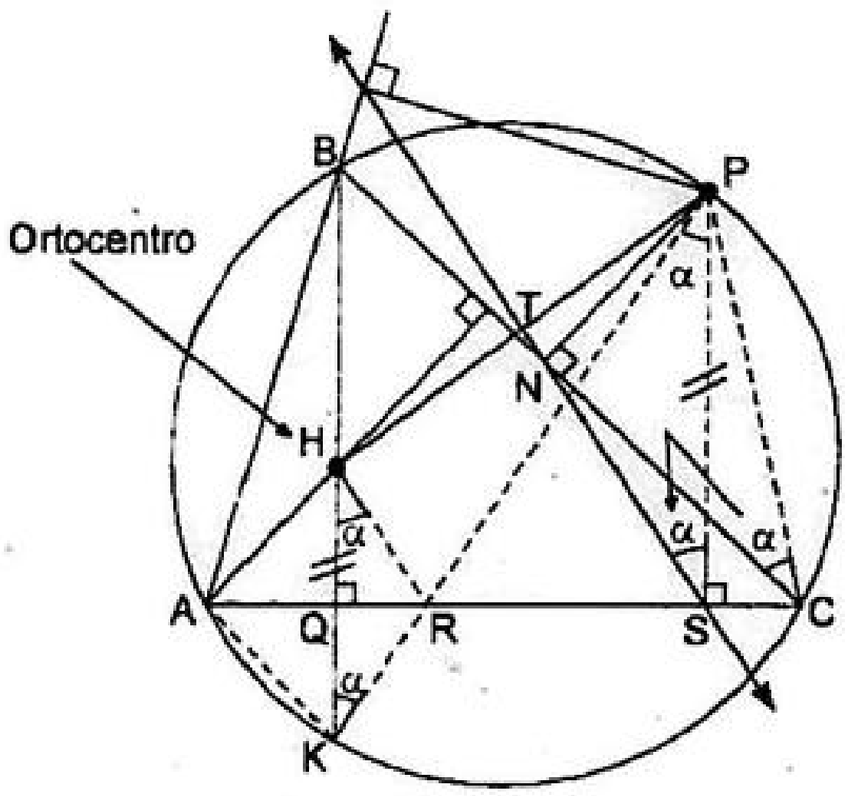
DEMOSTRACIÓN

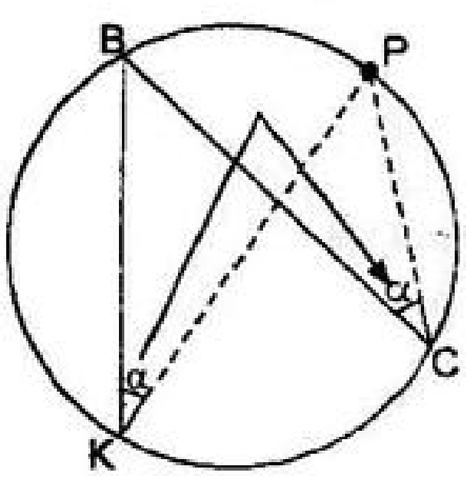
Prolongamos la altura BQ hasta "K", se tiene que PK corta a AC en "R", pero AC es la mediatriz de HK (Teorema anterior), entonces el triángulo HRK es isósceles y como BK es paralela a PS se tiene:

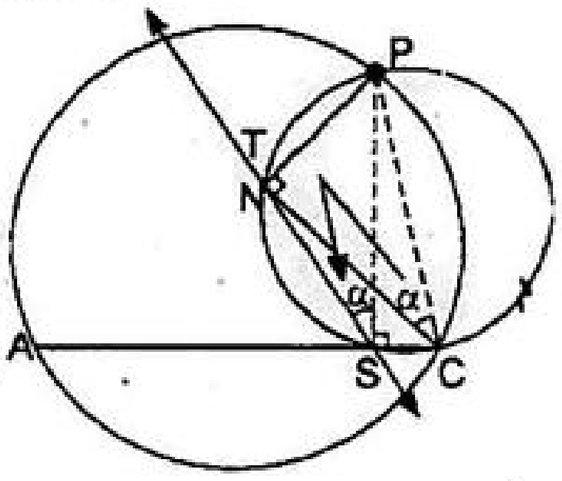
$$m\sphericalangle BKP = m\sphericalangle KHR = m\sphericalangle KPS \quad \ldots\ldots (1)$$

También:

$$m\sphericalangle BKP = m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle NSP \quad \ldots\ldots (2)$$

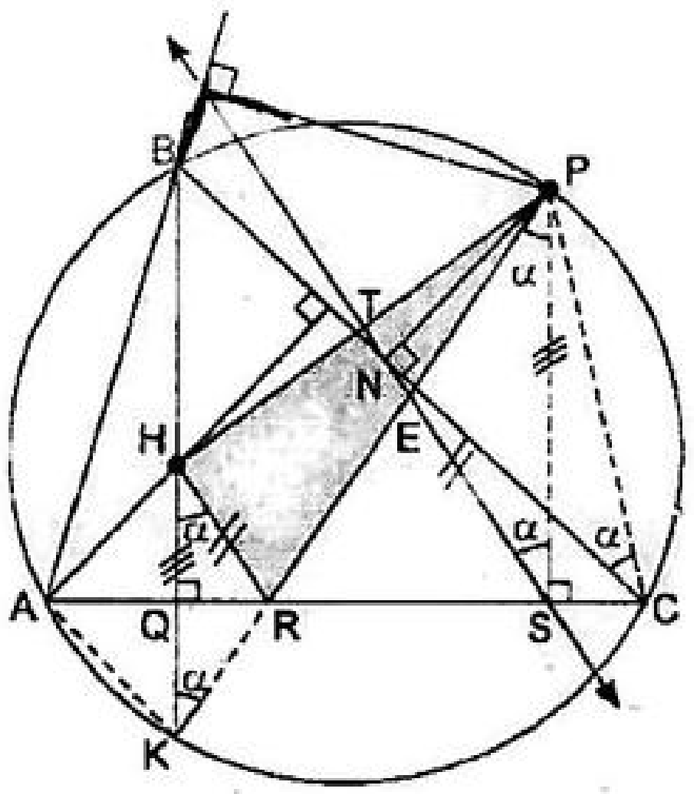




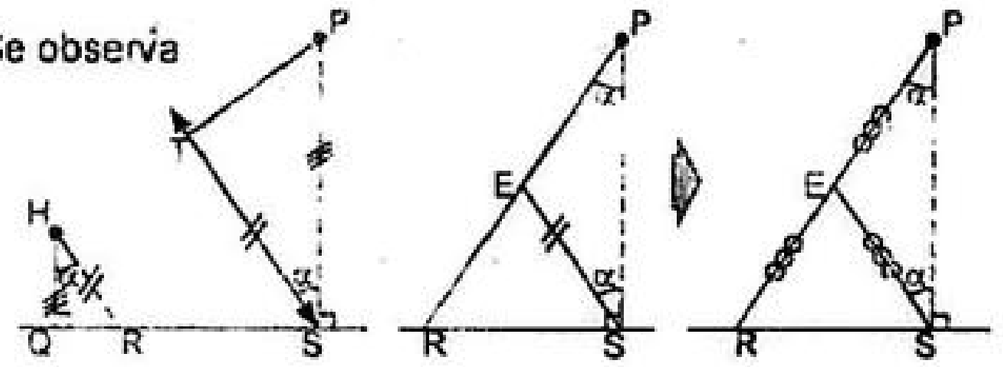


De (1) y (2) se deduce que los ángulos KPS y NSP son iguales, ello hace que "E" sea punto medio de la hipotenusa PR del triángulo rectángulo PSR.

También se deduce que $\overline{HR}$ es paralela a $\overline{TS}$ (porque: $m\sphericalangle RHK = m\sphericalangle NSP$ son iguales por alternos internos)



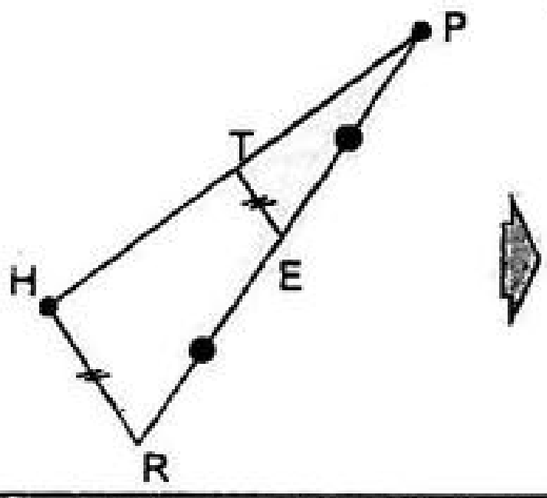
Se observa



Ahora observamos en el triángulo PHR; $\overline{TE}$ es paralela a $\overline{HR}$, también $\overline{RE} = \overline{EP}$.

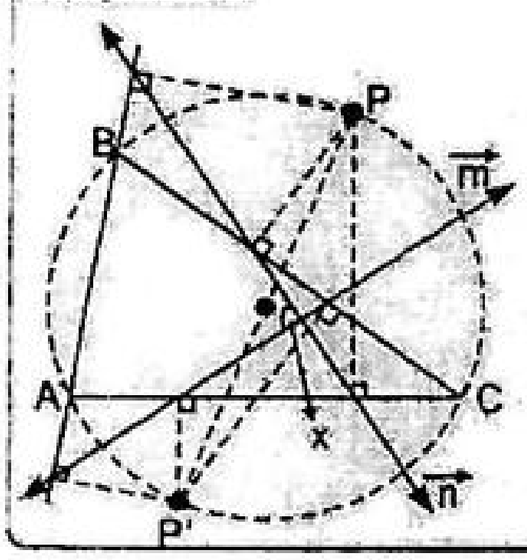
$\Rightarrow$ es la base media del $\triangle PHR$

$\therefore$ T es punto medio de HP



HT = TP

Propiedad:



Como P y P' son extremos del diámetro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$

$$\Rightarrow x = \frac{\overset{\frown}{mPCP'}}{2} = \frac{180°}{2}$$

$$\therefore x = 90°$$

Scanned by CamScanner

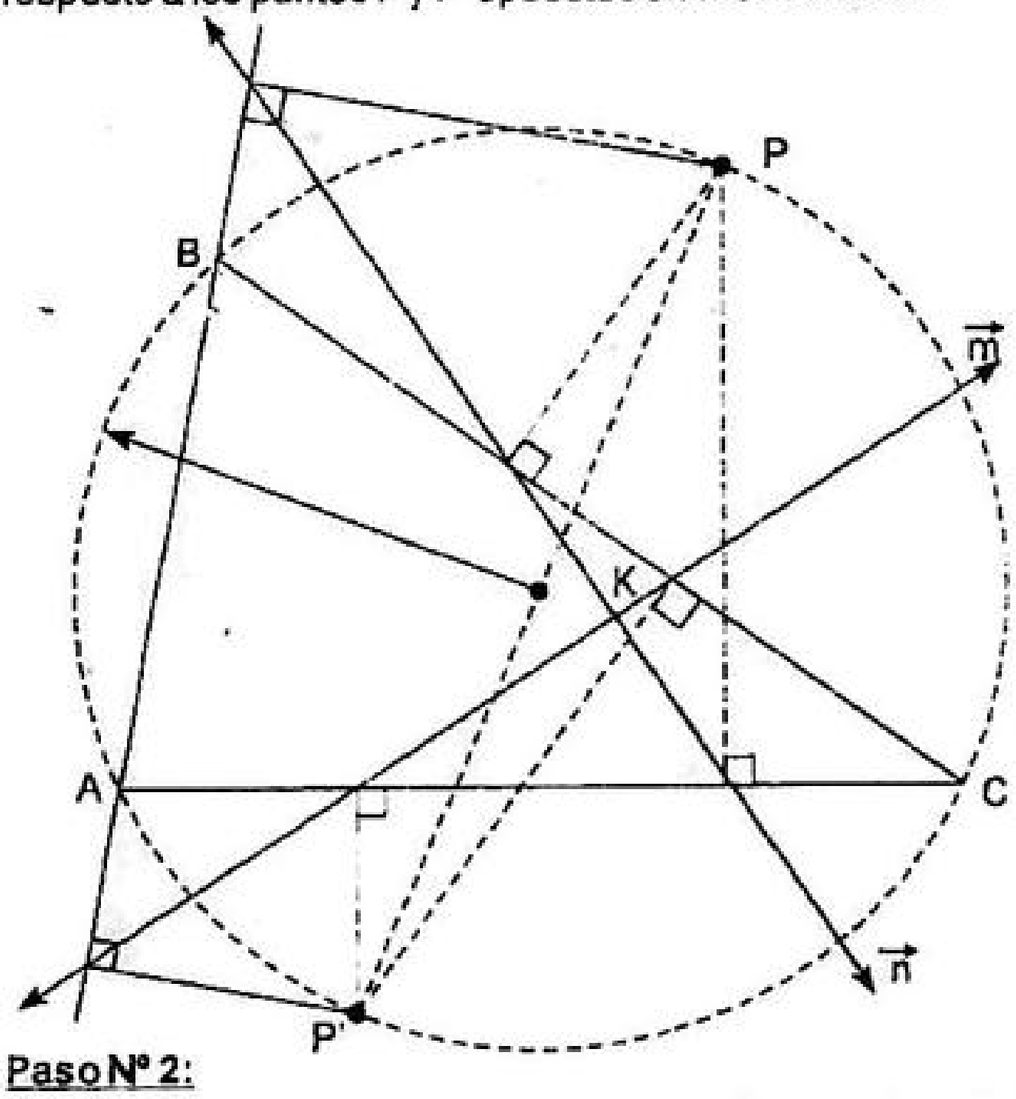
LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS Y LAS RECTAS DE SIMPSON

- La circunferencia de los nueve puntos está formado por las intersecciones de los pares de rectas de Simpson, correspondiente a los puntos P y P' opuesto diametralmente en la circunferencia al triángulo ABC

DEMOSTRACIÓN

Paso N° 1:

Sean "M" y "N" las rectas de Simpson trazados con respecto a los puntos P y P' opuestos diametralmente.



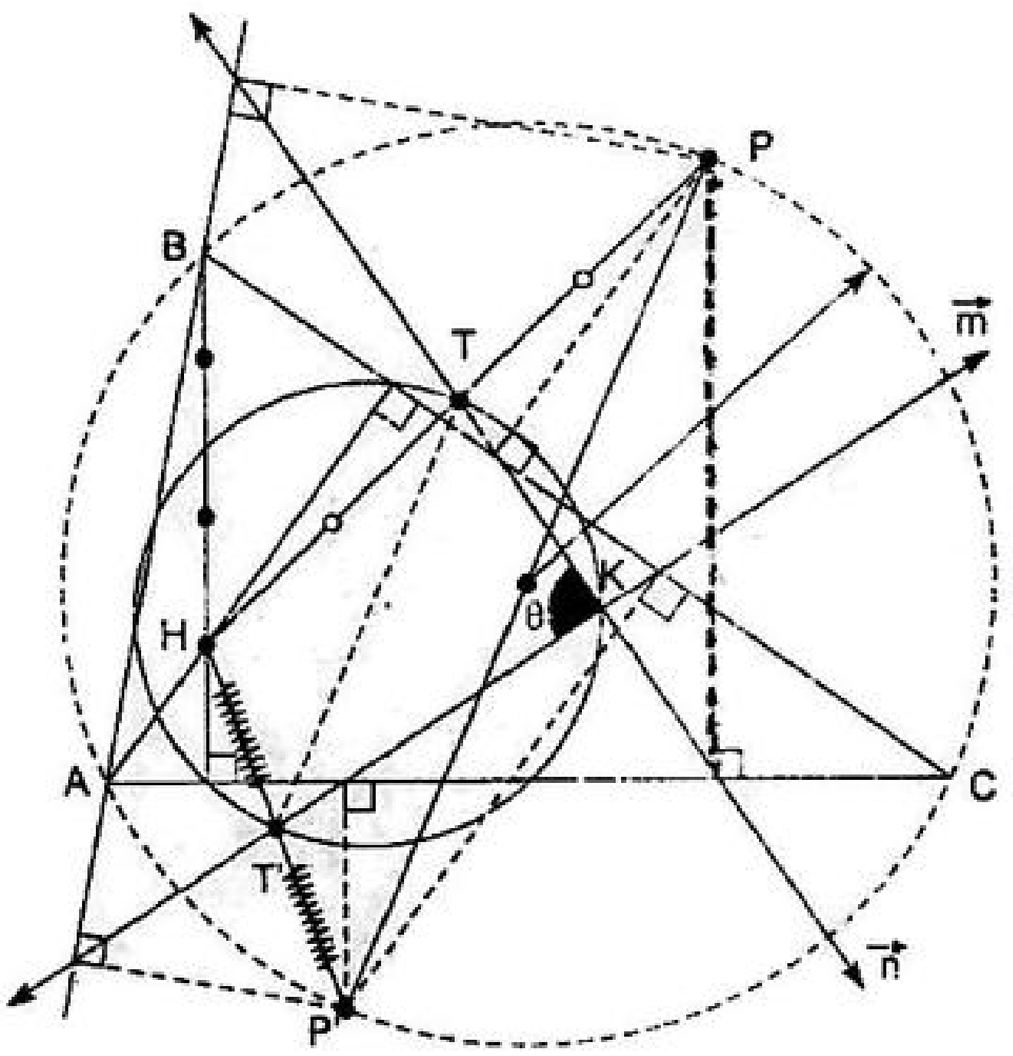
Paso N° 2:

Empleando el teorema anterior que las rectas de Simpson, bisecan a los segmentos que une el ortocentro con cada uno de los puntos P y P' es decir:

PT = TH y P'T' = T'H, luego el $\overline{T'T}$ es base media del triángulo PHP'

Paso N° 3:

Por tanto TT' es la mitad del diámetro PP', por lo tanto TT' será el diámetro de la circunferencia de los nueve puntos.



Paso N° 4:

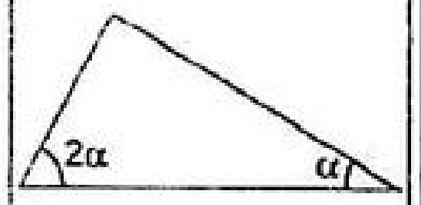
Ahora se observa que las rectas $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares (0 = 90°). Por el teorema anterior, donde se demuestra que las rectas de Simpson $\vec{m}$ y $\vec{n}$, se cortan formando un ángulo constante e igual a la mitad del arco $\widehat{PP'}$ entonces el triángulo TT'K será rectángulo en K. Por tanto la circunferencia de los nueve puntos pasará por los puntos T, K, T'.

Scanned by CamScanner

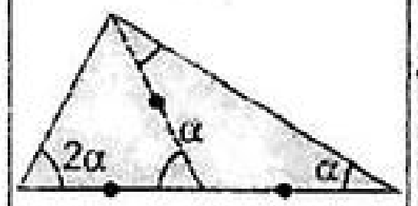
Scanned by CamScanner

CONSTRUCCIONES EN TRIÁNGULOS
(MÉTODOS)

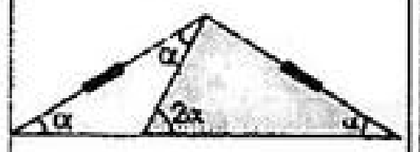
1ERO — Trazo de la Ceviana



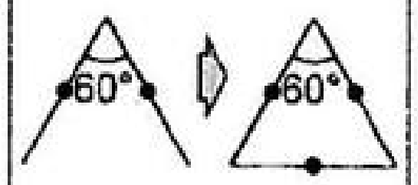
Se hace

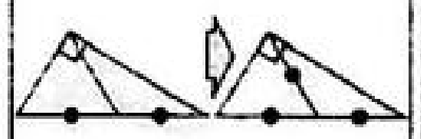


También

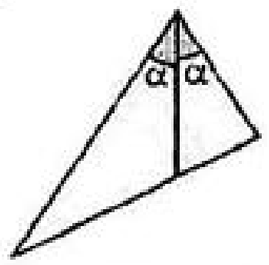


Tener presente aqui:

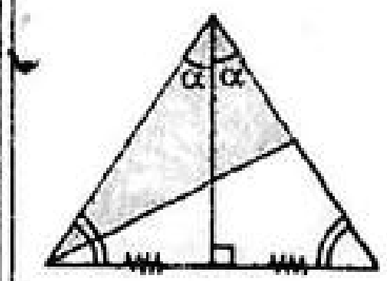




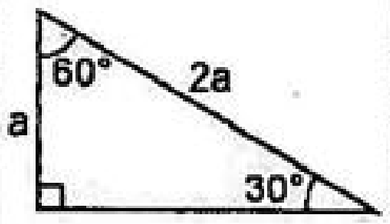
2DO — Completando un Triángulo isósceles



Se hace



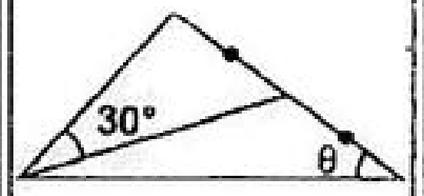
Tener presente.



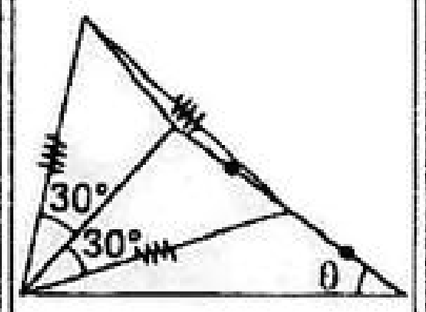
$a\sqrt{3}$

Y todos los triángulos notables

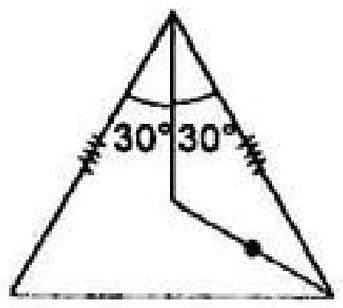
3ERO — Completando un Triángulo equilátero



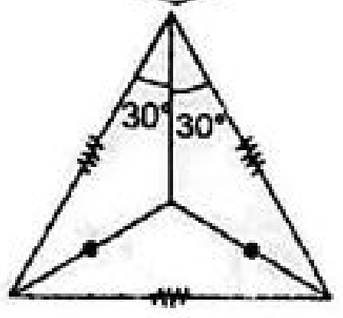
Se hace



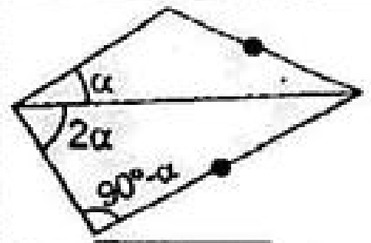
Tener presente



Se hace

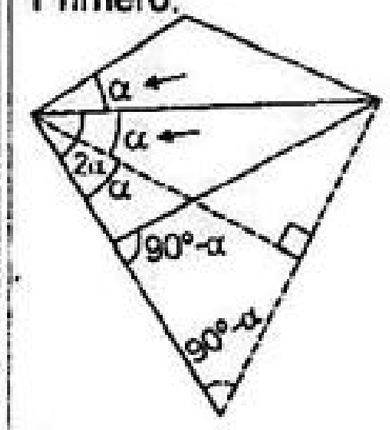


4TO — Trazo de la Bisectriz

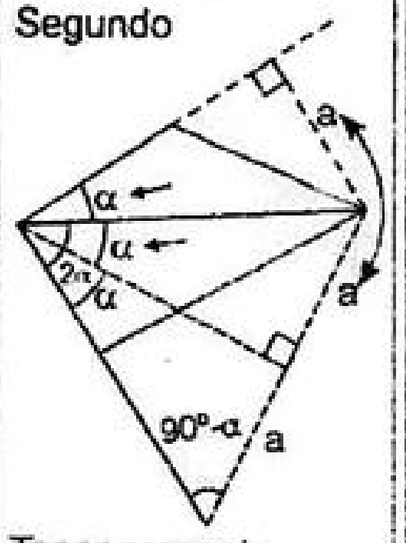


Se hace

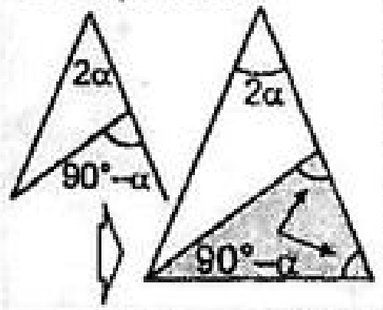
Primero:



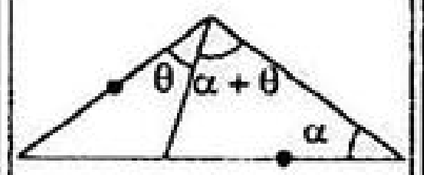
Segundo



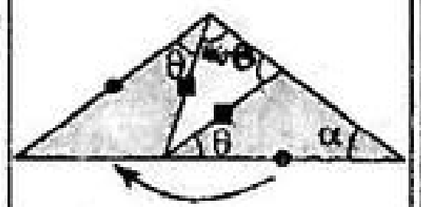
Tener presente



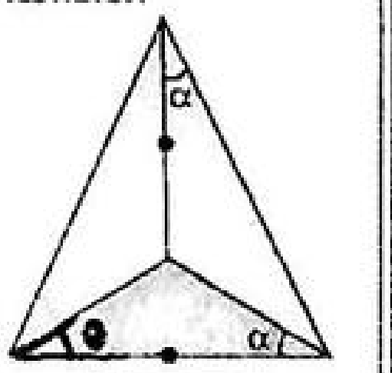
5TO — Buscando Congruencia



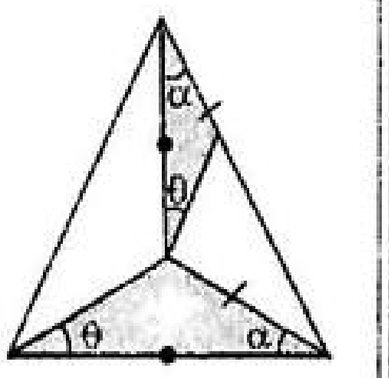
Se hace



También

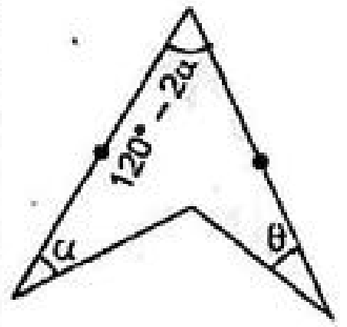


Se hace

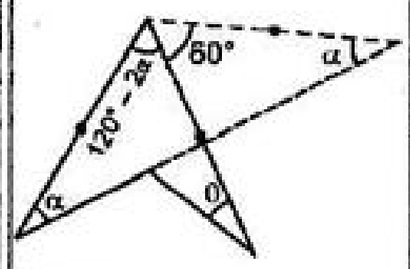


Tener presente los casos de congruencia

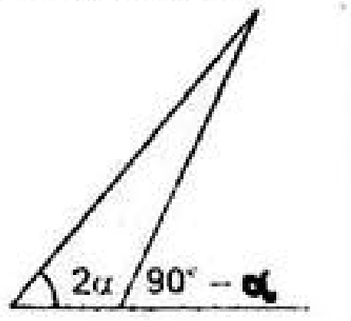
6TO — Espejo

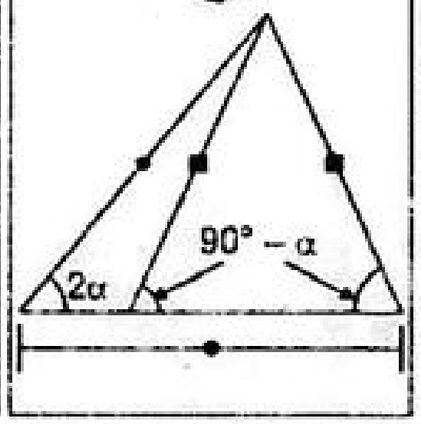


Se hace



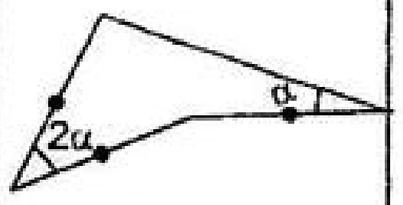
Tener presente:

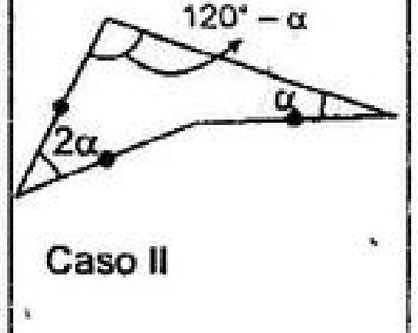




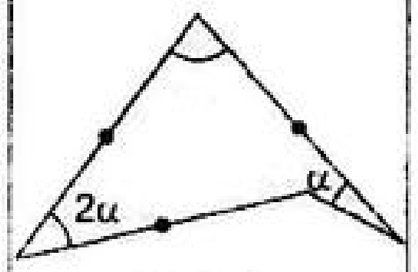
7MO — Buscando Cuadriláteros Cóncavos

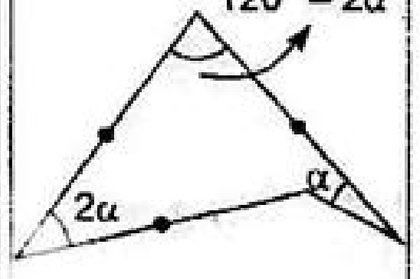
Caso I





Caso II





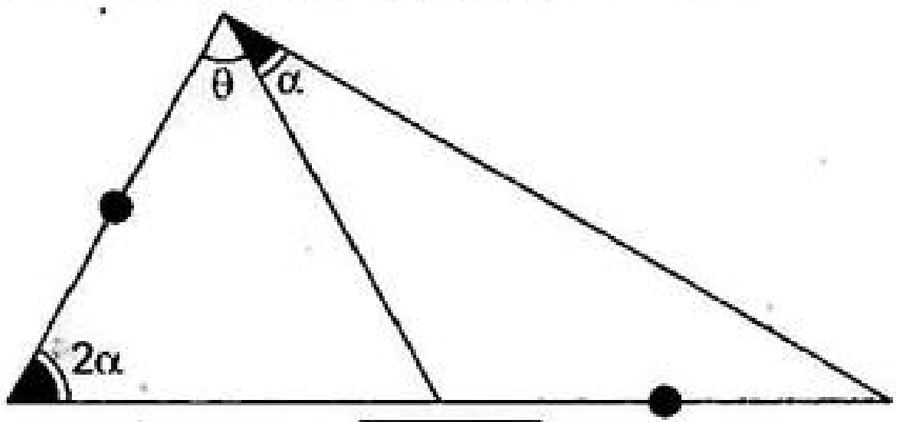
He aquí la matemática, la creación más original del ingenio humano (Whitehead)

CRITERIOS DE CONSTRUCCIÓN

8vo Criterio: "BUSCANDO CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES"

CASO I

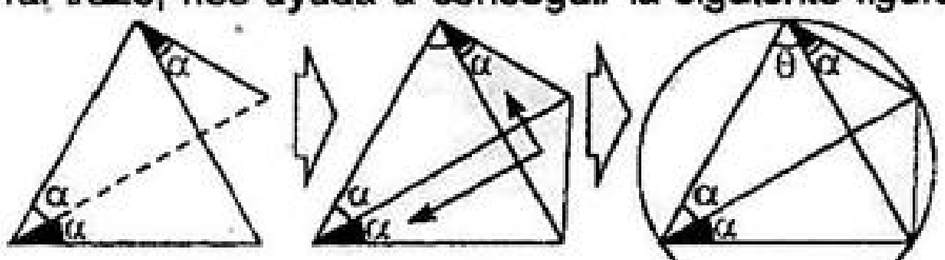
Si se tiene la siguiente figura:



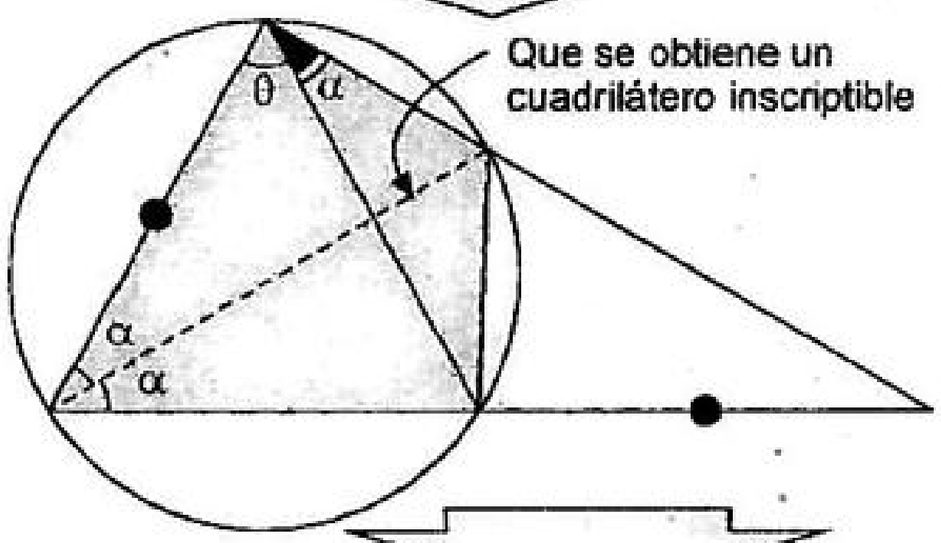
Se hará

Se trazará una ceviana interna (Bisectriz Interior)

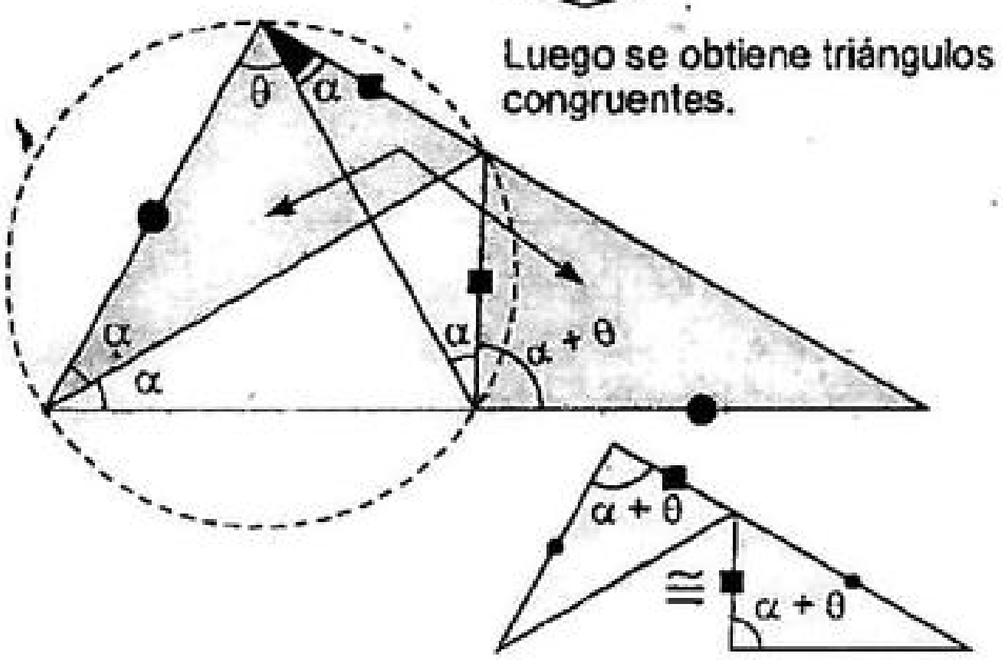
Tal trazo, nos ayuda a conseguir la siguiente figura:



Se cumple



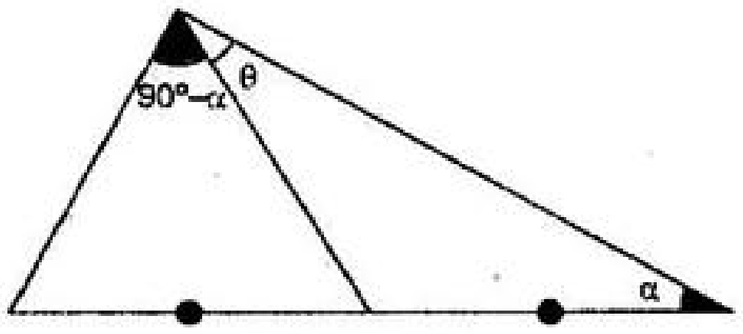
Que se obtiene un cuadrilátero inscriptible



Luego se obtiene triángulos congruentes.

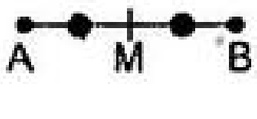
CASO II

Si se observa la siguiente figura con las siguientes características:

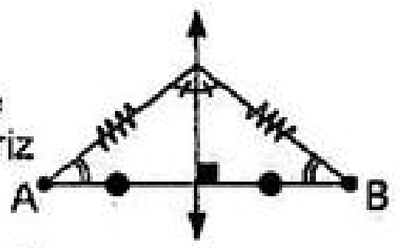


Se hará

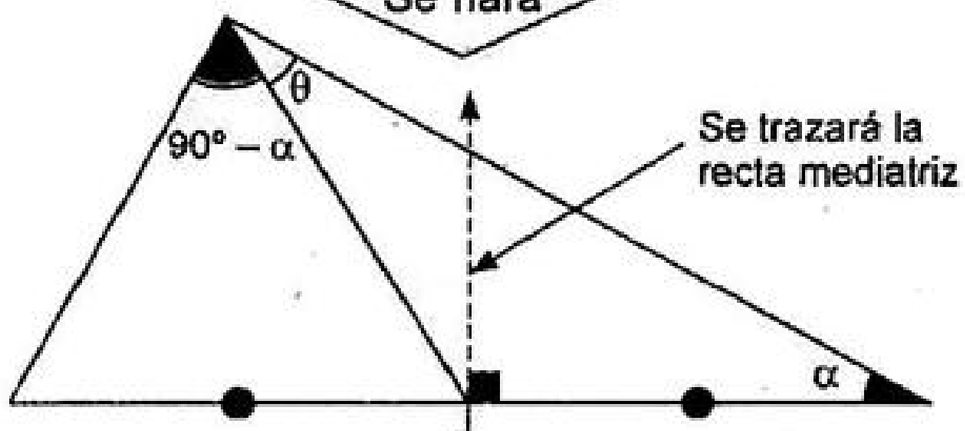
Sabemos



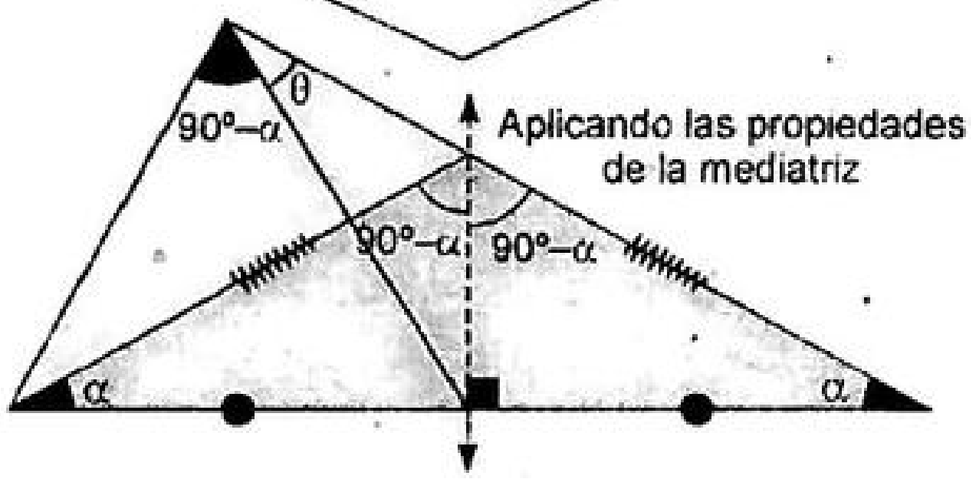
Por "M" se hace pasar la mediatriz



Se hará

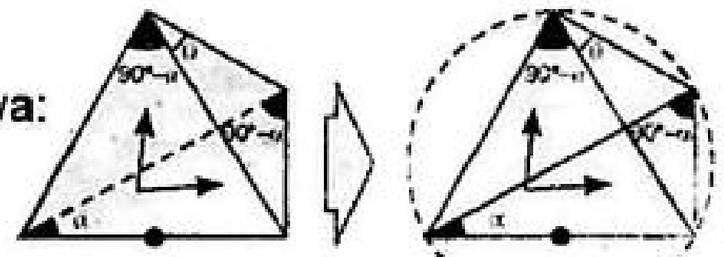


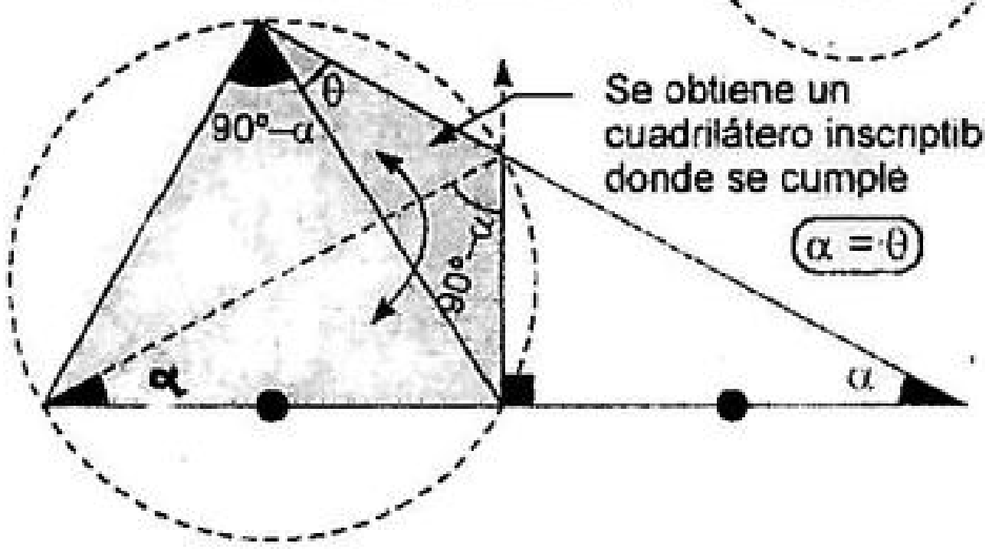
Se trazará la recta mediatriz



Aplicando las propiedades de la mediatriz

Aqui se observa:





Se obtiene un cuadrilátero inscriptible donde se cumple

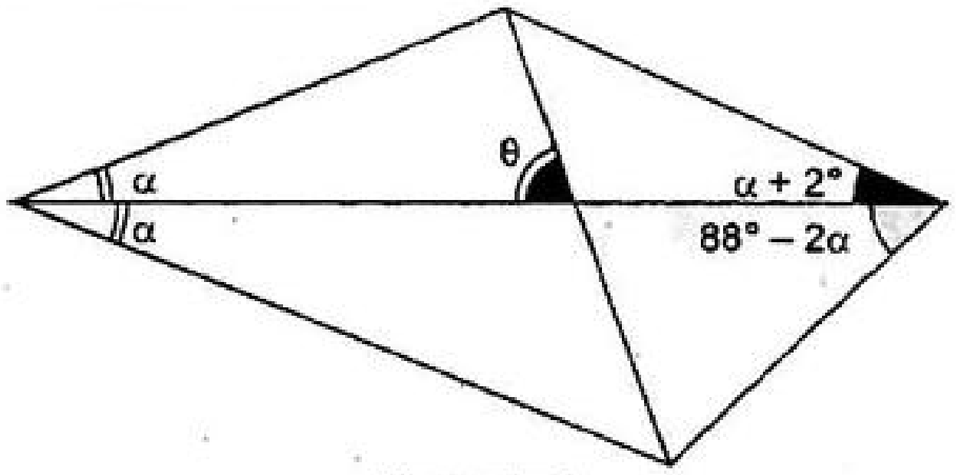
$\alpha = \theta$

De hecho, el exito representa el 1% de un trabajo que resulta del 99% de aquello que se llama fracaso

Scanned by CamScanner

CASO III

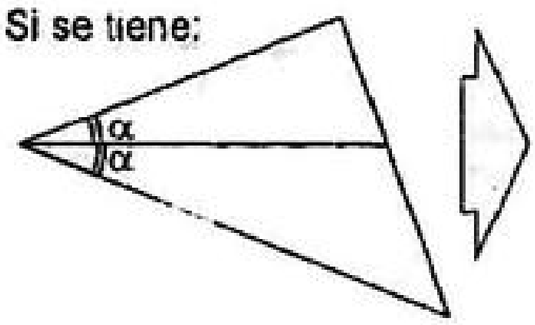
Si se tiene la siguiente figura con tales características



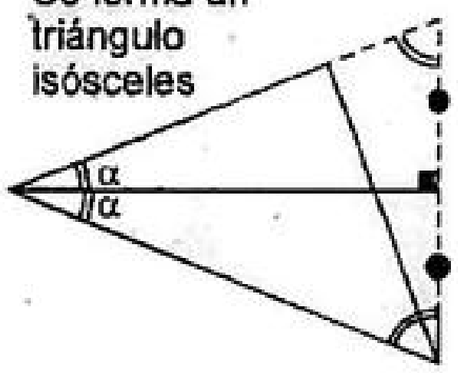
Se hará

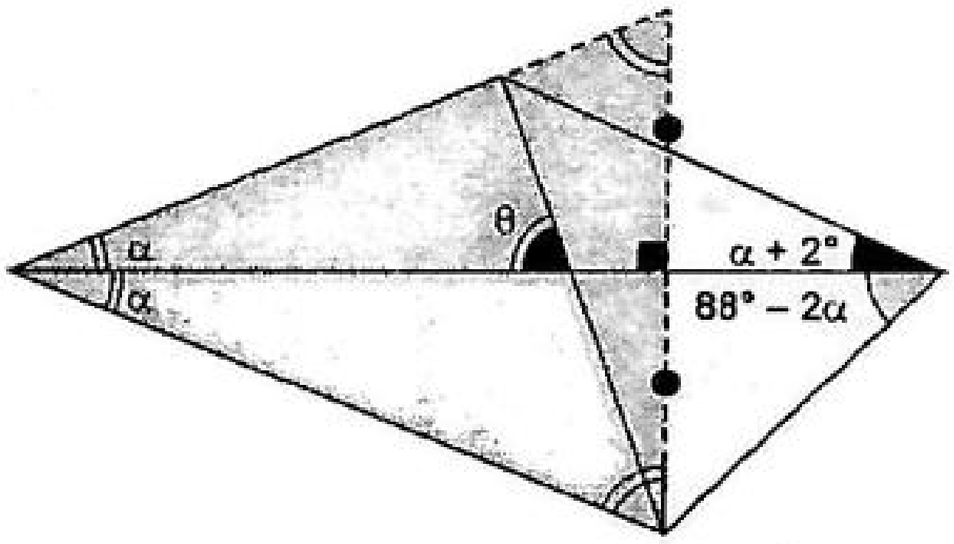
Utilizando el segundo criterio de construcción.

Si se tiene:

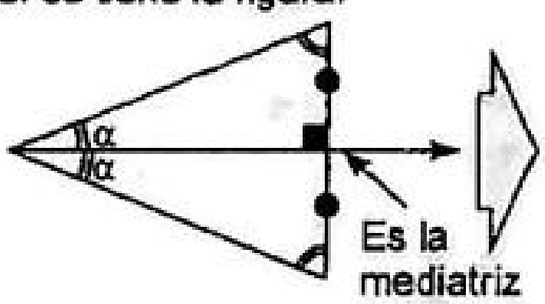


Se forma un triángulo isósceles

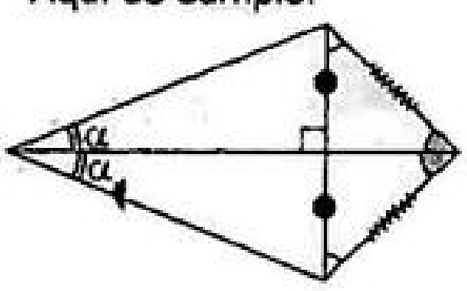


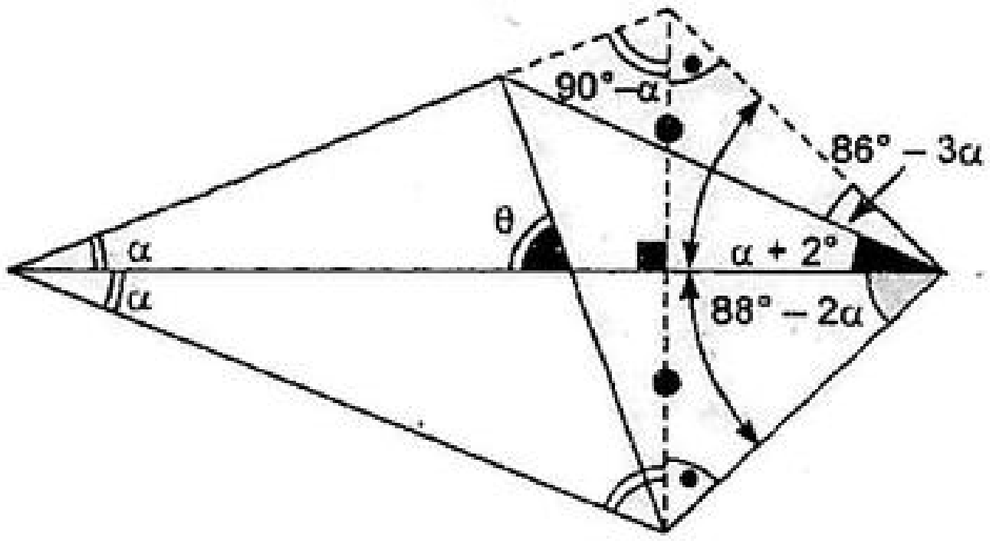


Si se tiene la figura:

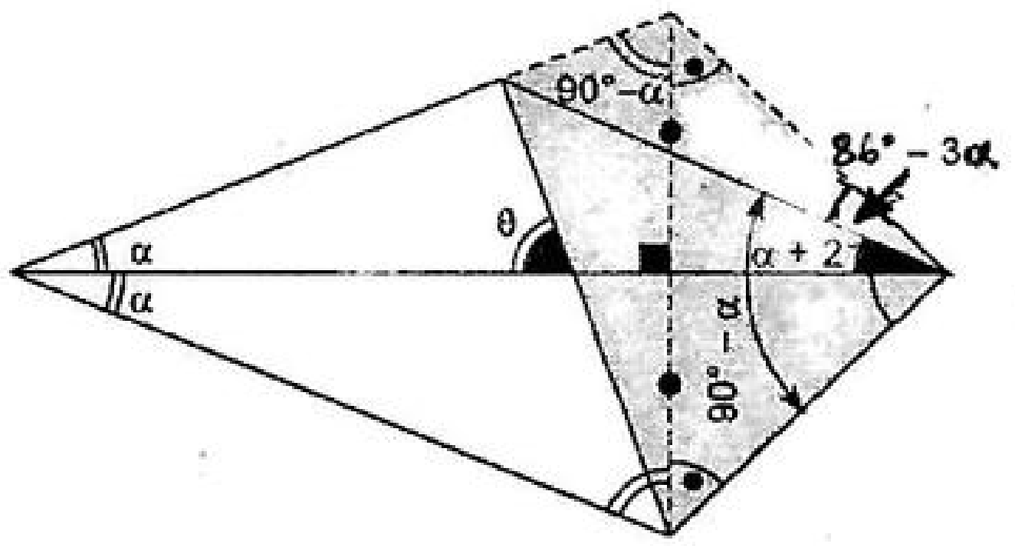


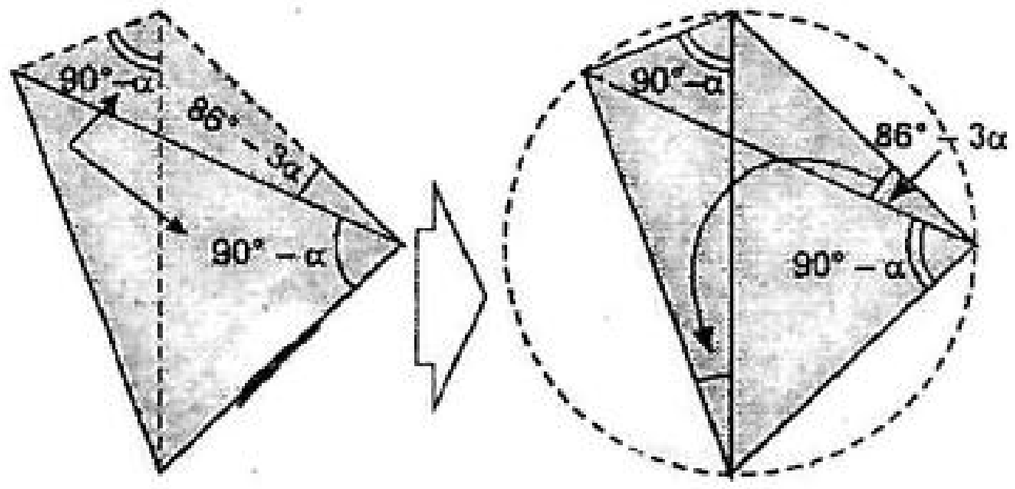
Aquí se cumple:



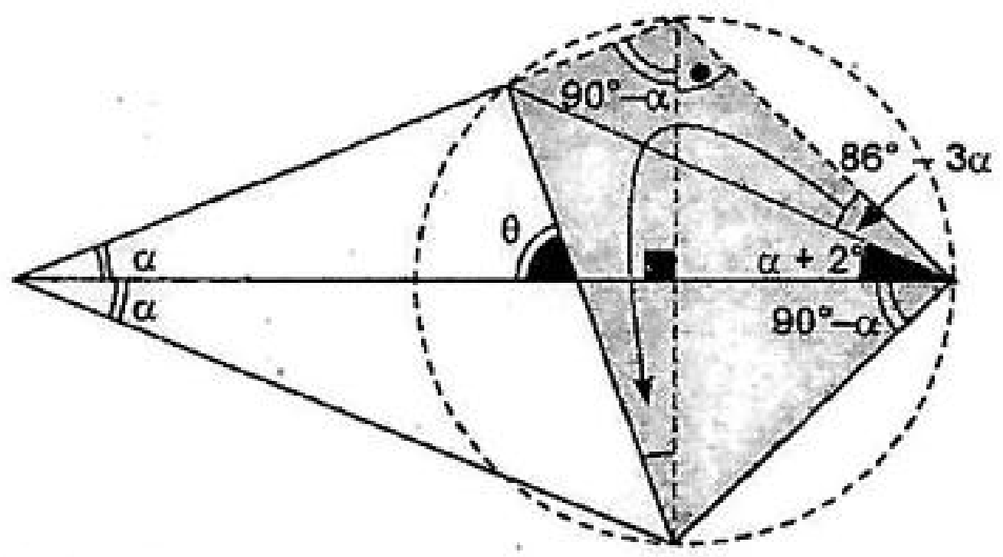


Aquí se obtiene lo siguiente:

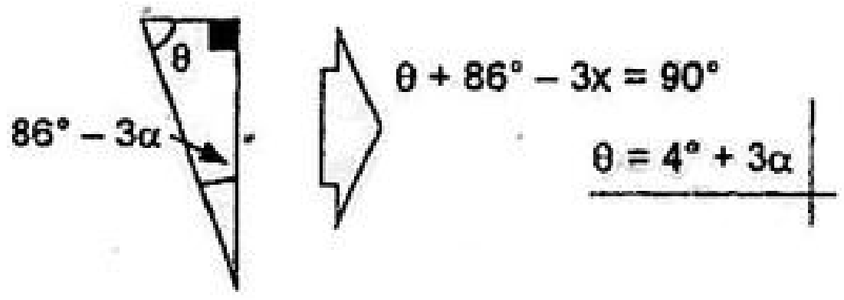




Se hará



Aquí se tiene:



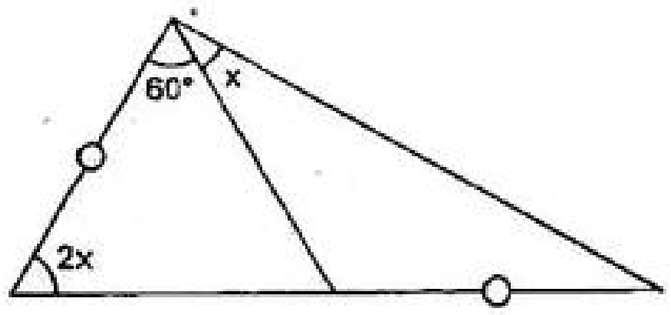
S U G E R E N C I A

Aquí sólo he presentado tres casos empleando trazos auxiliares para encontrar cuadriláteros inscriptibles; luego en los problemas resueltos el estudiante lector encontrará diferentes tipos de trazos auxiliares, pues existe gran variedad de ellos.

Scanned by CamScanner

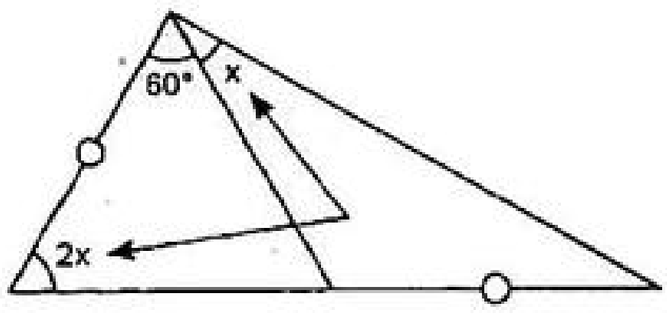
EJEMPLO Nº 01

Calcular "x"

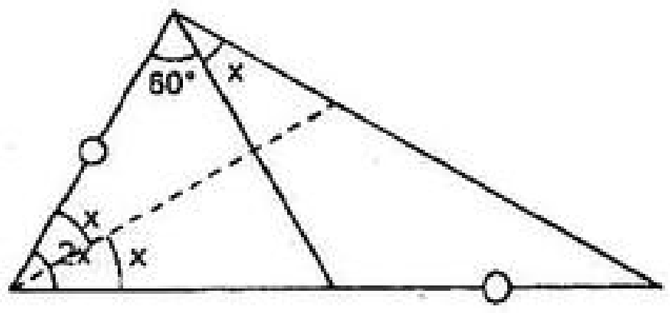


Resolución:

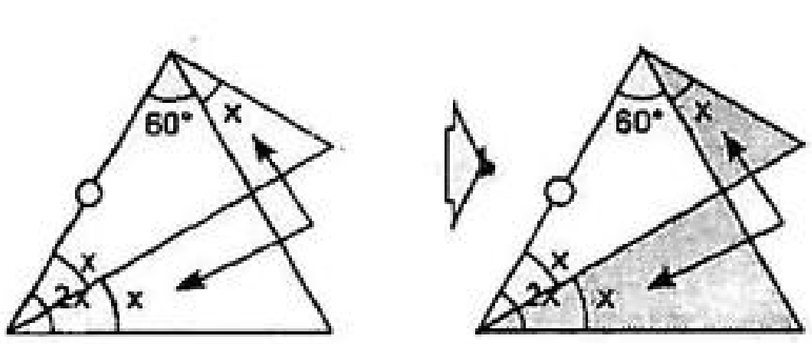
Paso Nº 1: Se observa la figura y se tiene

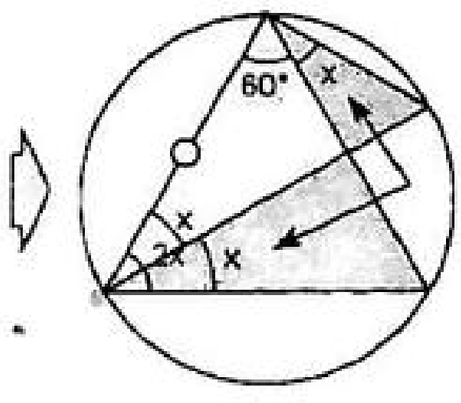


Se trazará una ceviana interna que divida al ángulo de «2x» en partes iguales.

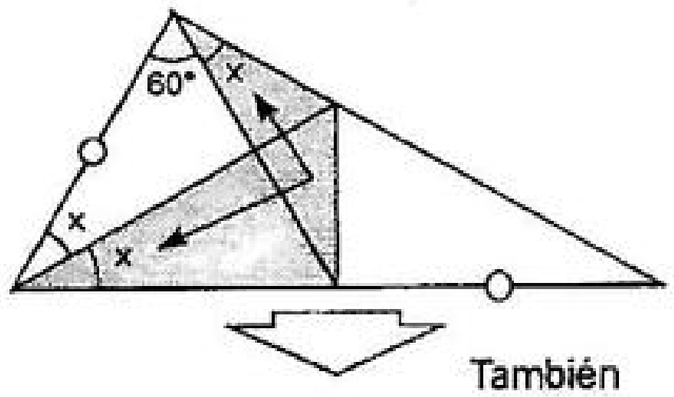


Tal trazo, nos ayuda a tener la siguiente figura:

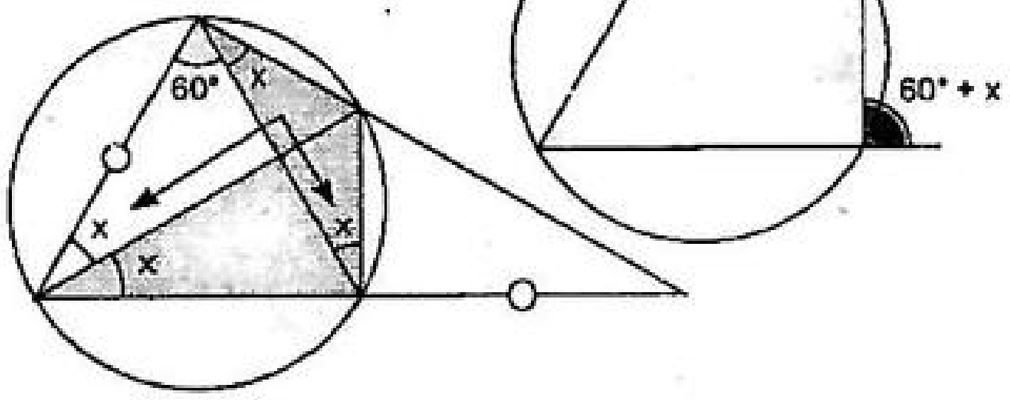




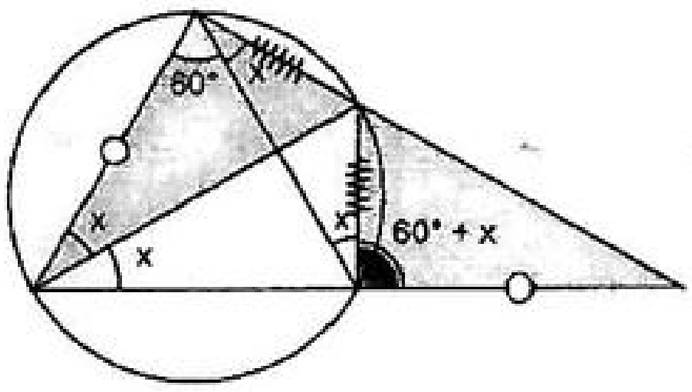
Paso Nº 2: Formamos un cuadrilátero inscriptible de la siguiente manera (cumple el teorema del pantalón).



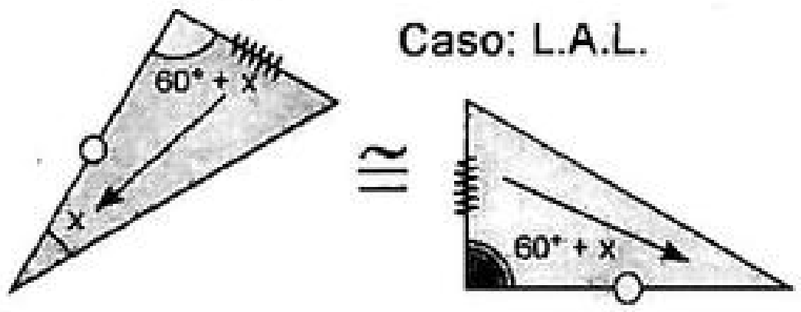
También

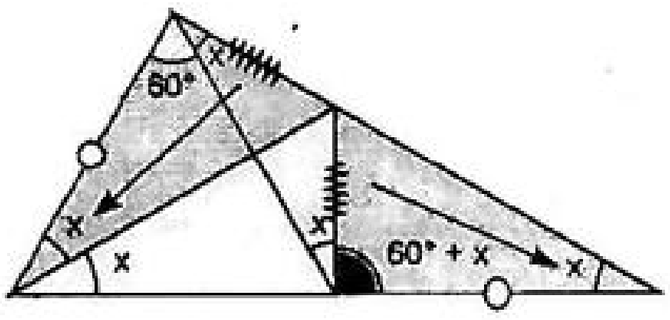


Paso Nº 3: Se obtiene triángulos congruentes:

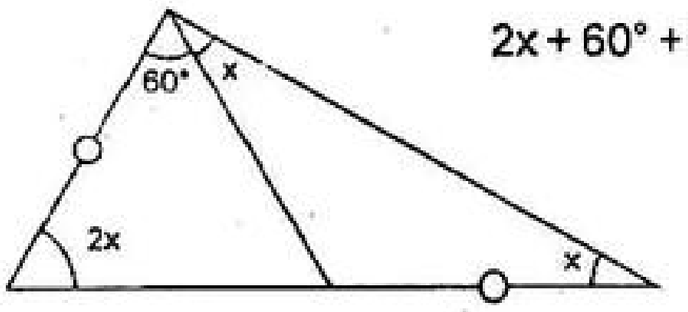


Caso: L.A.L.





Paso Nº 4: Tenemos la siguiente figura donde se cumple:

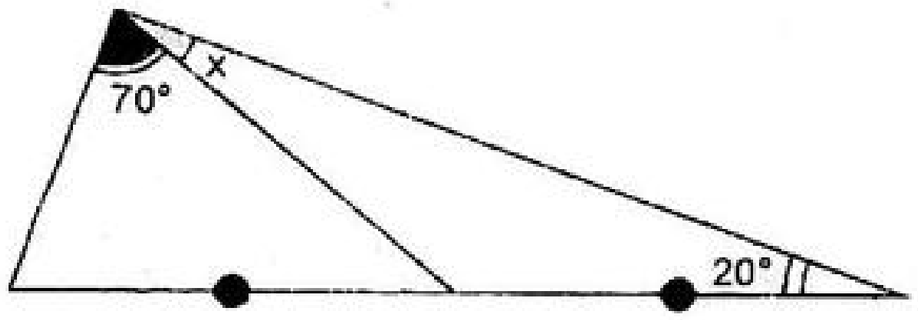


$$2x + 60° + x + x = 180°$$
$$4x = 120°$$
$$x = 30°$$

Scanned by CamScanner

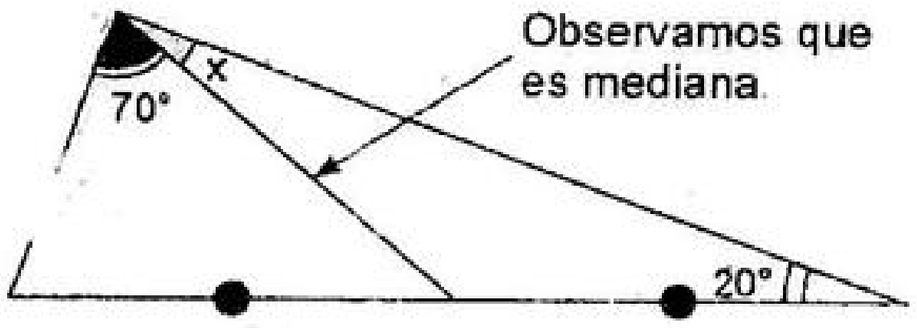
EJEMPLO Nº 02

Calcular "x"

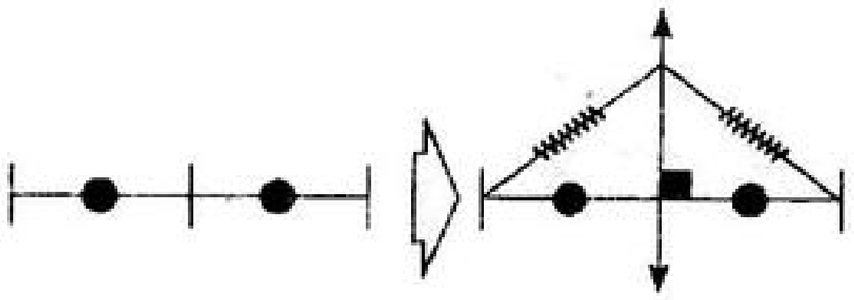


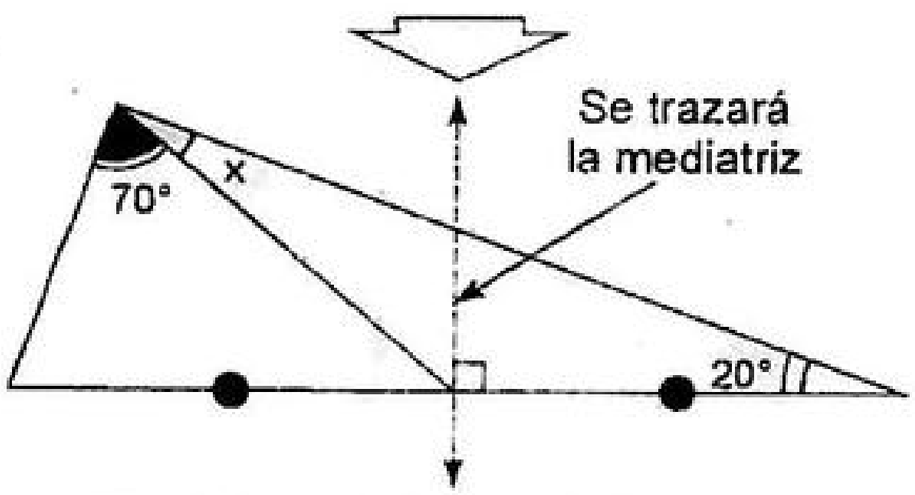
Resolución:

Paso Nº 1:

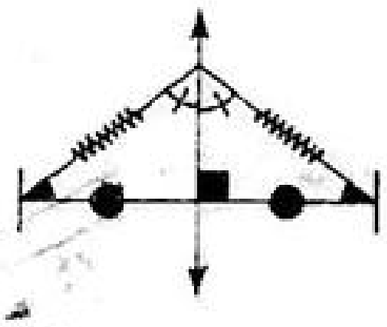


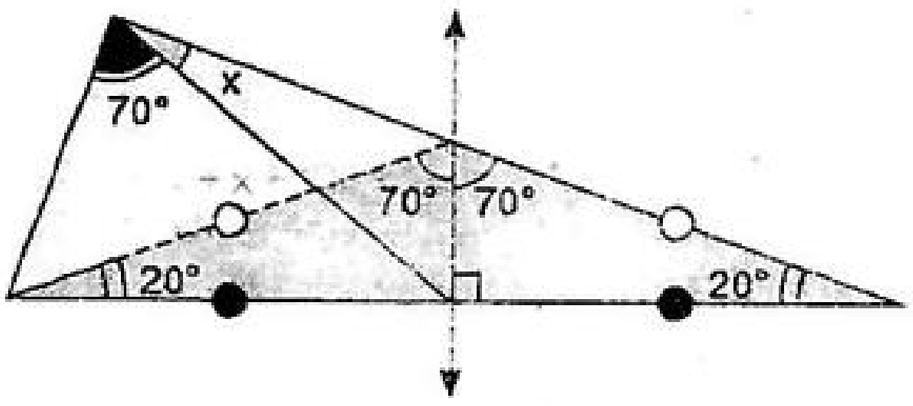
Sabemos:



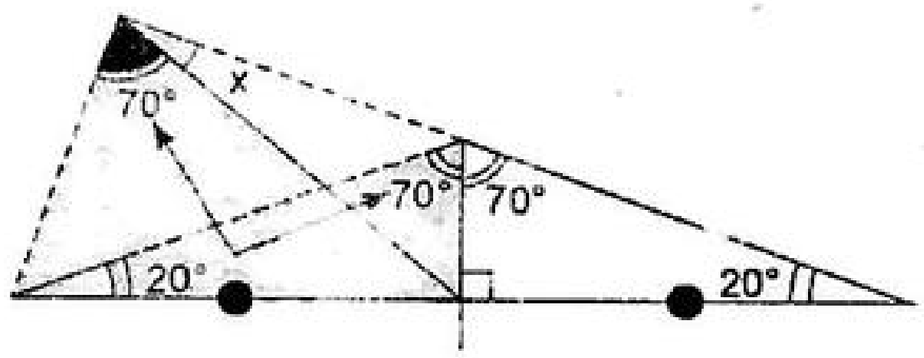


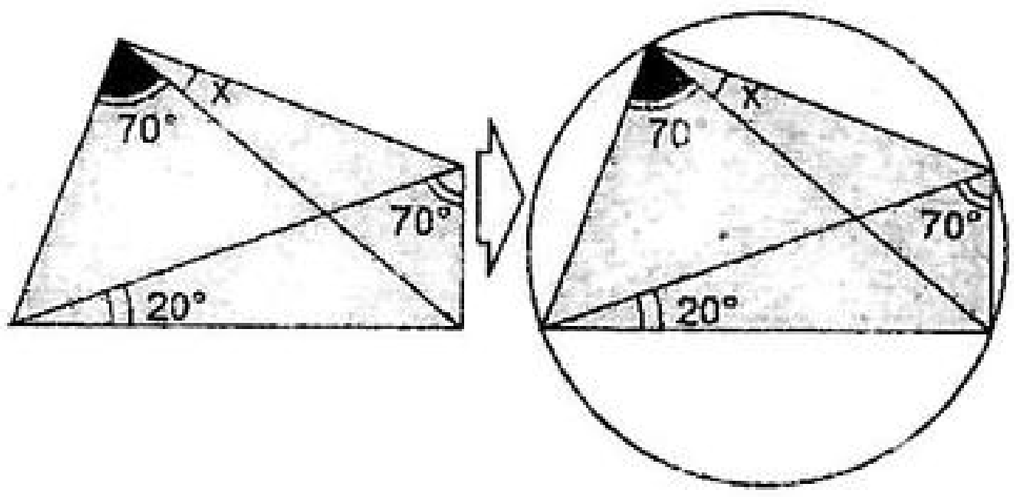
Paso Nº 2: Aplicando las propiedades de la mediatriz:

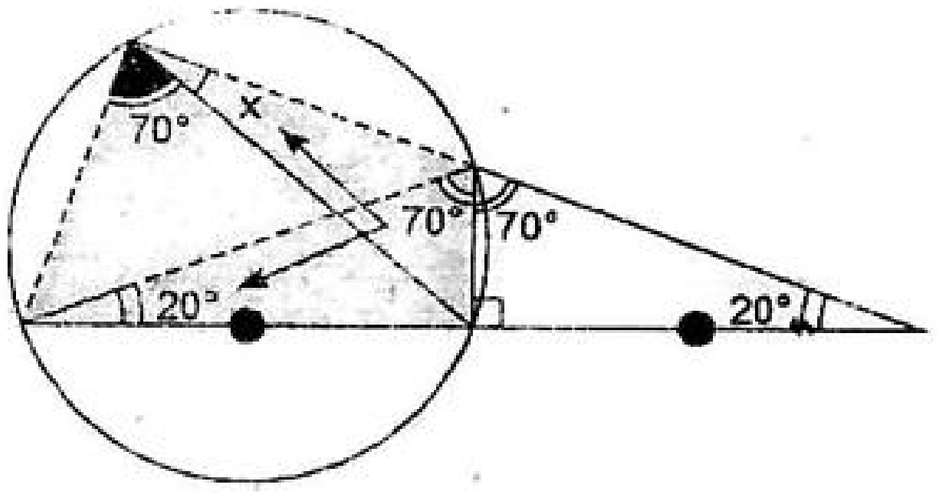




Paso Nº 3: Se observa que se obtiene un cuadrilátero inscriptible:





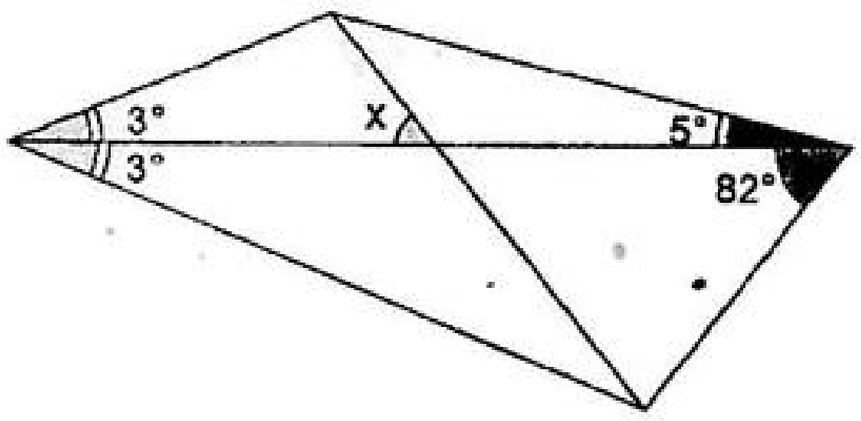


Aquí se obtiene, de la figura, utilizando la propiedad del "pantalón".

$$x = 20°$$

EJEMPLO Nº 03

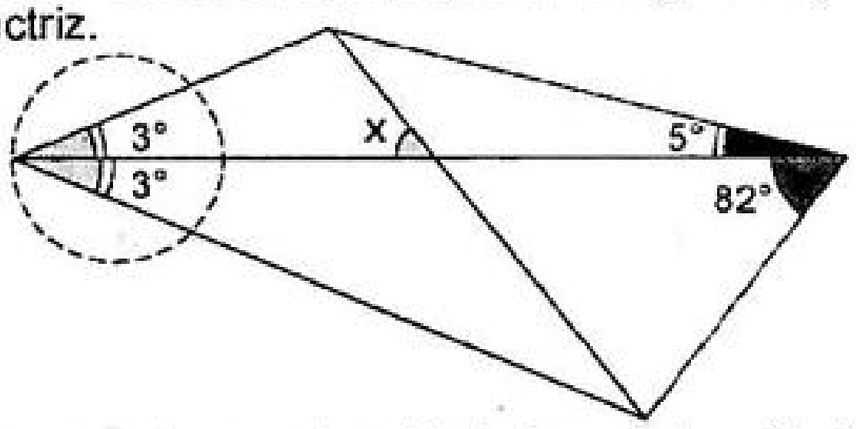
Calcular "x"



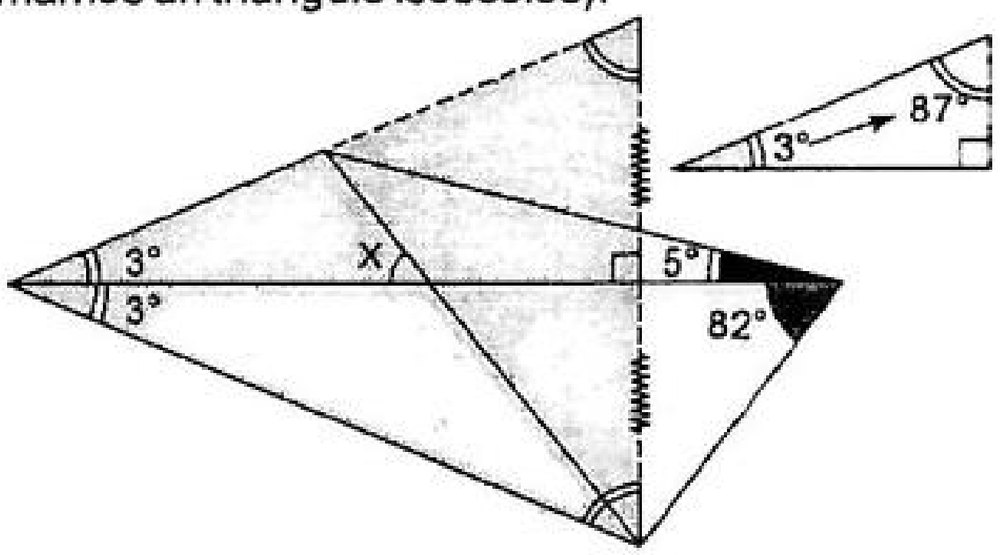
Scanned by CamScanner

Resolución:

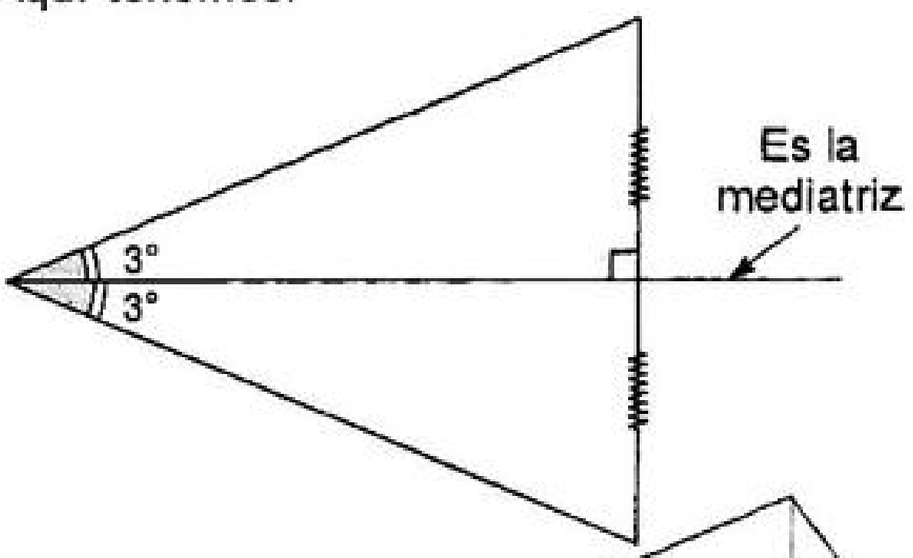
Paso Nº 1: Observamos que en la figura hay una bisectriz.



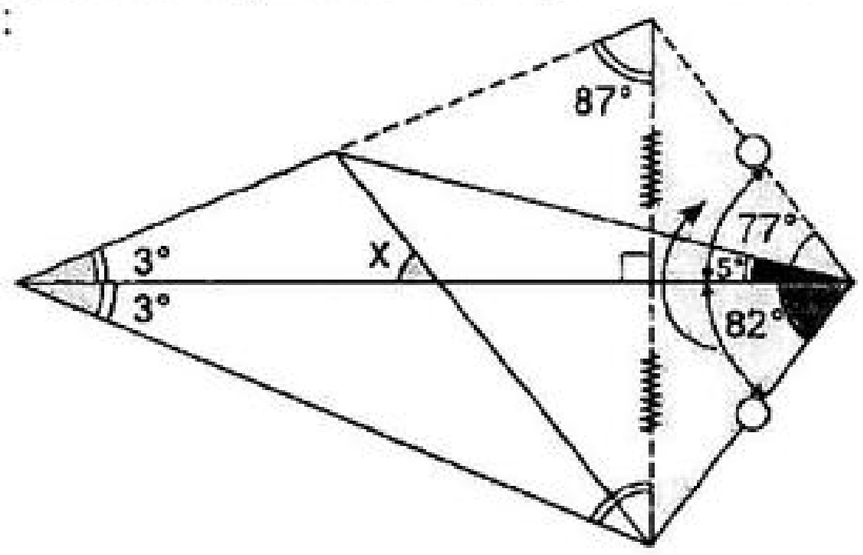
Utilizamos el segundo criterio de construcción (formamos un triángulo isósceles).



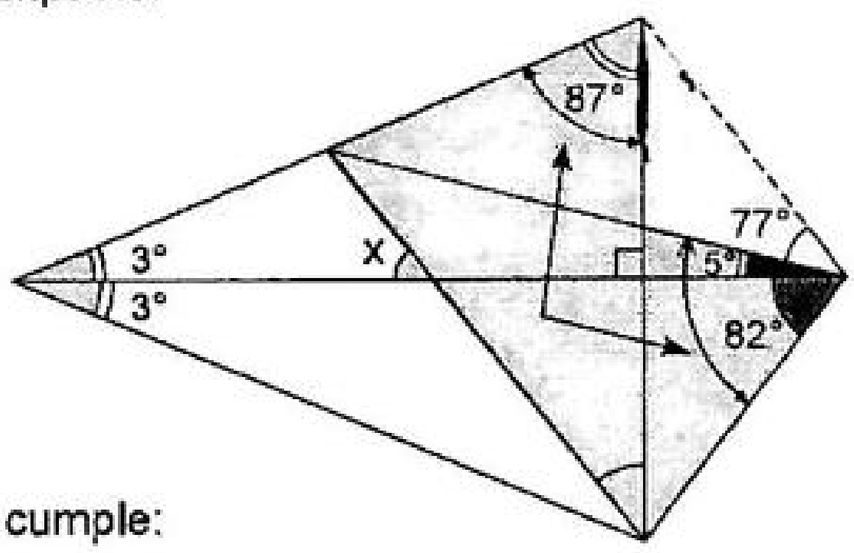
Aquí tenemos:



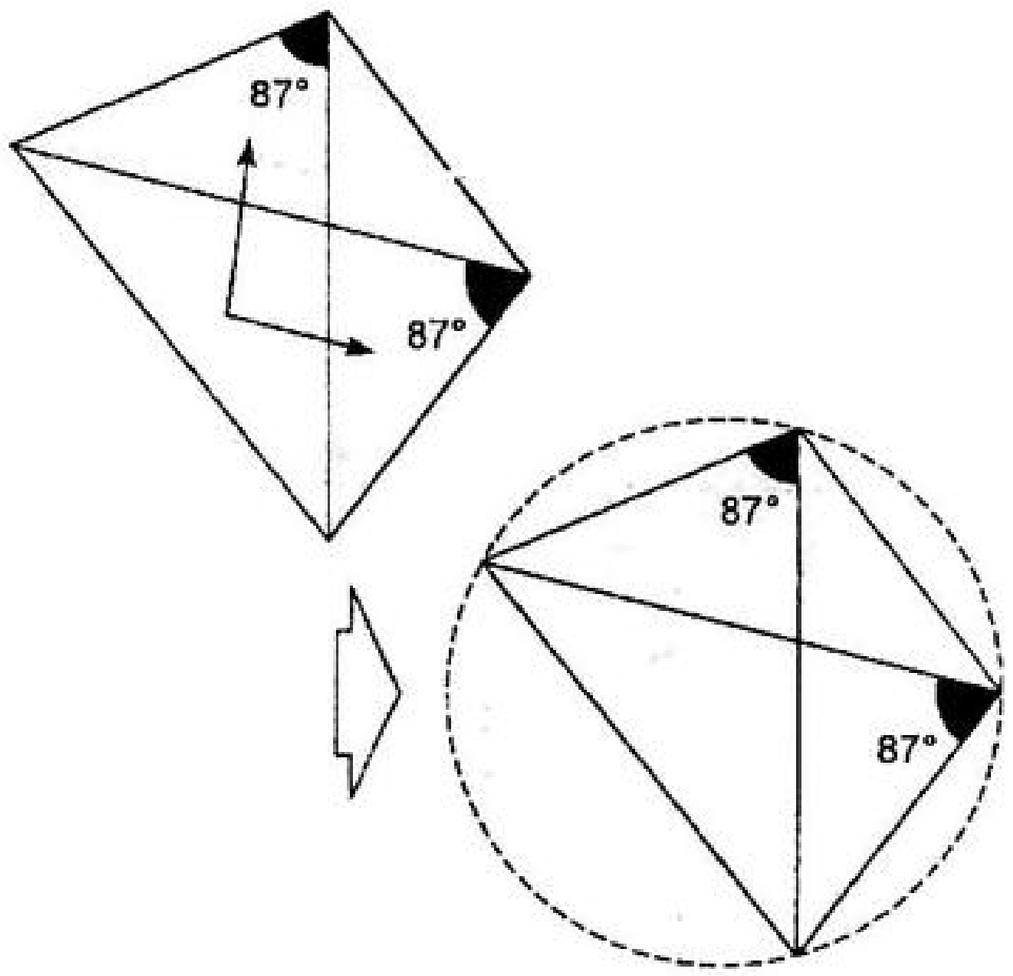
Paso Nº 2: Empleando la propiedad de la mediatriz:



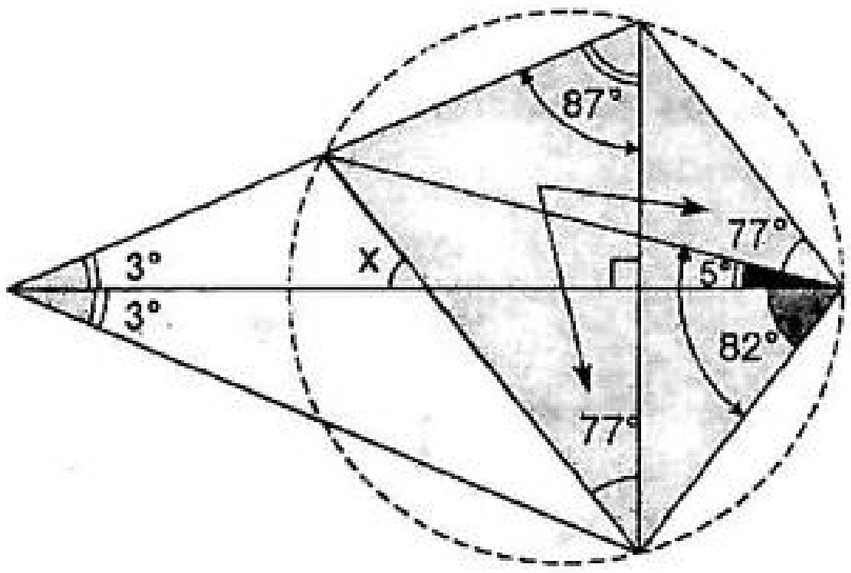
Paso Nº 3: Se observa en la figura un cuadrilátero inscriptible.



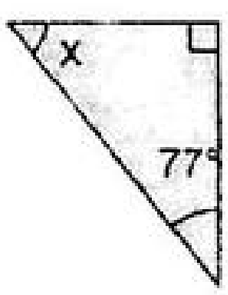
Se cumple:



Aquí cumple la propiedad del pantalón:



Luego se observa en la figura:



$\rightarrow 77° + x = 90°$

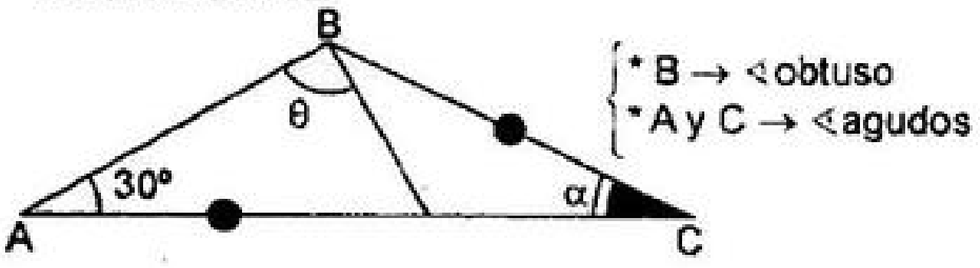
$x = 13°$

Scanned by CamScanner

9NO Criterio: "TRAZOS AUXILIARES EMPLEANDO LOS PUNTOS NOTABLES"

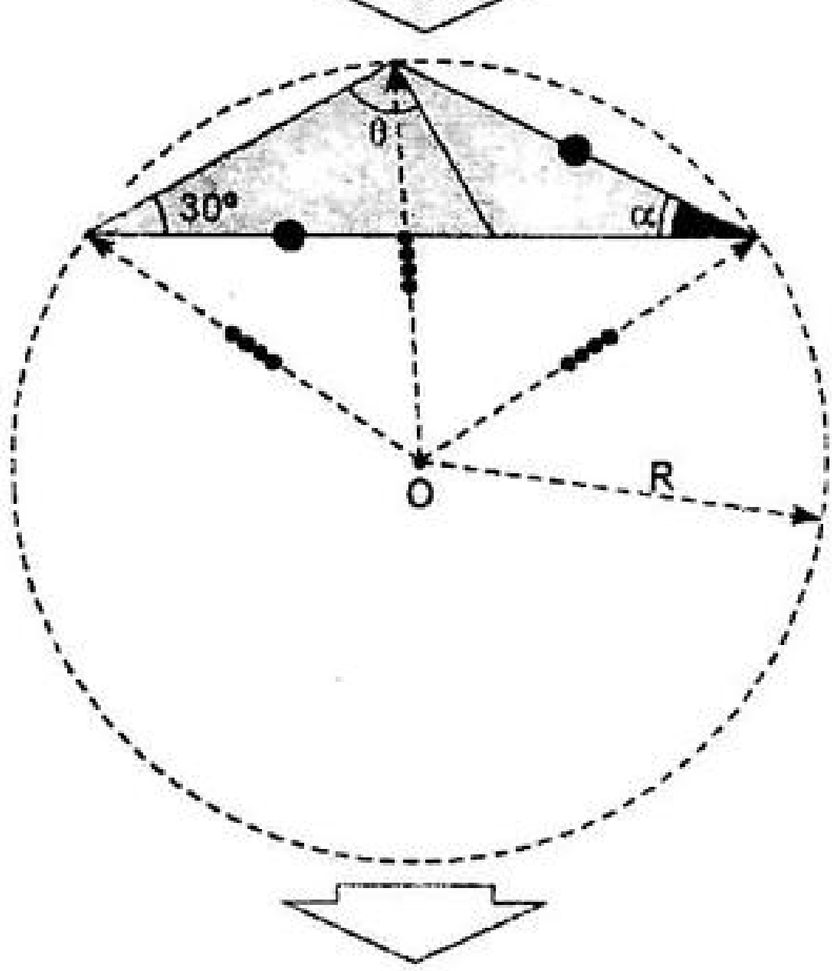
CASO A: EMPLEANDO EL CIRCUNCENTRO

I. Si se tiene la siguiente figura con tales características.

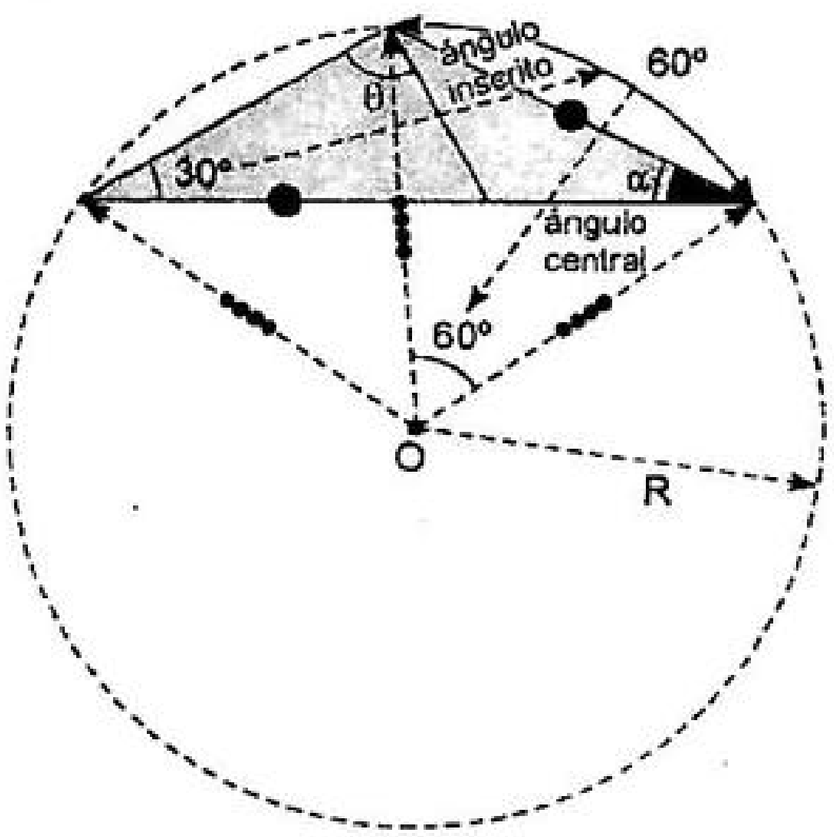


Sabemos que todo triángulo, está contenido en una circunferencia, y su centro de ésta es el circuncentro (para un triángulo obtusángulo, el circuncentro se ubica exterior a ella)

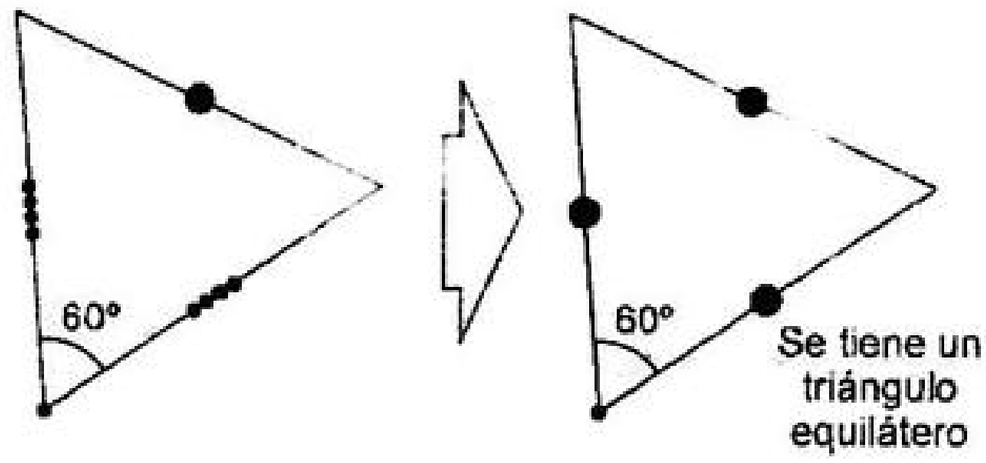
Se hará



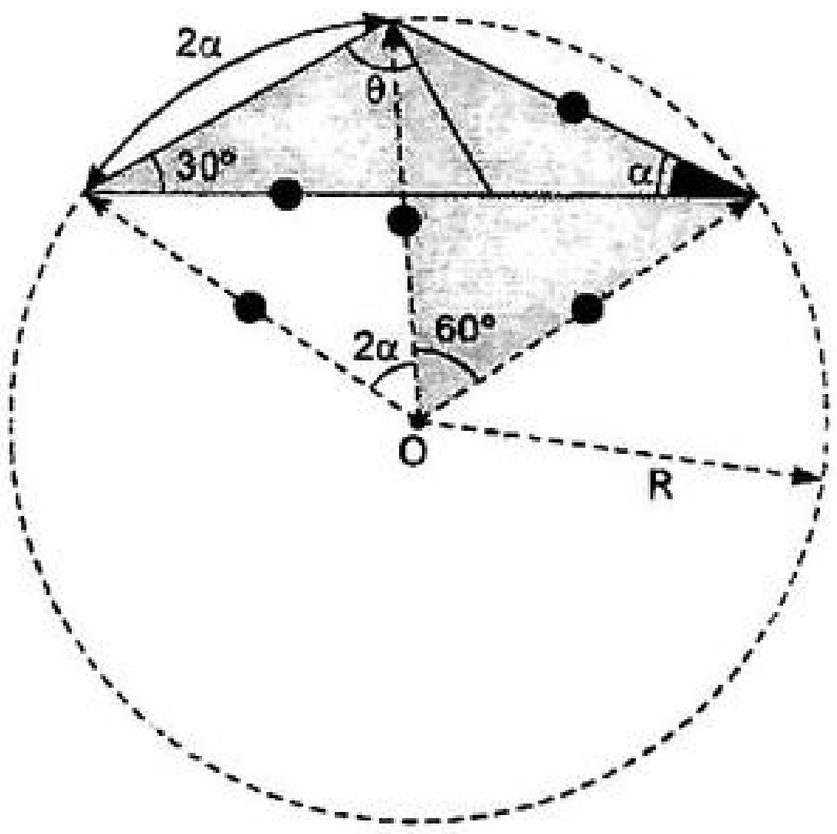
Aplicando las propiedades que se cumplan en la circunferencia.



* Luego se observa en la figura:

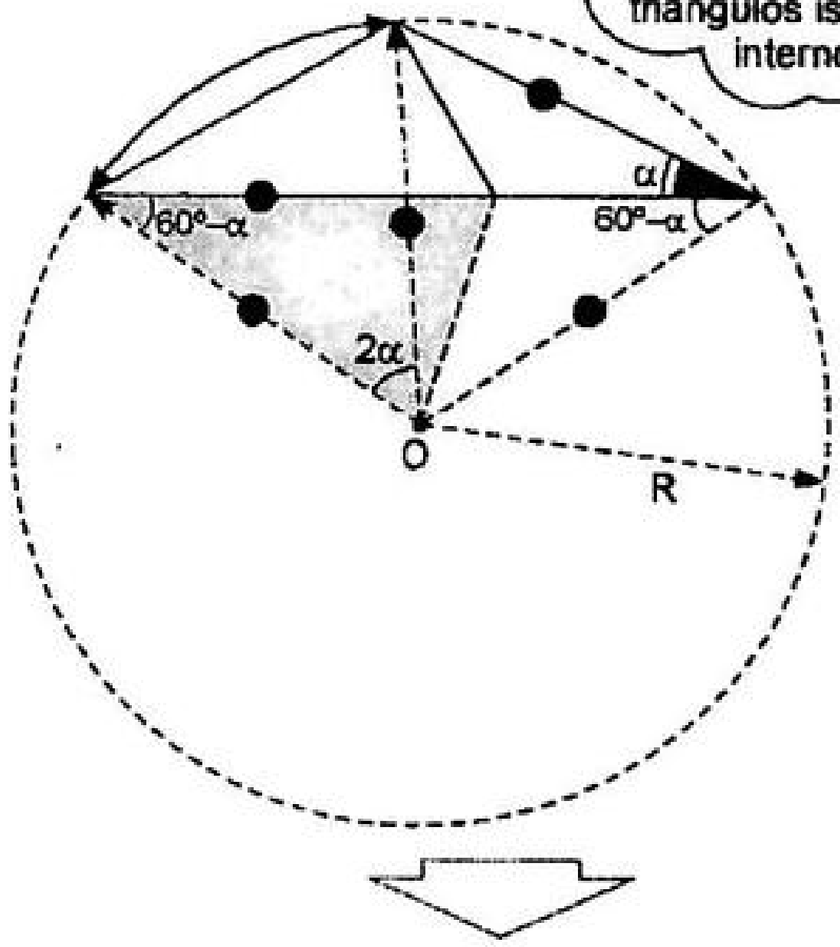


Se tiene un triángulo equilátero



También se observa

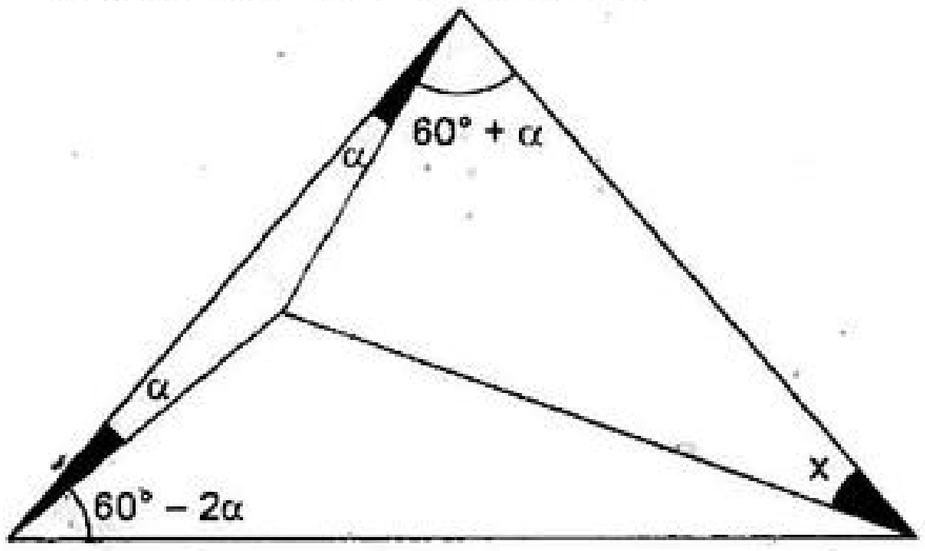
Tener presente: Realizados estos trazos, se obtiene en la figura resultante, triángulos isósceles internos



Luego, en la figura resultante se completará los ángulos internos, para luego hallar la solución del problema.

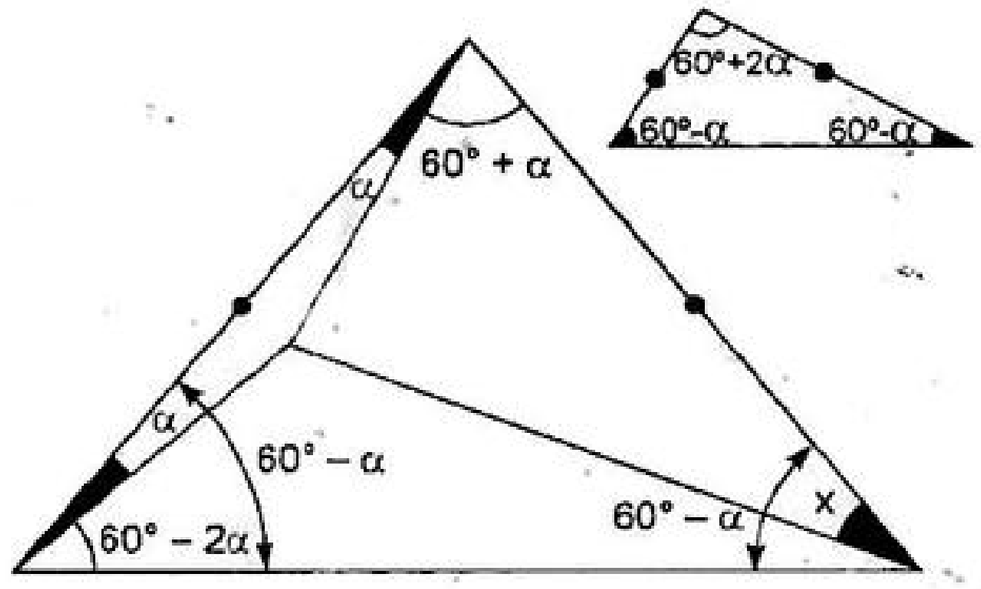
Scanned by CamScanner

II. Si se tiene la siguiente figura con las siguientes caracteristicas:

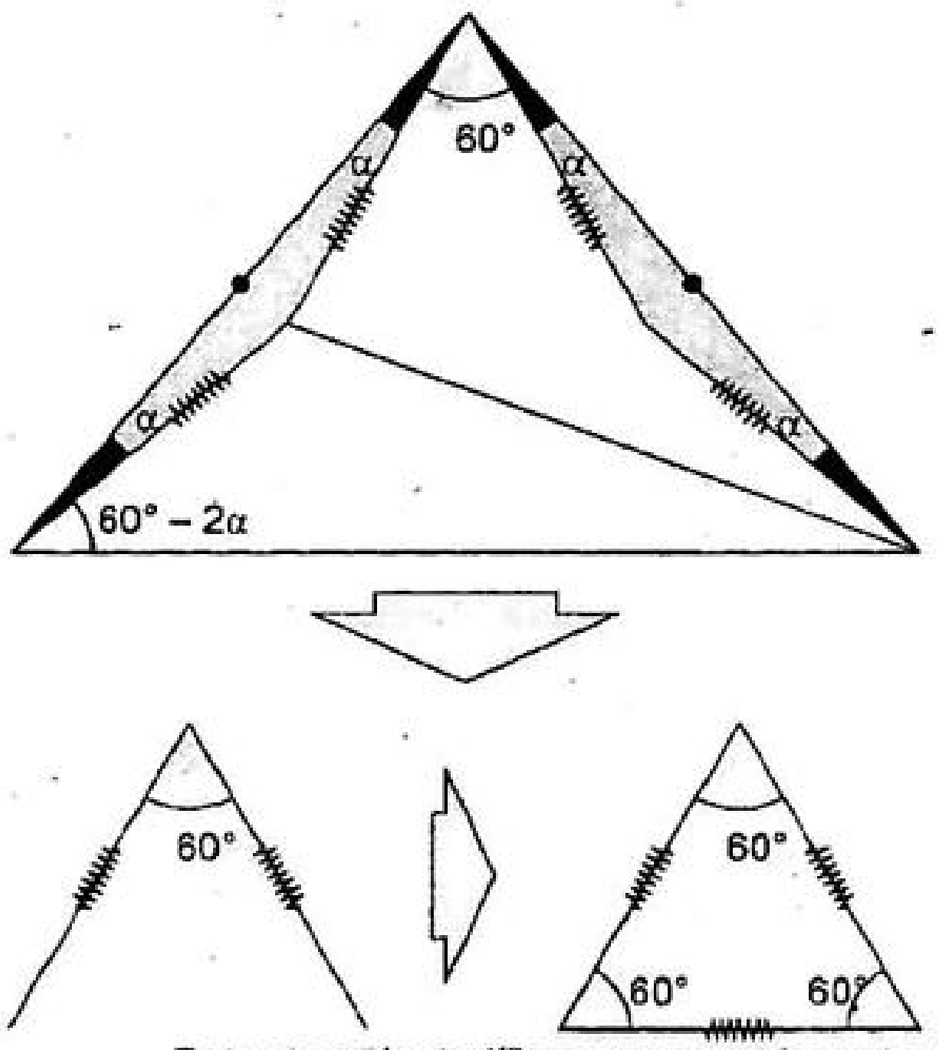


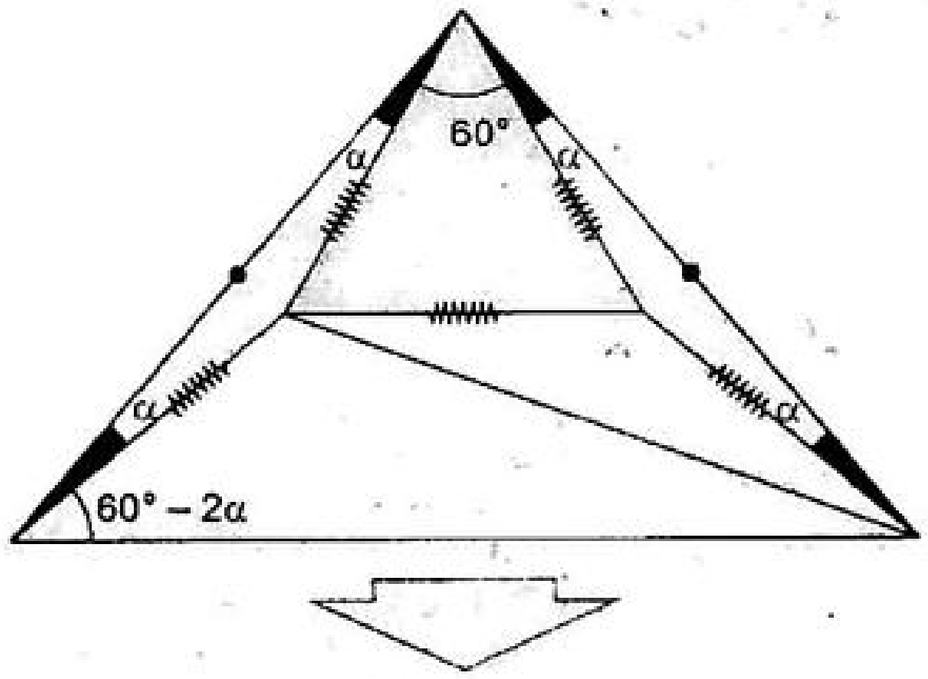
Se hará

Se completará los ángulos internos del triángulo

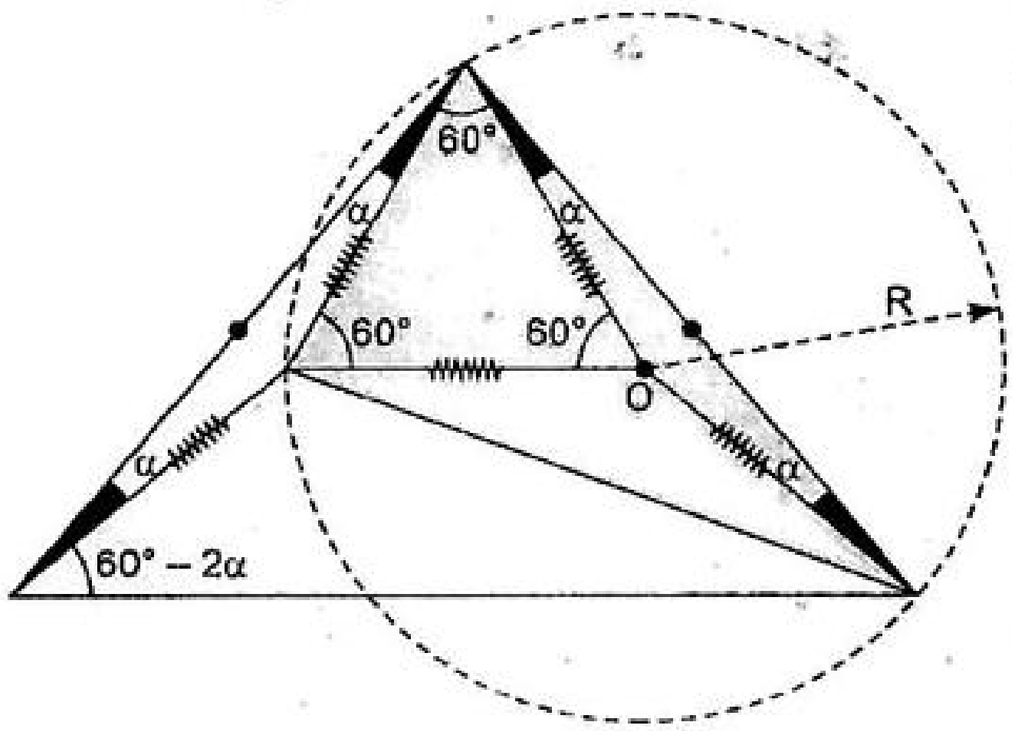


Se construye un triángulo congruente de la siguiente manera para obtener un ángulo de 60° y con ello un (triángulo equilátero).

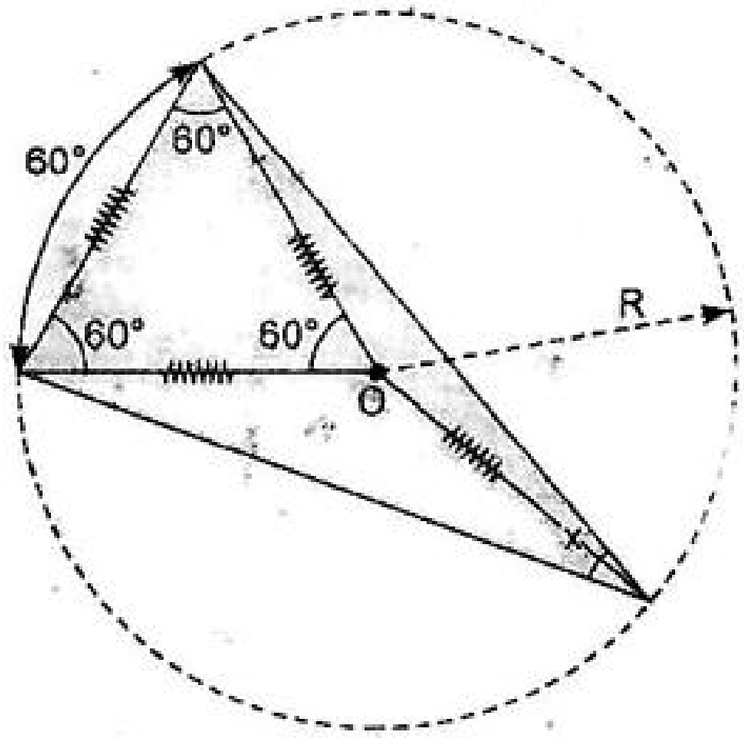




Se observa en la figura; un triángulo que tiene las siguientes caracteristicas (O → circuncentro).



Aquí se cumple:



Por ángulo inscrito:

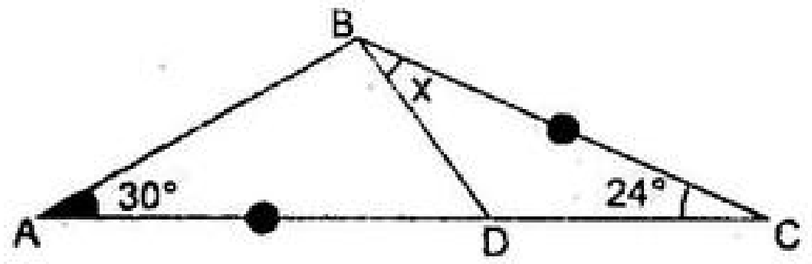
$x = 30°$

Toda educación científica que no se inicia con la matemática es imperfecta en su base (Augusto Comte)

Scanned by CamScanner

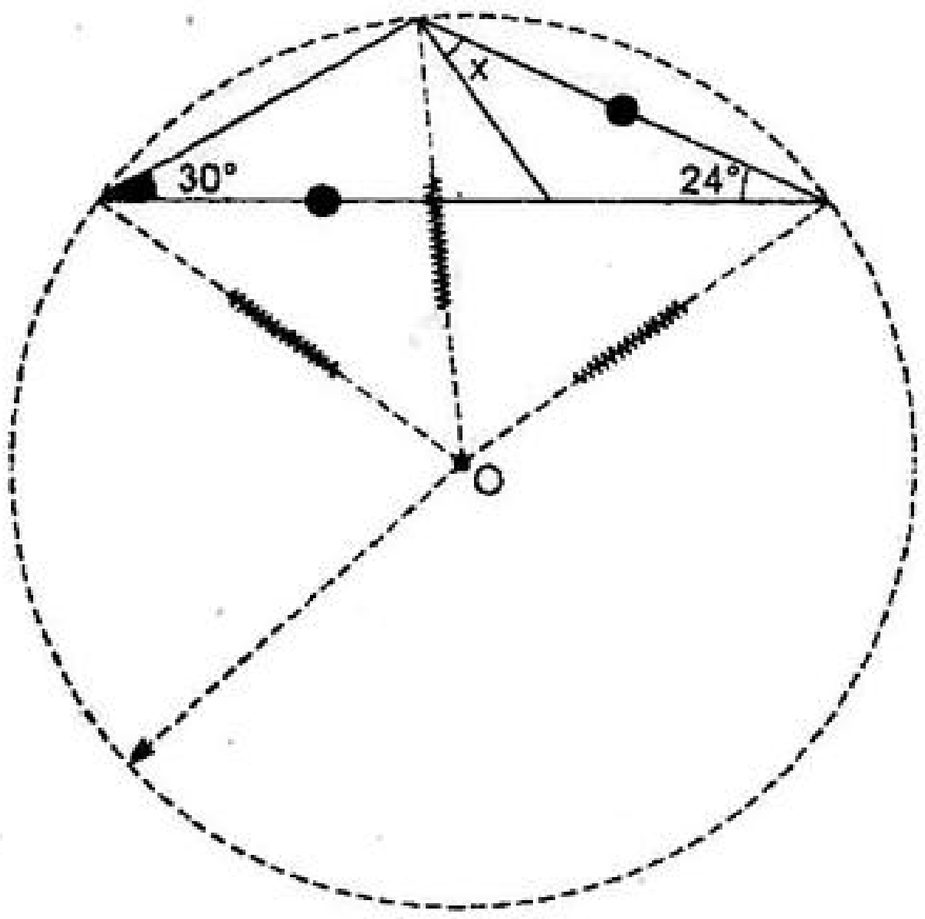
EJEMPLO Nº 01

Calcular "x"

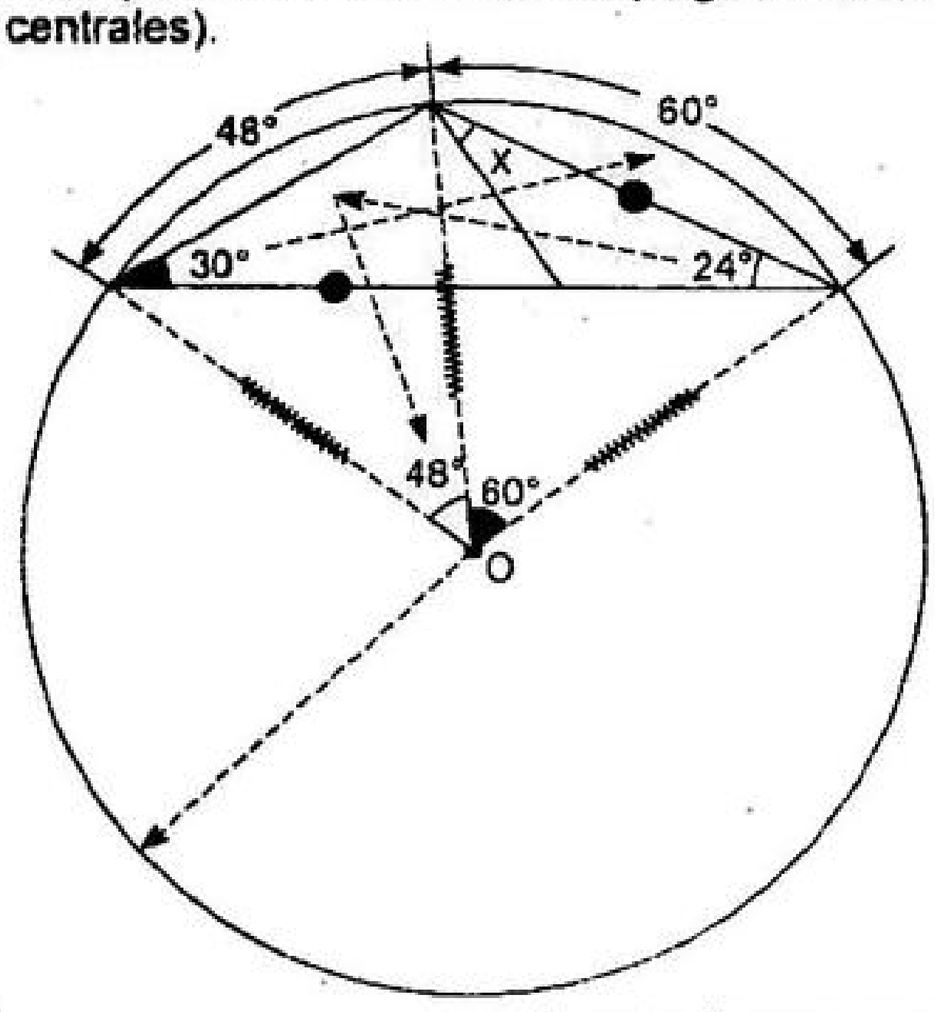


Resolución:

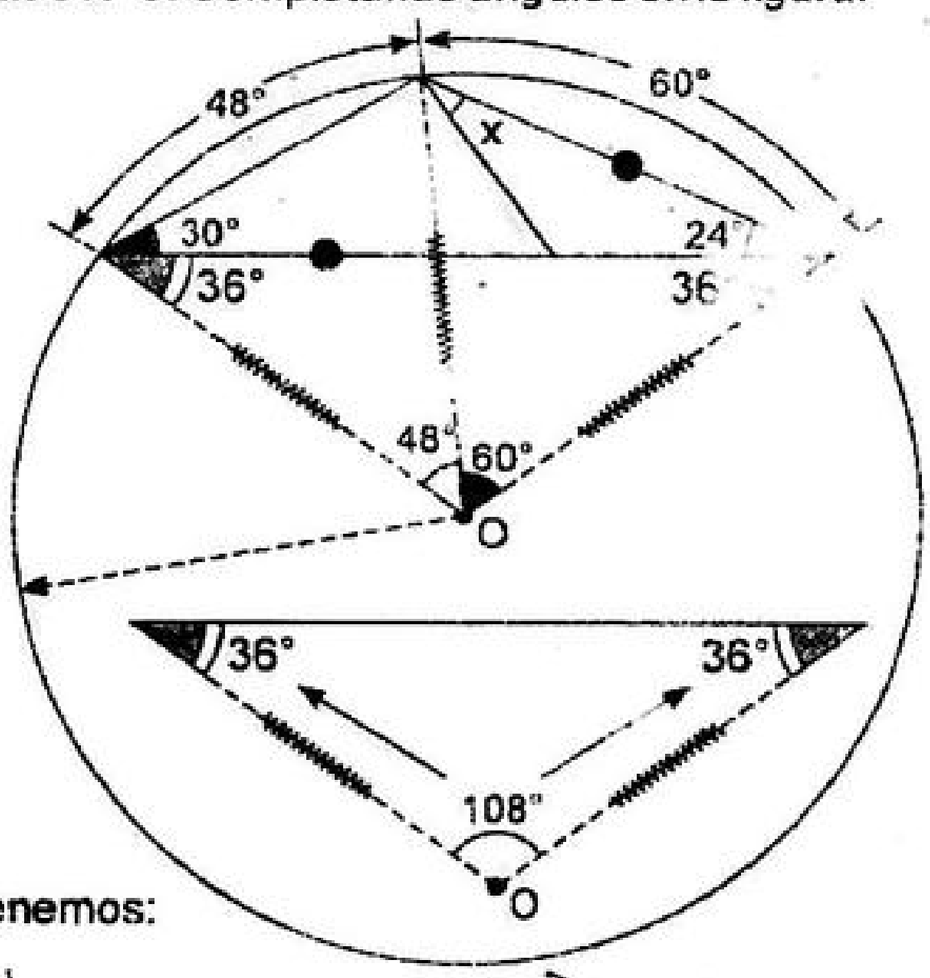
Paso Nº 1: Se observa que los ángulos A y C son agudos y que suman 54° entonces el ∢B es obtuso, además todo triángulo está contenido en una circunferencia y su gráfica será:



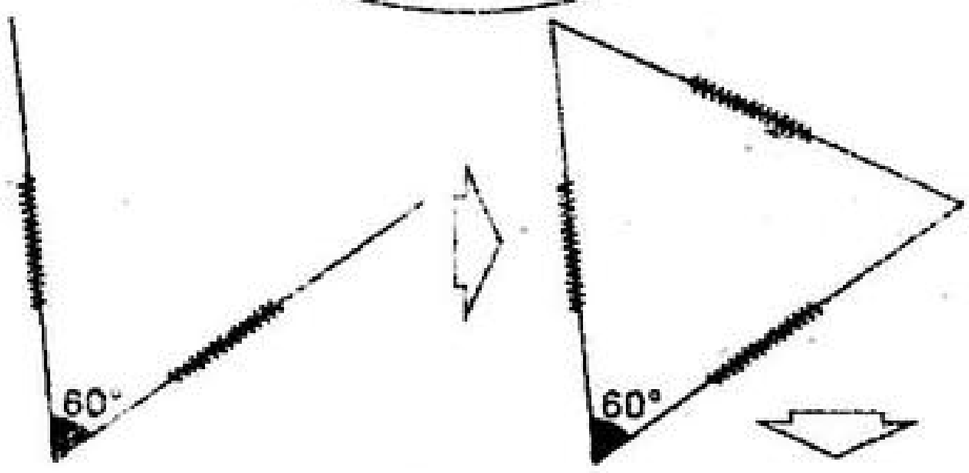
Paso Nº 2: Ahora aplicamos las propiedades que se cumplen en la circunferencia (ángulos inscritos y centrales).



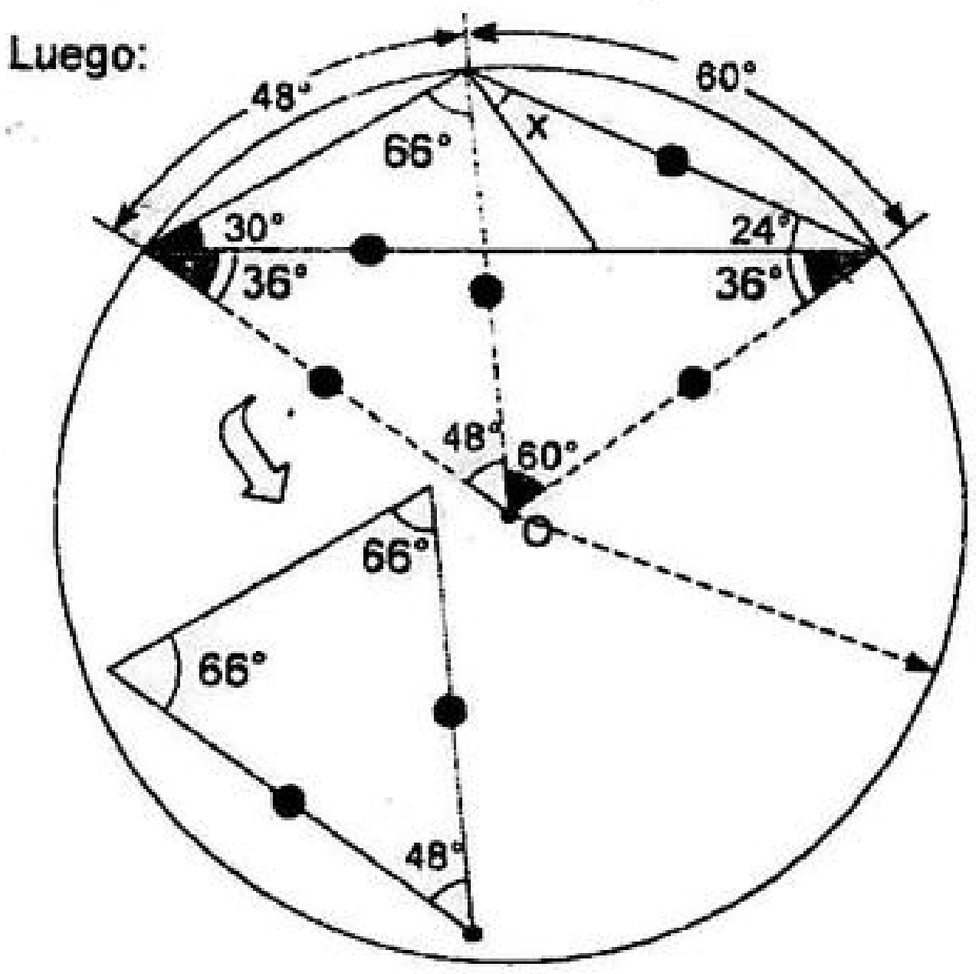
Paso Nº 3: Completando ángulos en la figura.



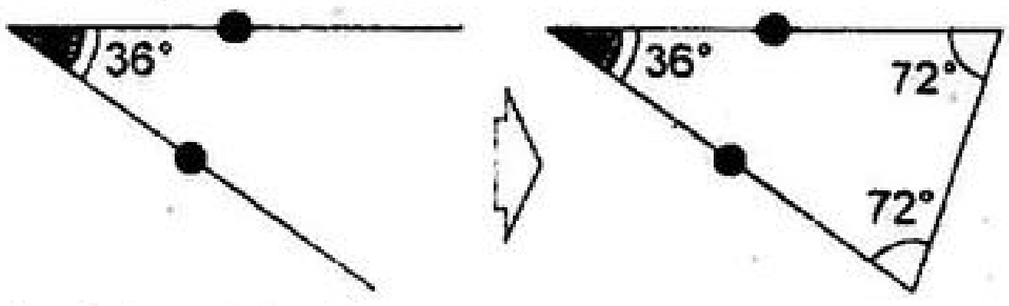
Tenemos:



Luego:

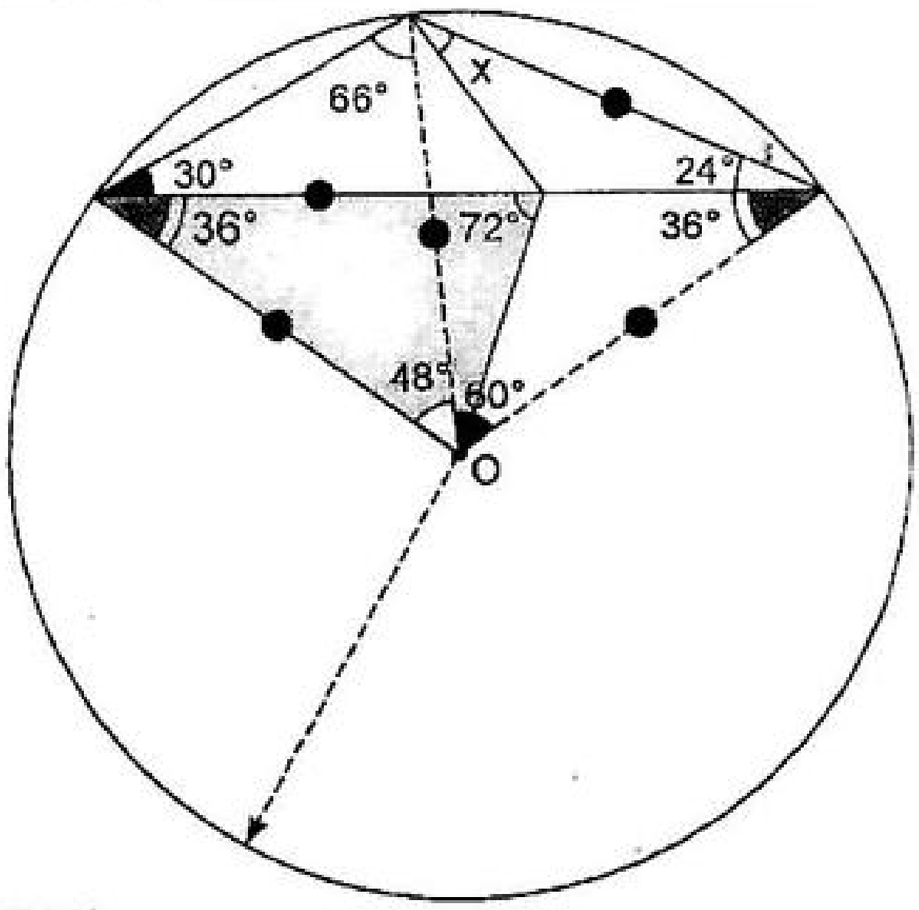


Paso Nº 4: Se observa internamente en el gráfico un triángulo isósceles.

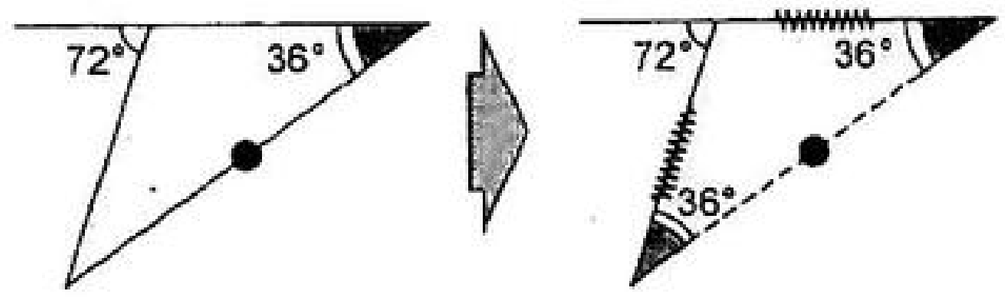


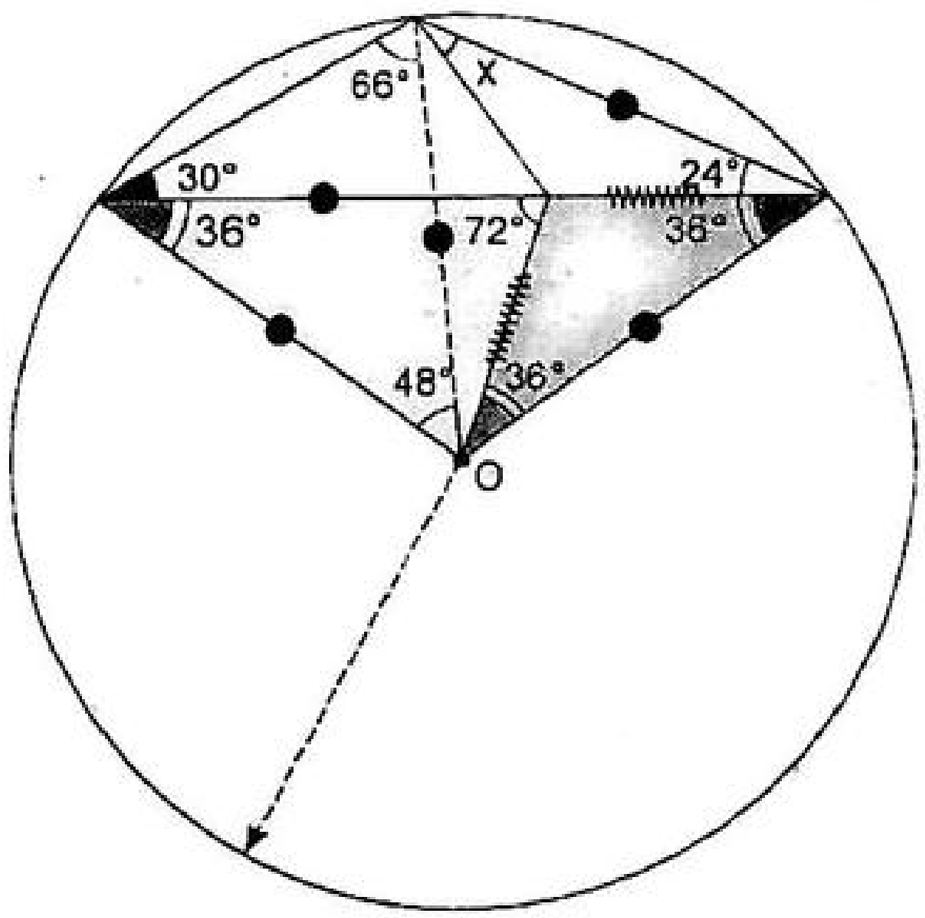
La matemática no es una ciencia sino la ciencia. (Felix Averbach)

Scanned by CamScanner

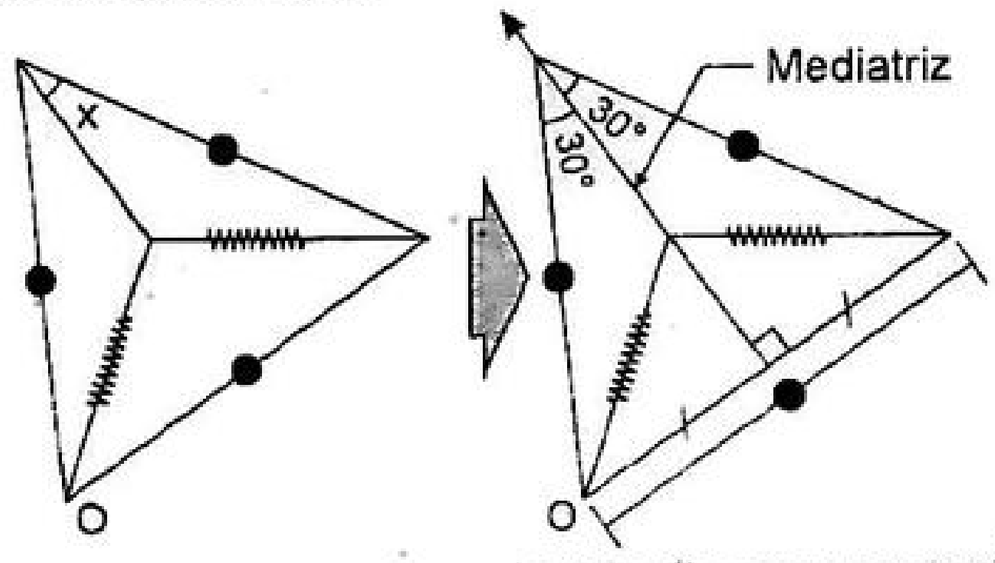


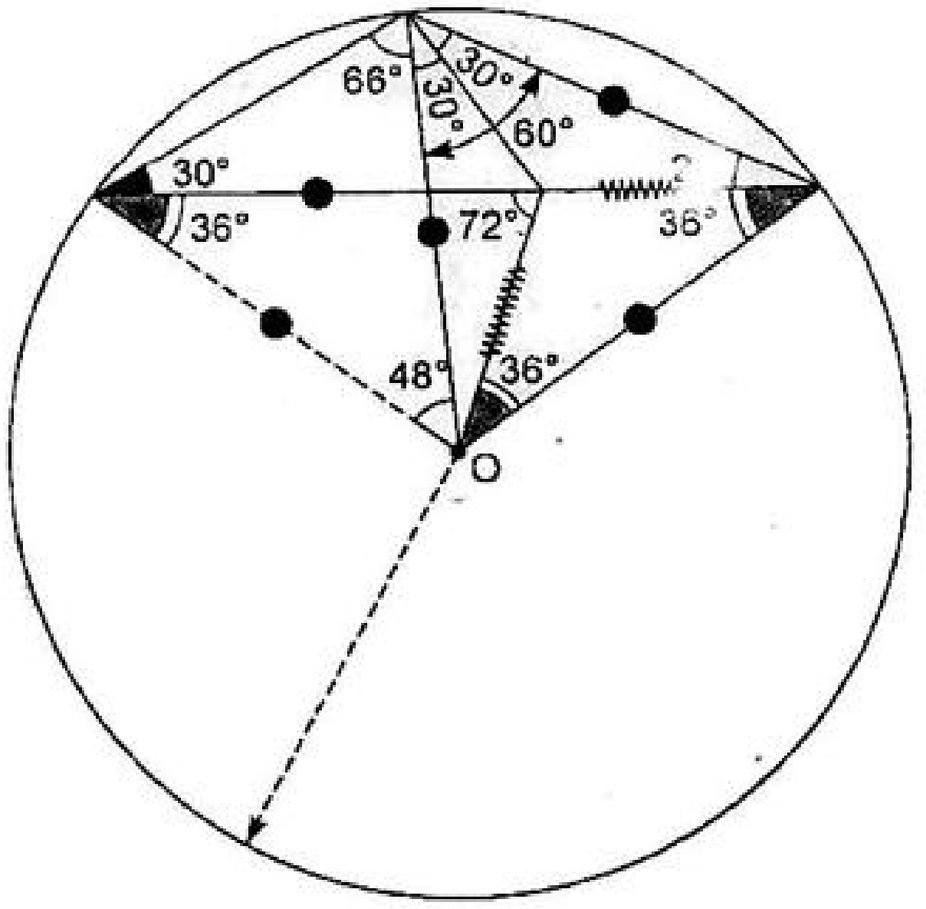
Luego:





Paso Nº 5: Ahora se observa en el triángulo equilátero que cumple:

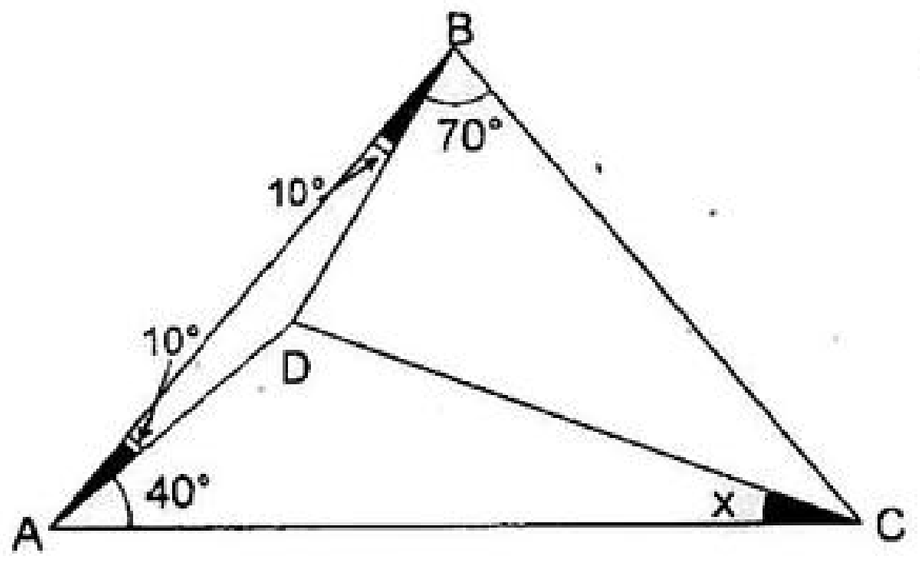




$\therefore\ 2x = 60° \Rightarrow x = 30°$

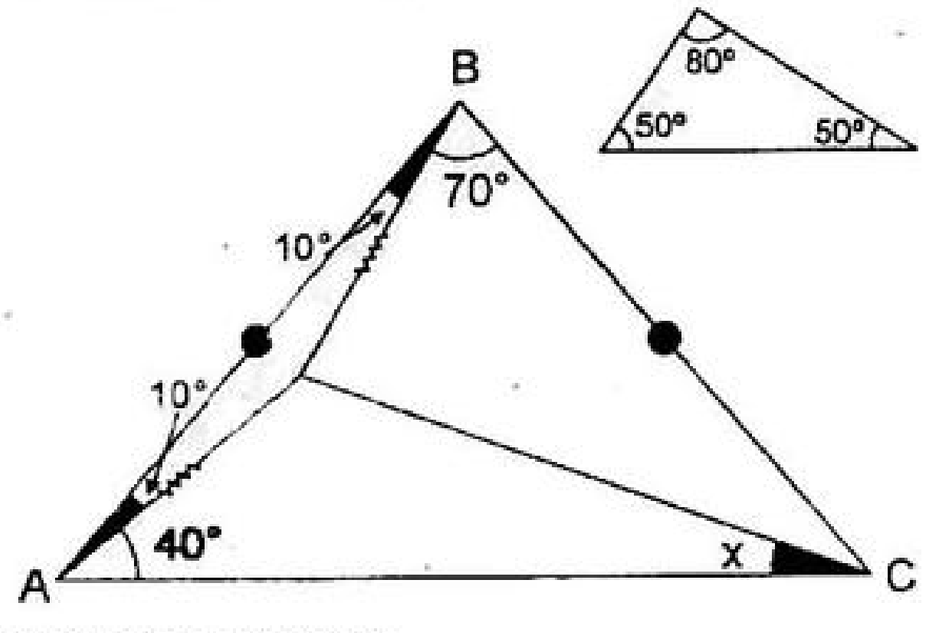
EJEMPLO Nº 02

Calcular x:



Resolución:

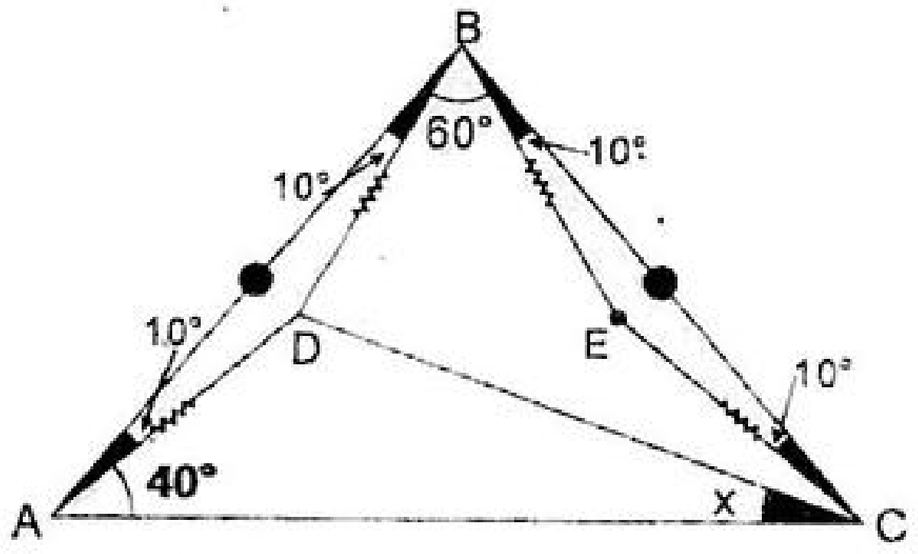
Paso Nº 1: Ahora se observa que el triángulo ABC es isósceles: (AB = BC).



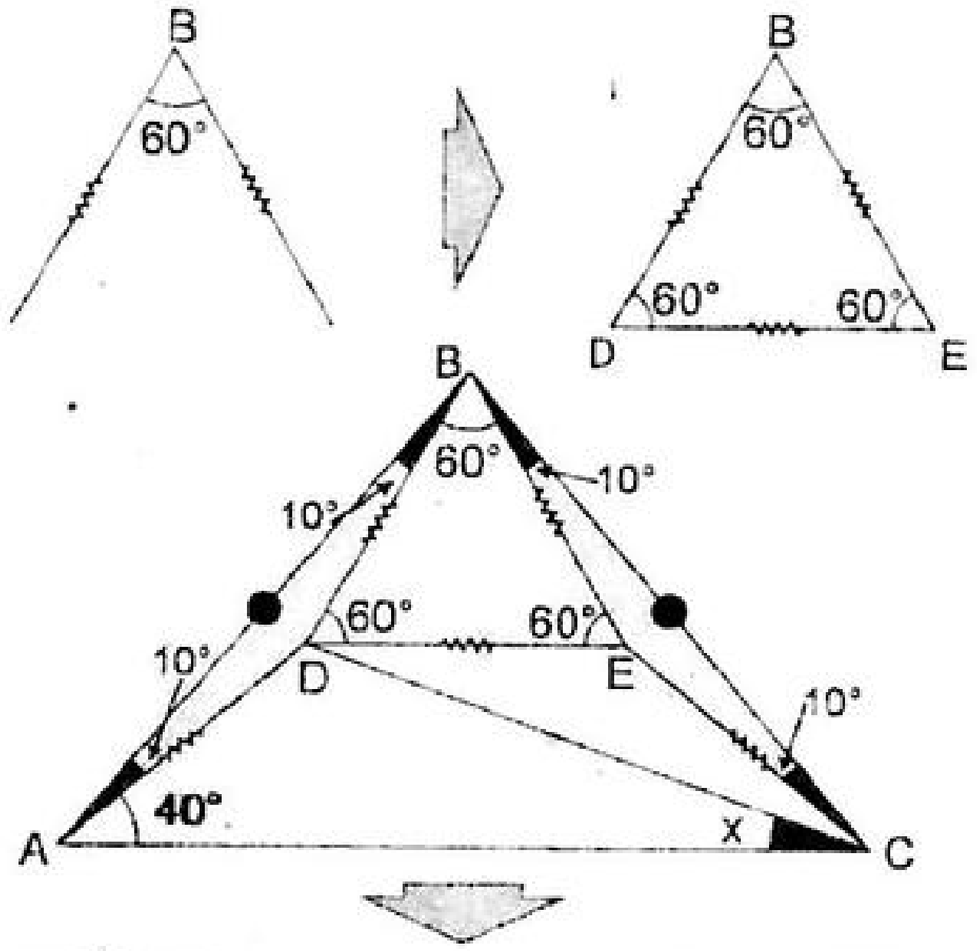
La matemática no es una ciencia sino la ciencia. (Felix Averbach)

Scanned by CamScanner

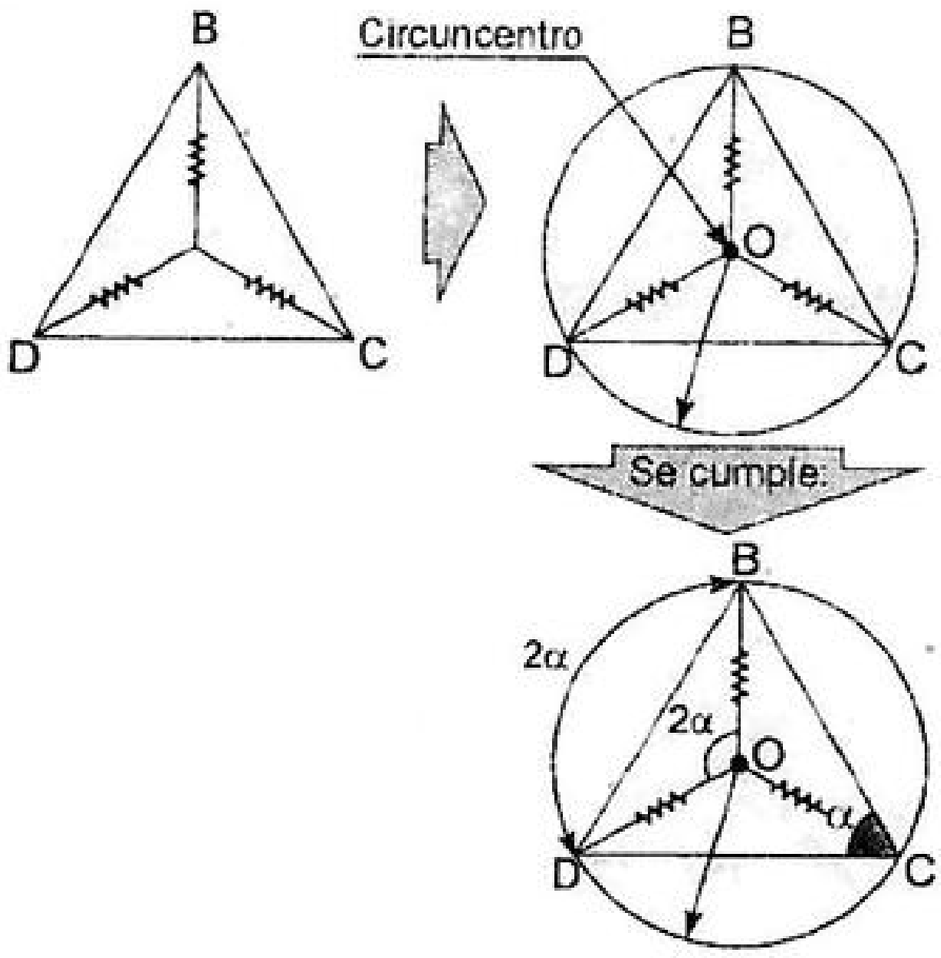
Paso N° 2: Ahora construimos un triángulo congruente al triángulo ADB sobre el lado BC de la siguiente manera:



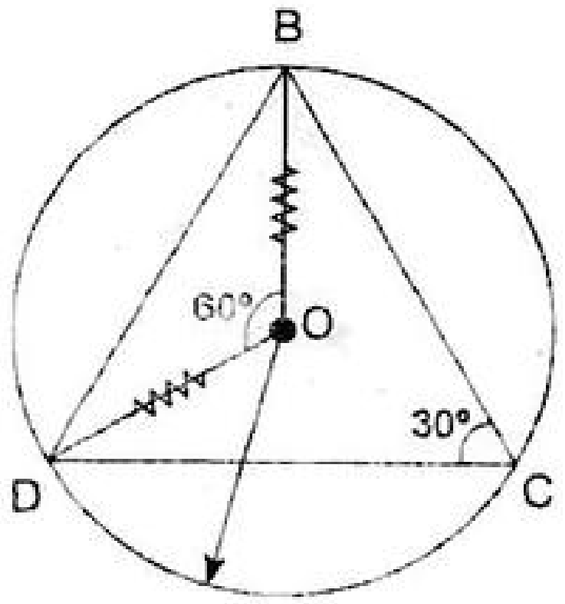
Paso N° 3: En la figura resultante se observa:

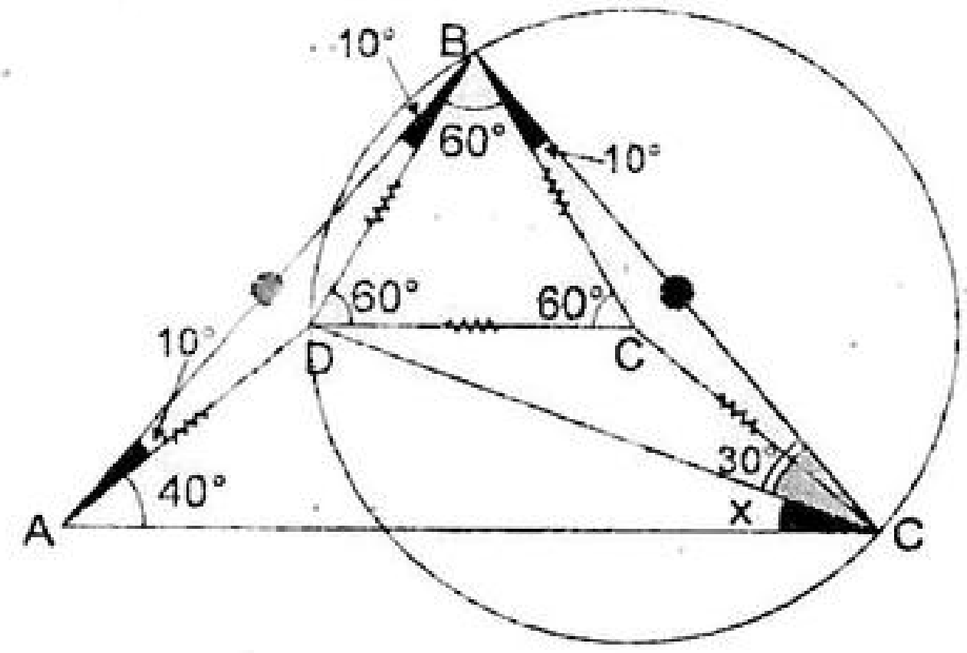


Paso N° 4: Observamos que en el triángulo BDC se cumple que "O" es circuncentro, de la siguiente manera:

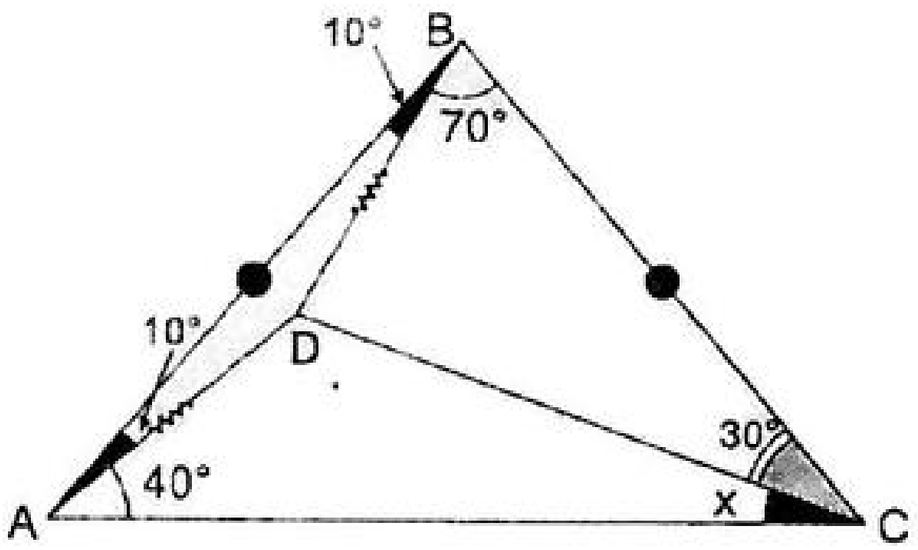


En el problema





Ahora tenemos la figura resultante:

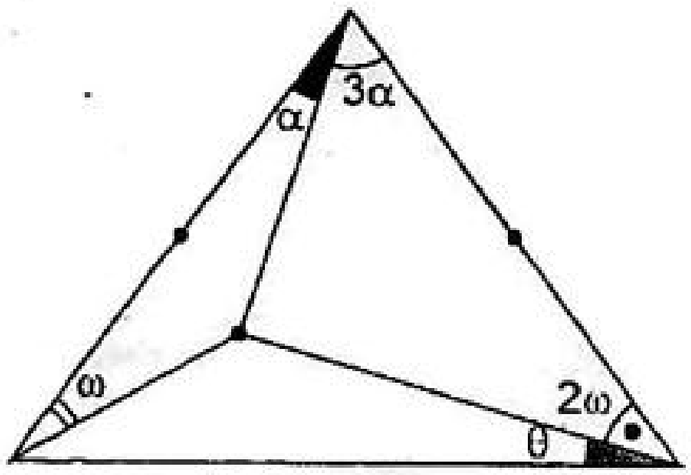


$\Rightarrow 50° = 30° + x \Rightarrow x = 20°$

Scanned by CamScanner

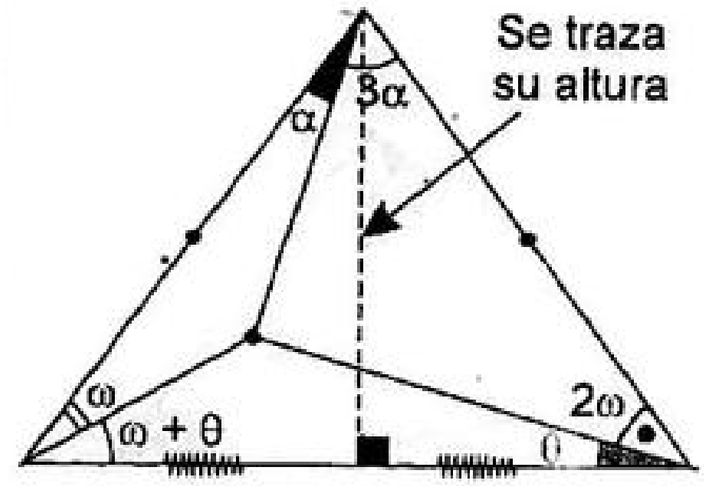
CASO B: EMPLEANDO EL INCENTRO

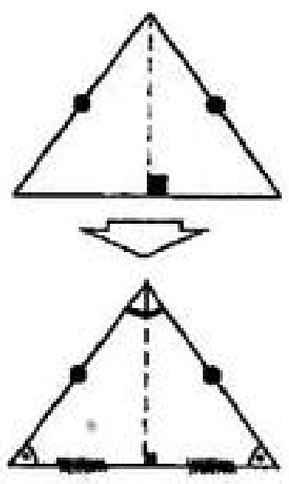
I. Si se tiene la siguiente figura con tales características.



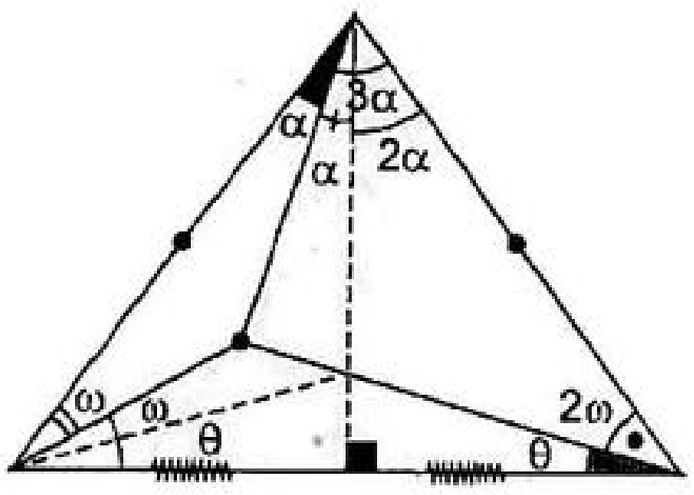
Se hará

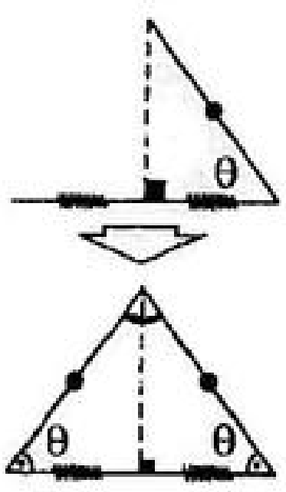
Tener presente:

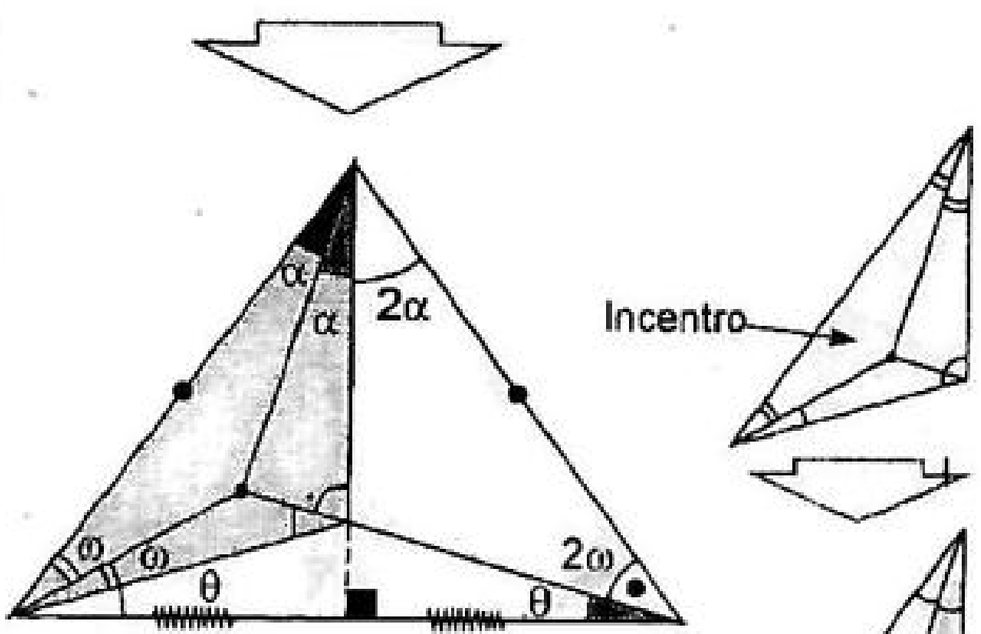




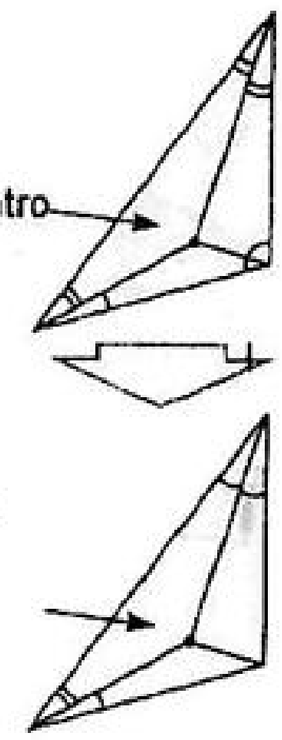
Por propiedad de la mediatriz



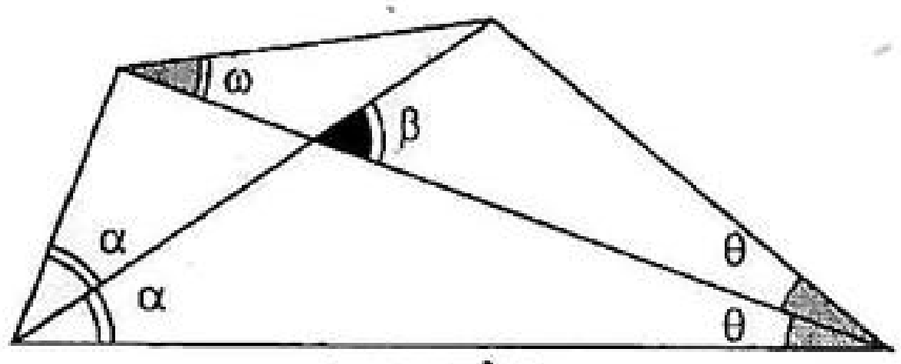




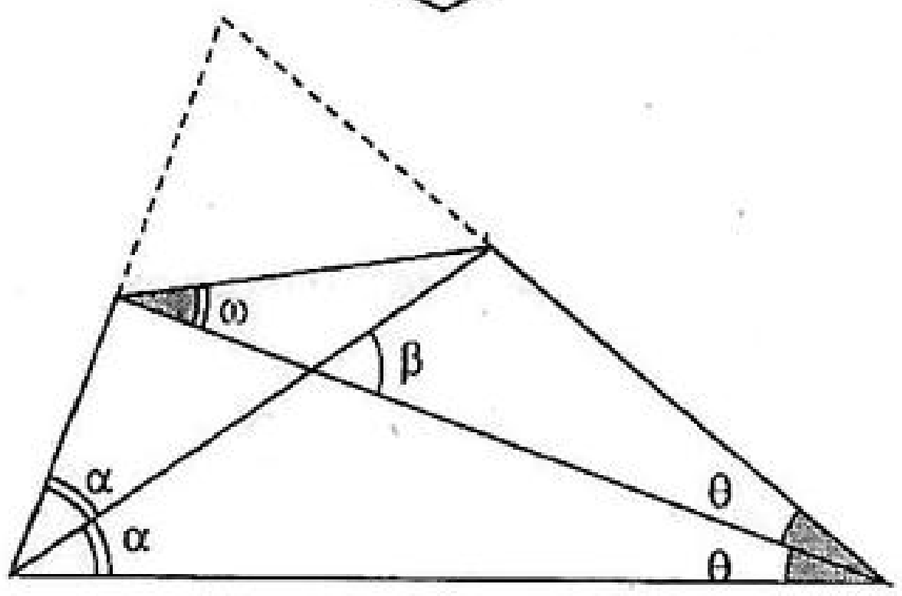
Incentro



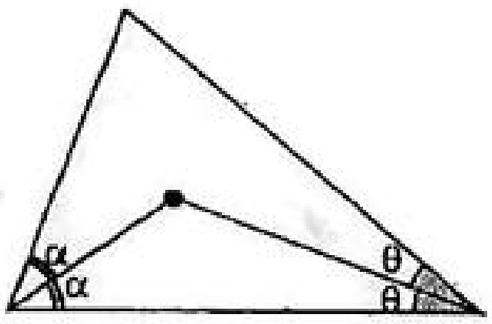
II. También si tenemos la siguiente figura:

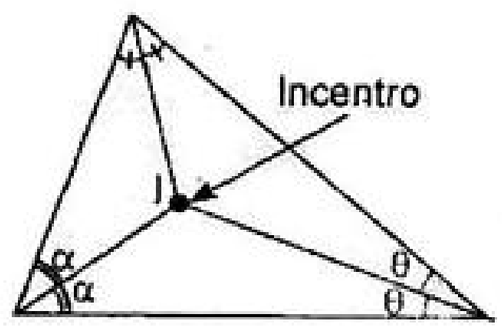


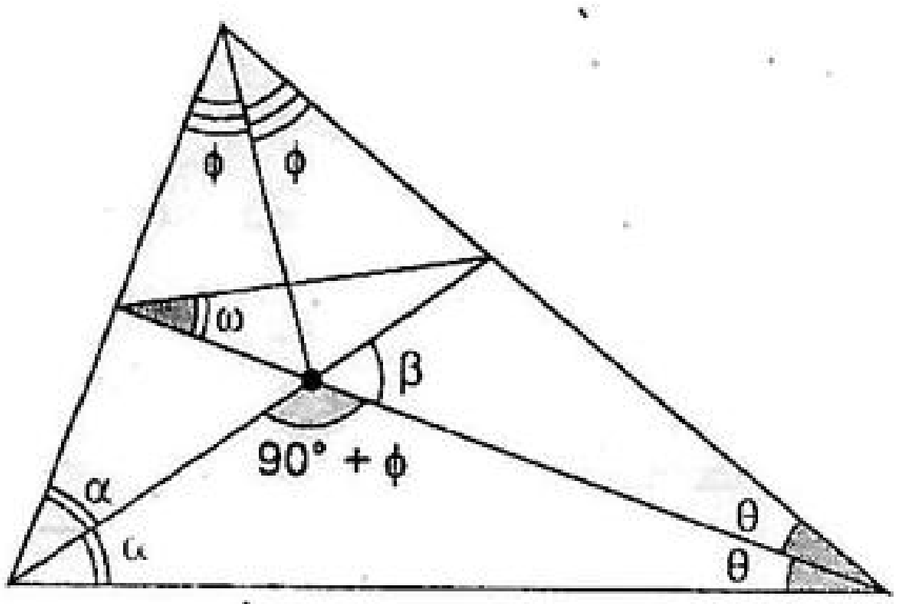
Se hará



* Completamos el triángulo y se observa lo siguiente



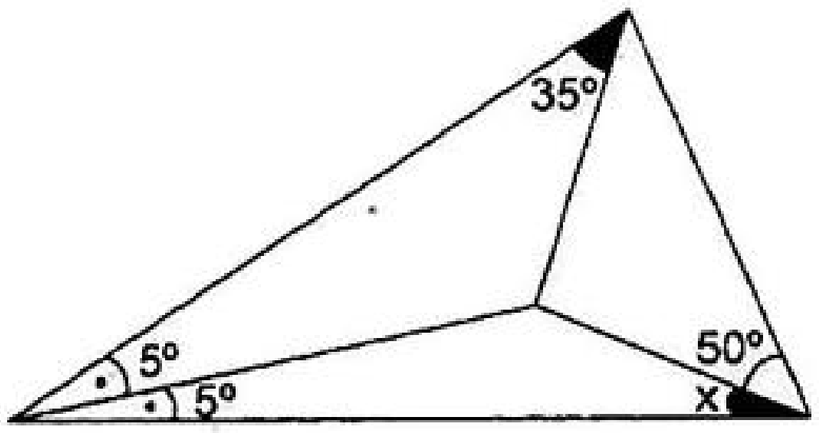




Scanned by CamScanner

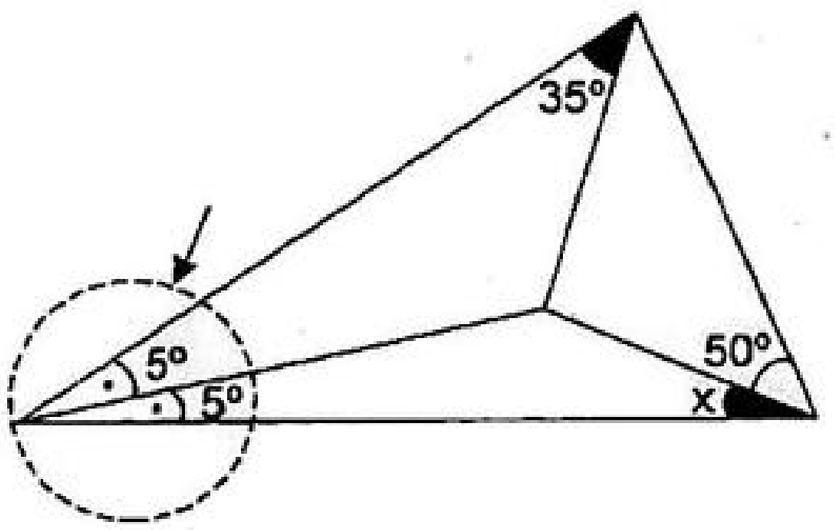
EJEMPLO Nº 01

Calcular "x"

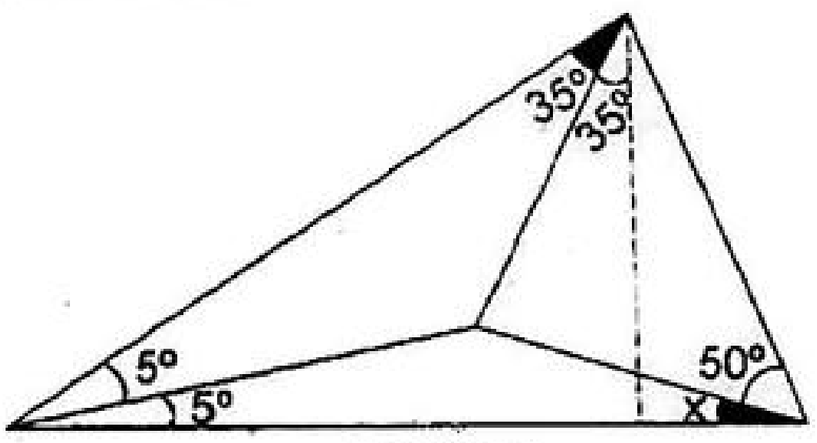


Resolución:

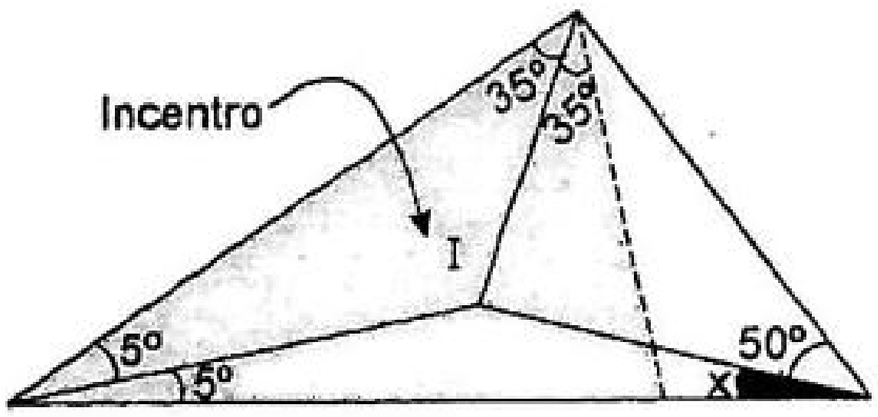
Paso Nº 1: Se observa bisectriz en un conjunto del triángulo.



Paso Nº 2: Realizamos el siguiente trazo para obtener otra bisectriz.

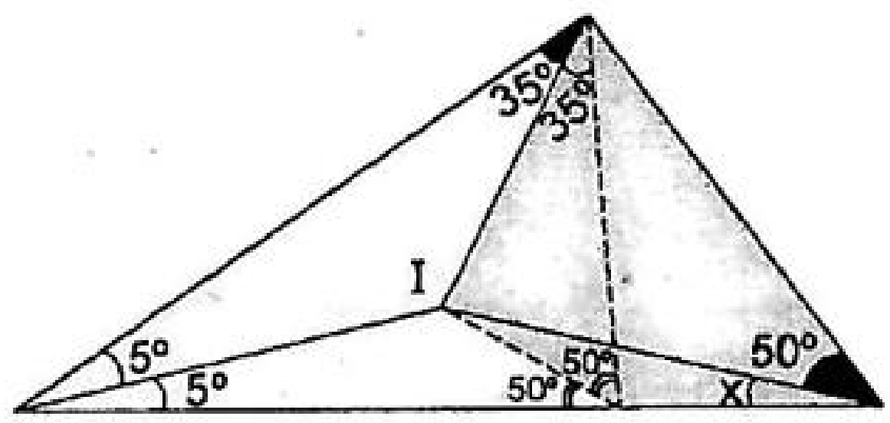


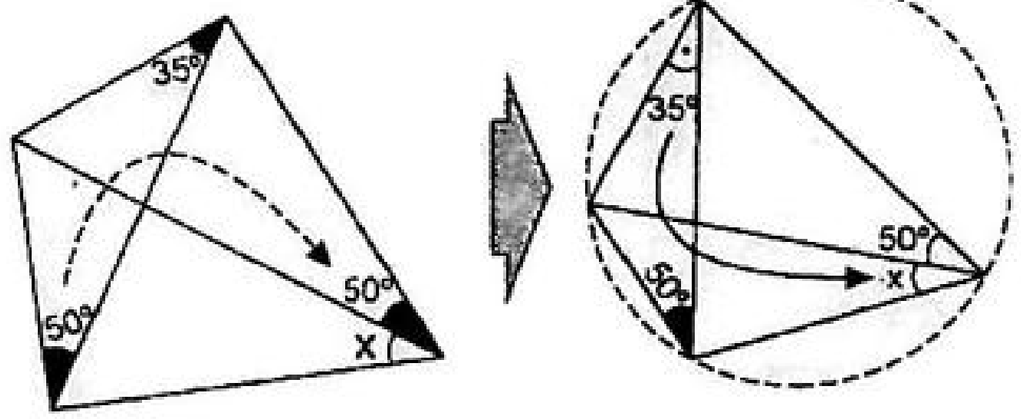
Así obtenemos el incentro en el triángulo sombreado.



Paso Nº 3: Obtenemos las tres bisectrices del triángulo sombreado.

Paso Nº 4: Ahora observamos un cuadrilátero, donde cumple la propiedad del "Pantalón o rebote"



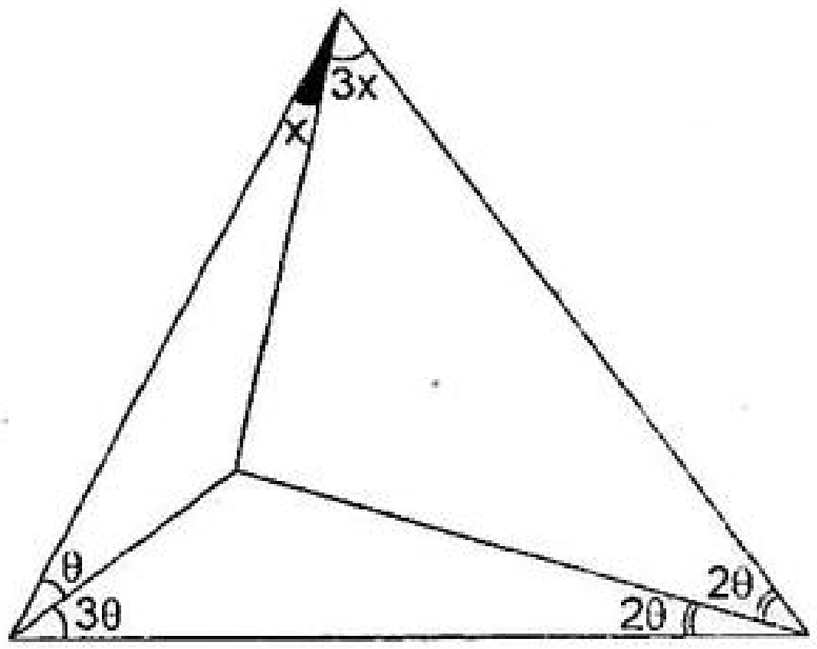


x = 35°

Scanned by CamScanner

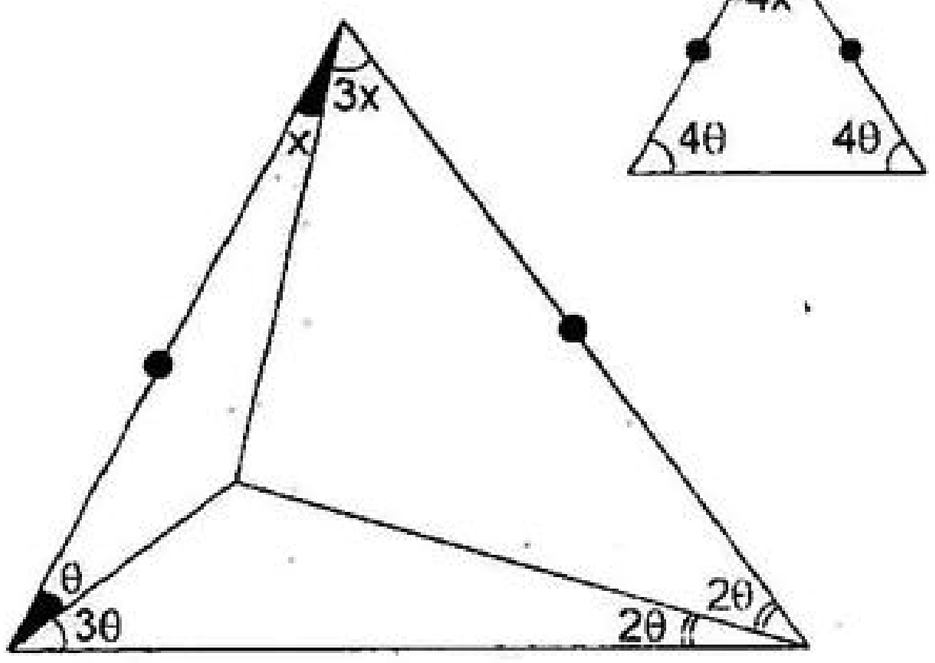
EJEMPLO Nº 02

Calcular "x".

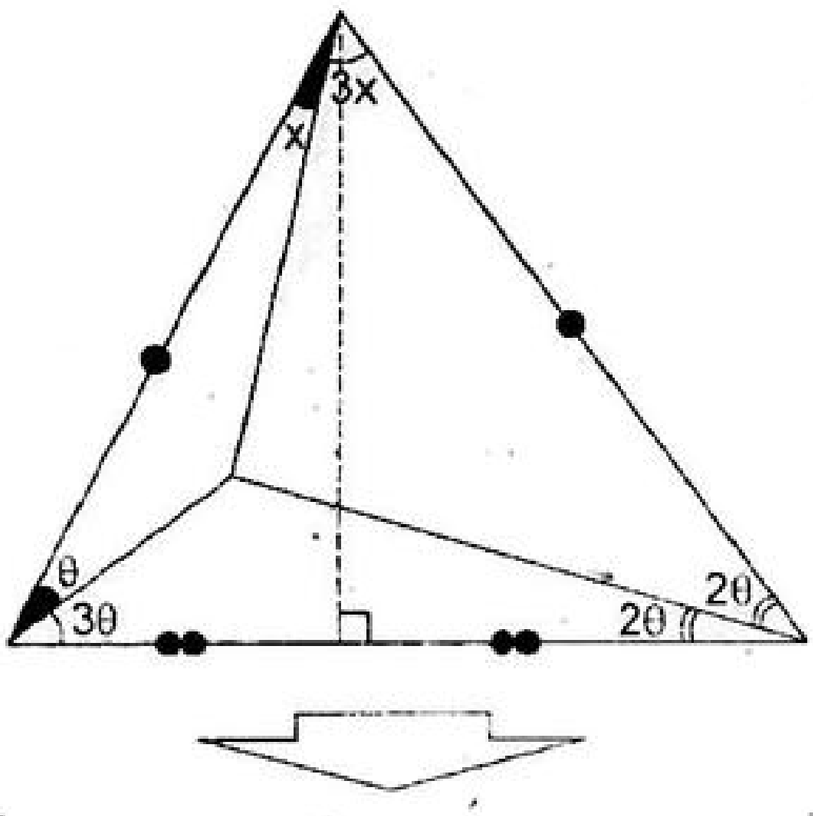


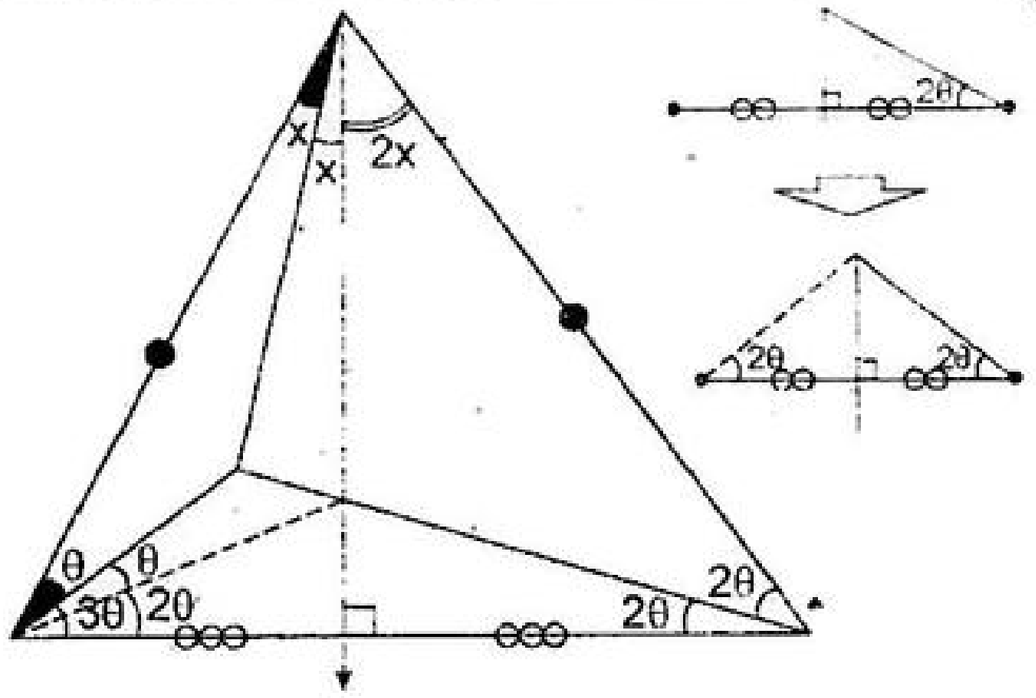
Resolución:

Paso Nº 1: Se observa que se tiene un triángulo isósceles.

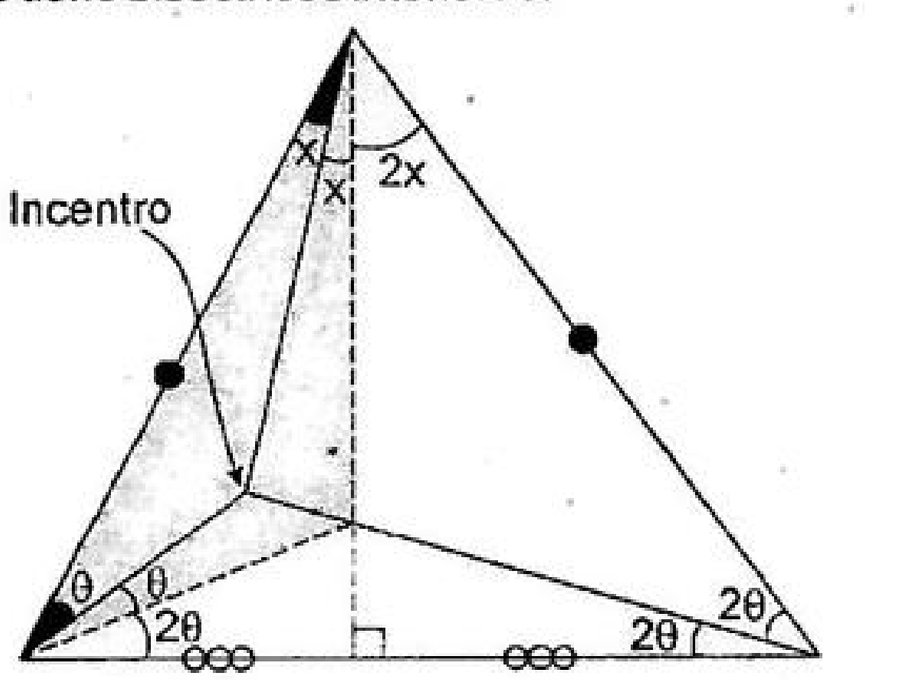


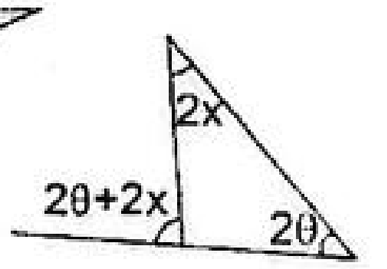
Paso Nº 2: Trazamos la altura del triángulo para así obtener (mediana, bisectriz y mediatriz)

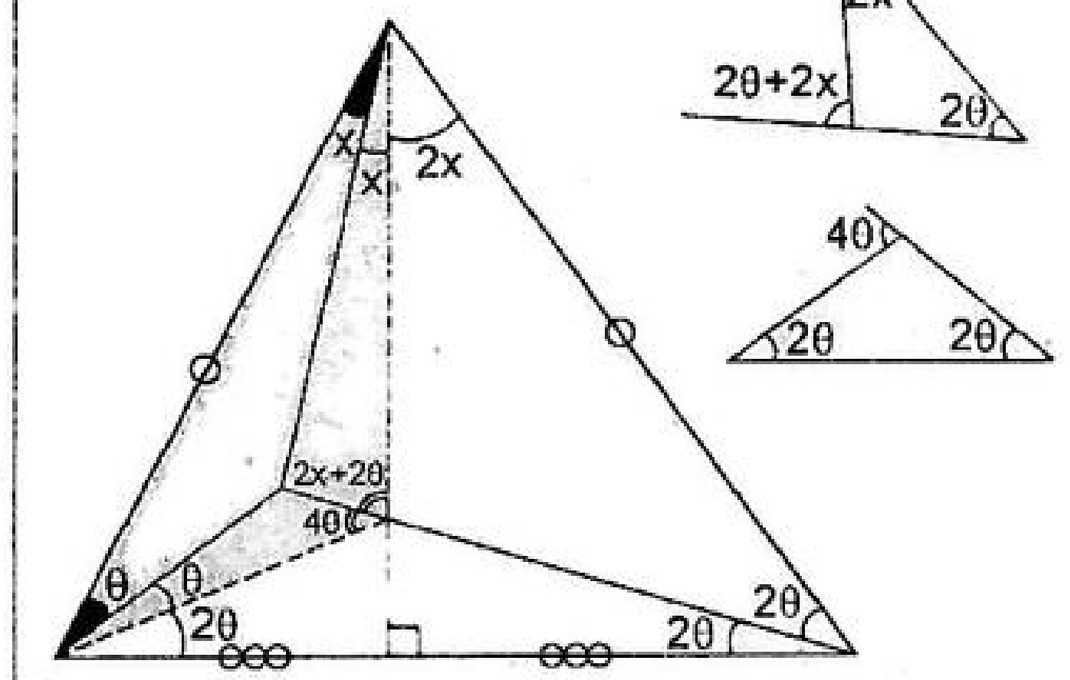




Paso Nº 3: Ahora observamos los triángulos donde se tiene bisectrices interiores.

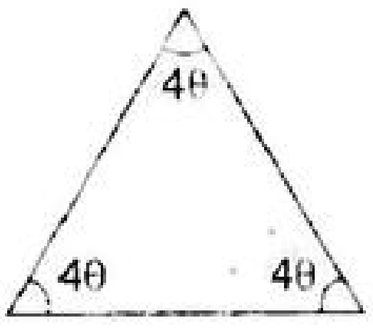






Paso Nº 4: Tenemos que:

$$2x + 2\theta = 4\theta \Rightarrow x = \theta$$



Se obtiene un triángulo equilátero

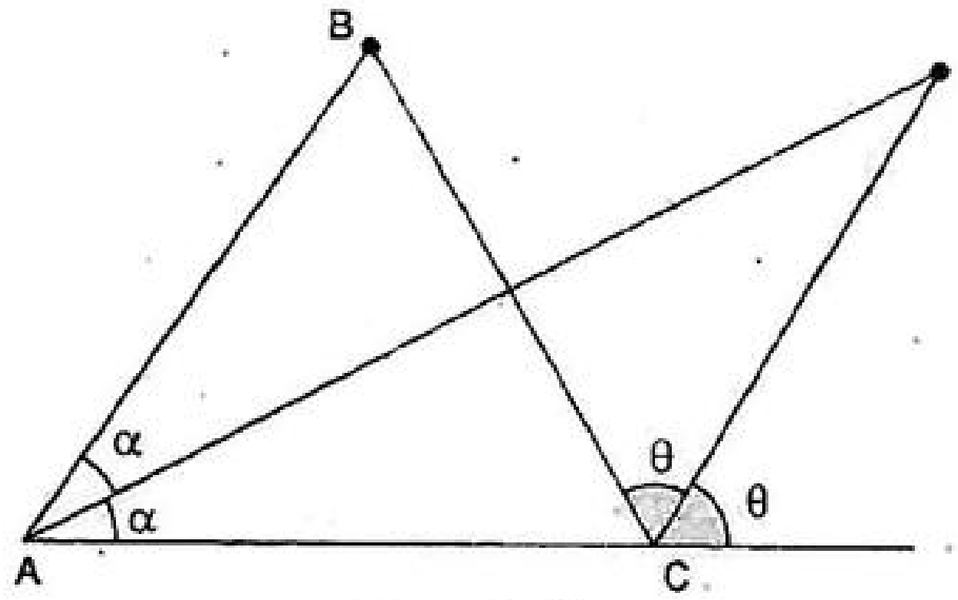
$4\theta = 60°$

$\Rightarrow \theta = 15°$

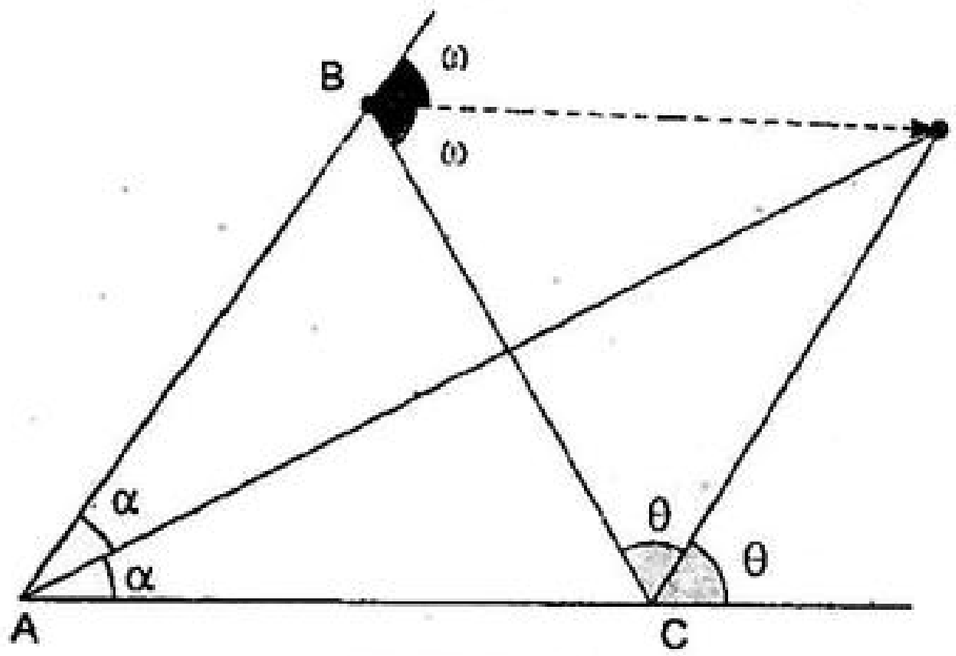
Scanned by CamScanner

CASO C: EMPLEANDO EL EXCENTRO

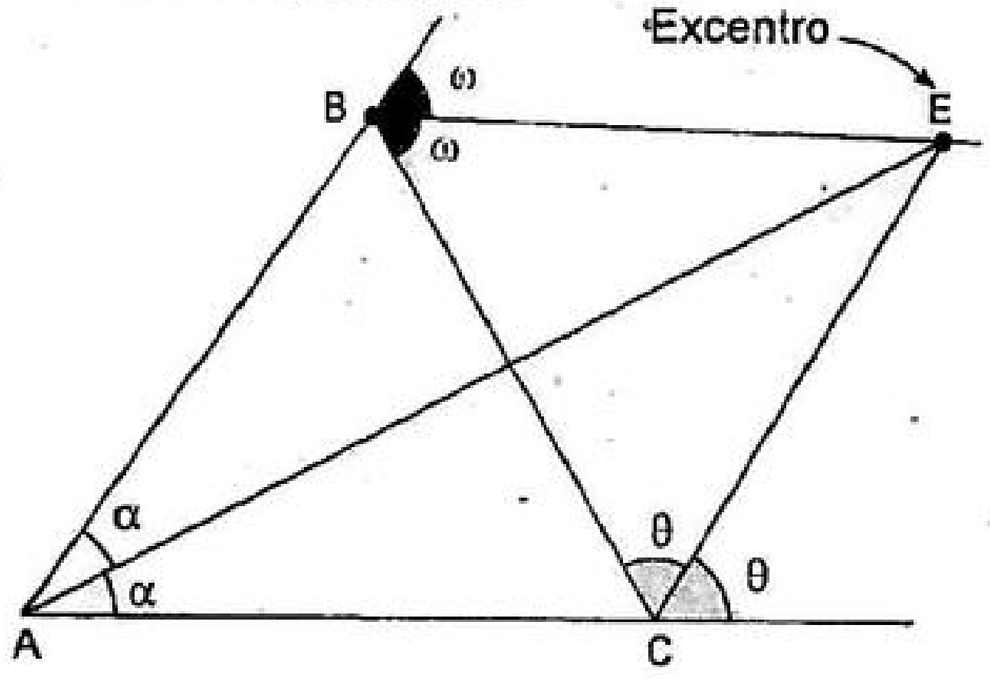
Si se tiene la siguiente figura con tales características:



Se hará



Se obtiene las tres bisectrices

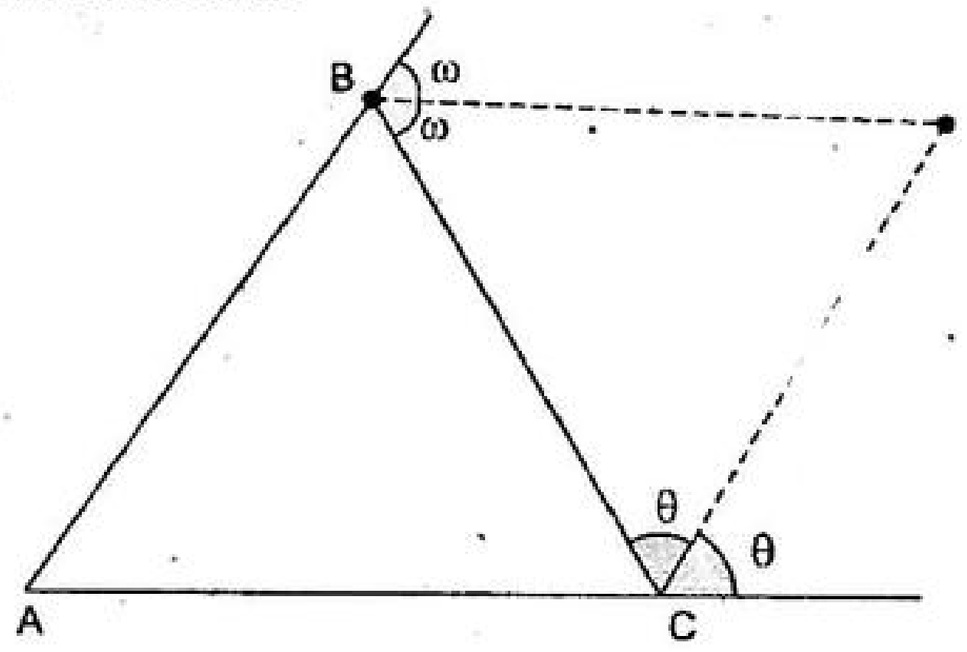


Y se cumple:

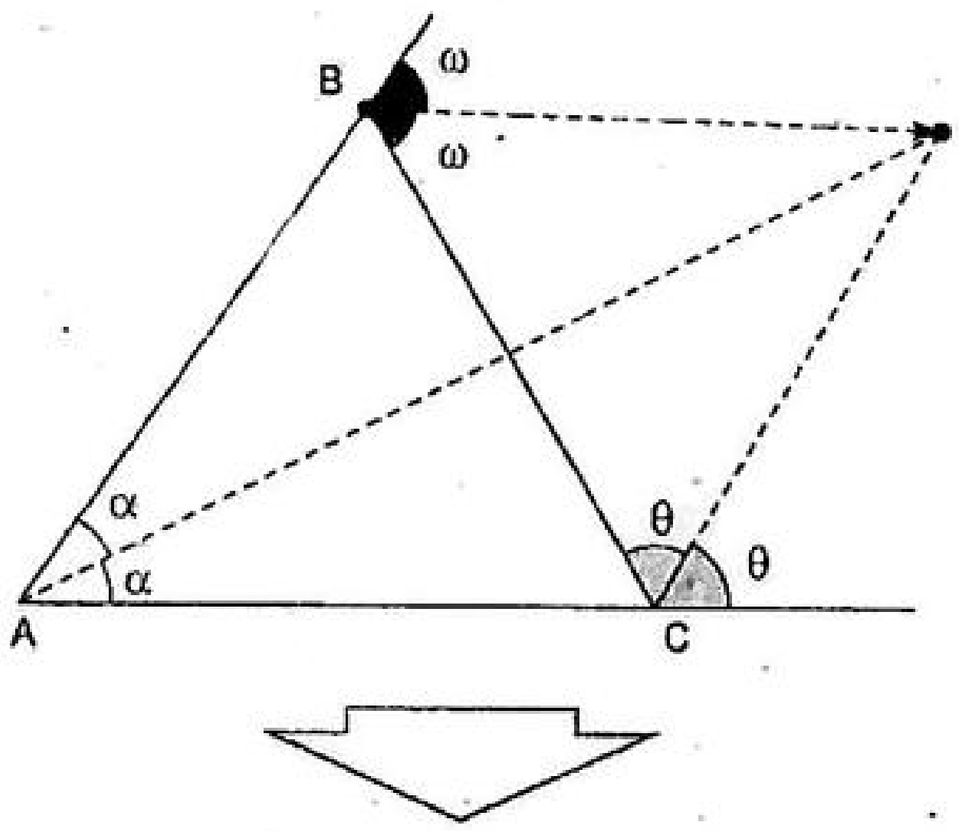
$$m\sphericalangle BEC = 90° - \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

$$m\sphericalangle AEC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

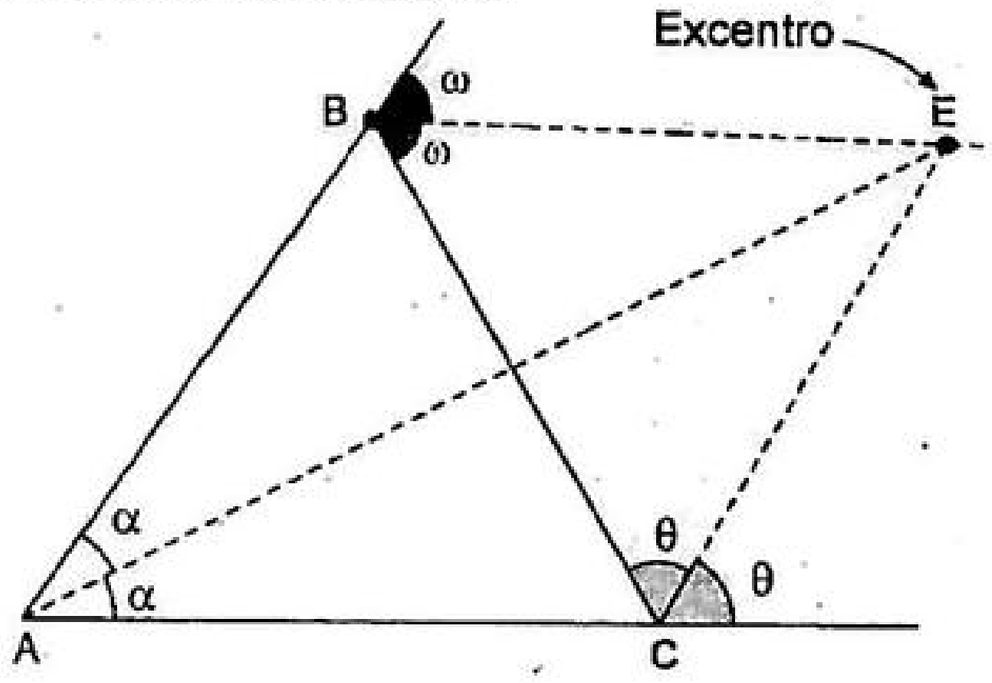
También se tiene:



Se hará



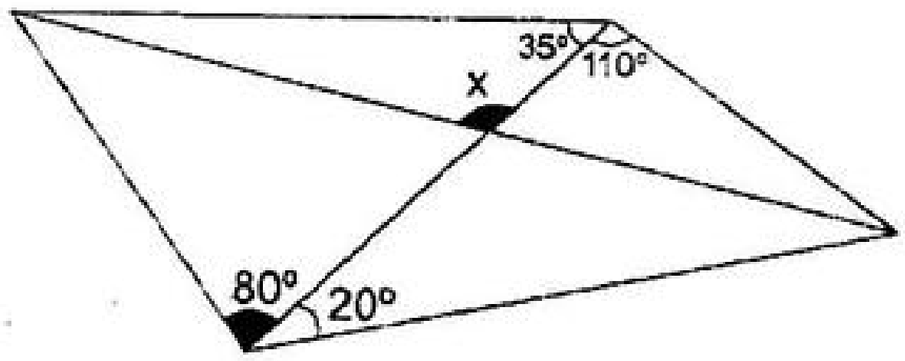
Se obtiene las tres bisectrices



Scanned by CamScanner

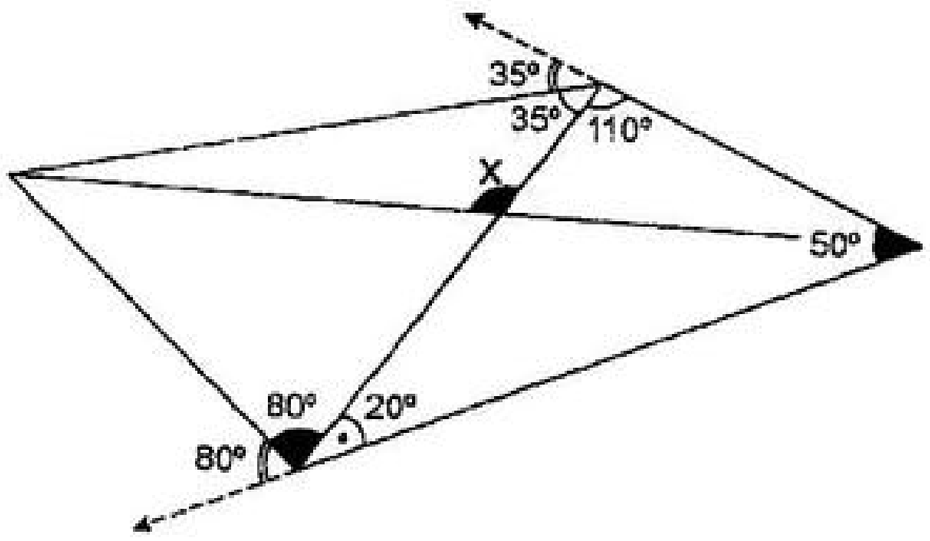
EJEMPLO Nº 01

Caso C:
Calcular "x"

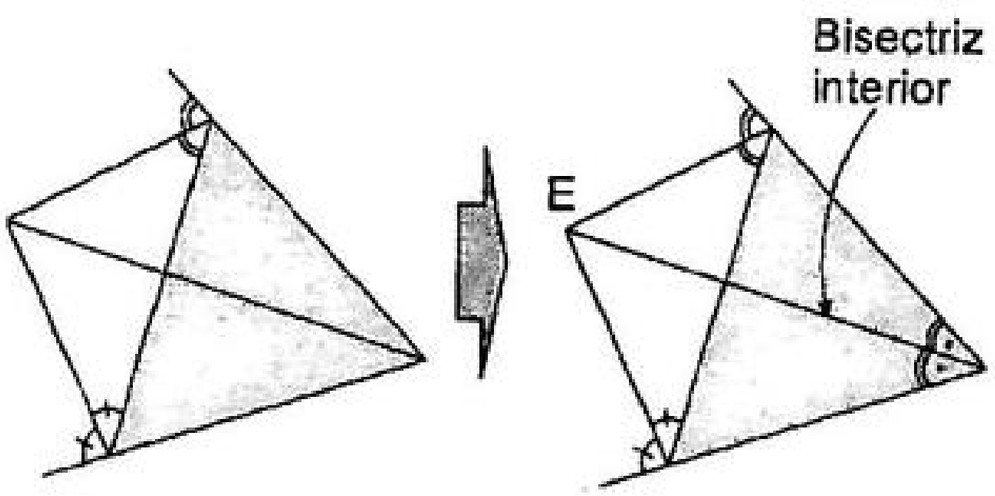


Resolución:

Paso Nº 1: Completamos los ángulos internos y externos de la figura:

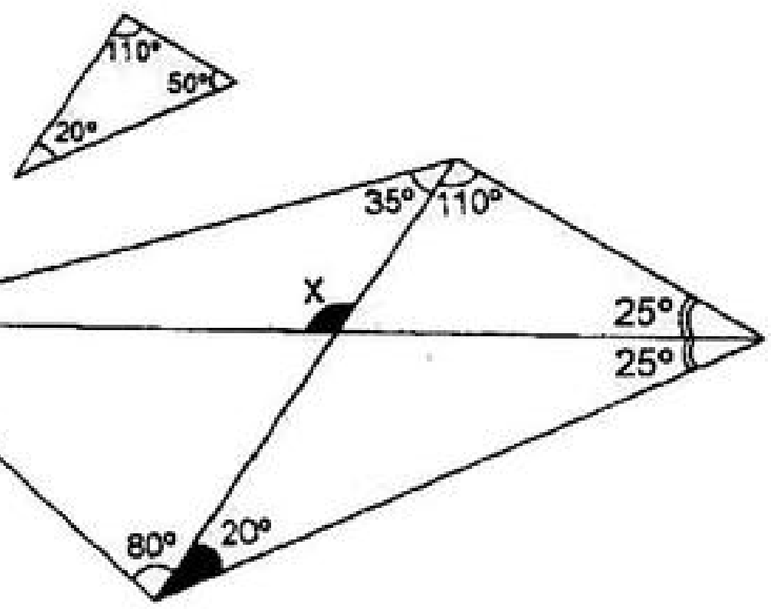


Paso Nº 2: Observamos la siguiente propiedad.

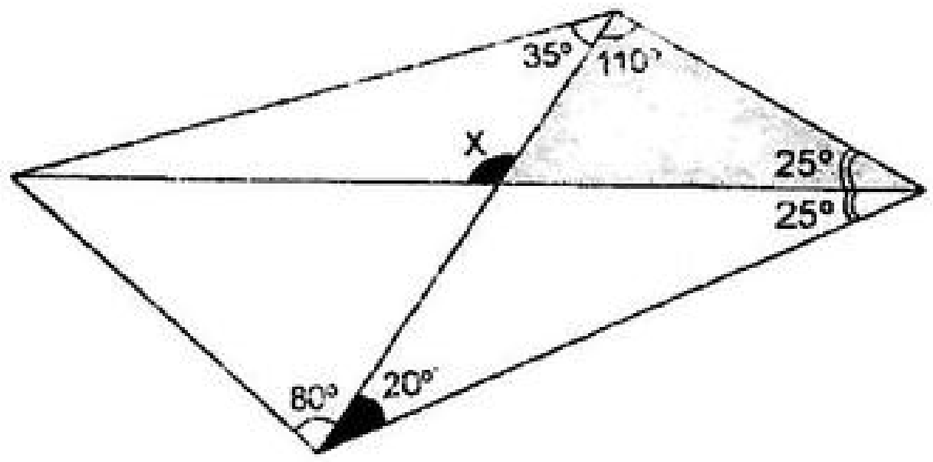


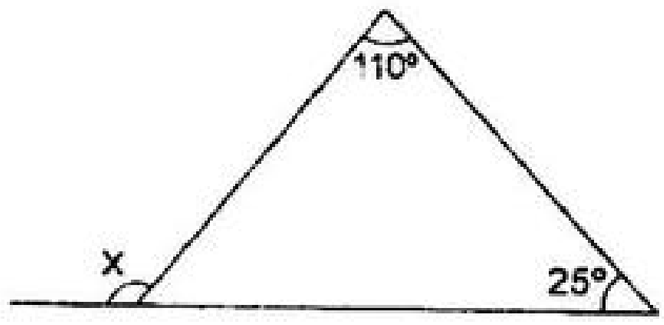
E → Excentro

También:



Paso Nº 3: Obtenemos la siguiente figura donde se cumple:



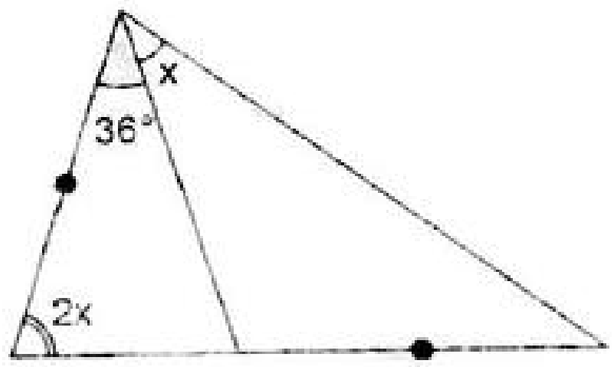


x = 135°

Scanned by CamScanner

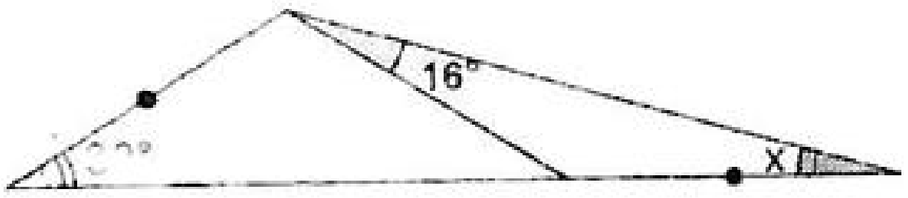
Problemas Resueltos

01. Calcular x



A) 18° B) 30° C)36°
D) 54° E) 72°

02. Calcular x

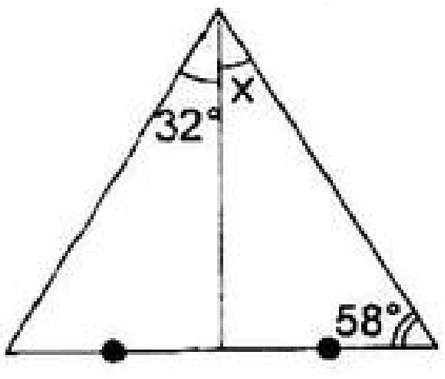


A) 15° B) 18° C)30°
D) 36° E) 37°

03. Calcular x

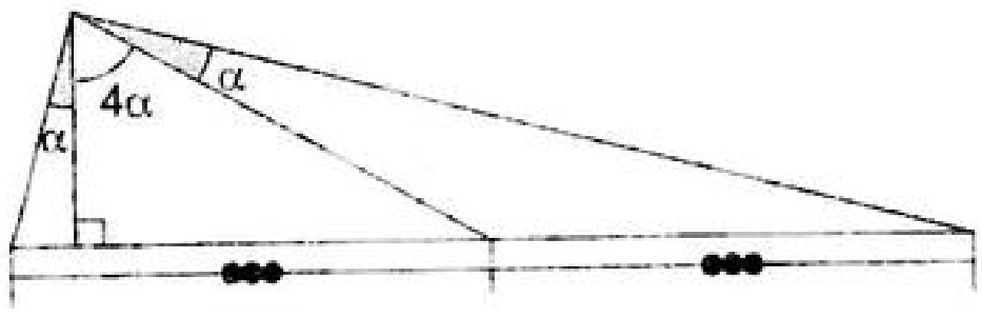
A) 9° B) 12° C)15°
D) 16° E) 18°

04. Calcular x



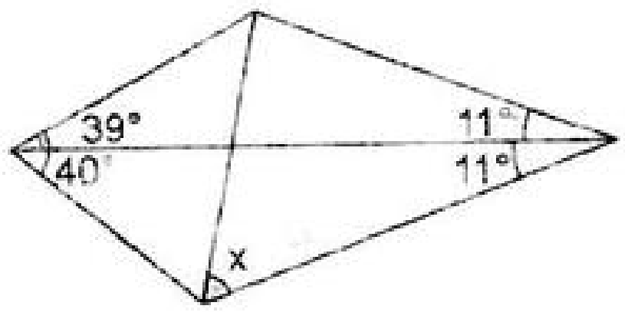
A) 29° B) 32° C)36°
D) 58° E) 64°

05. Calcular x



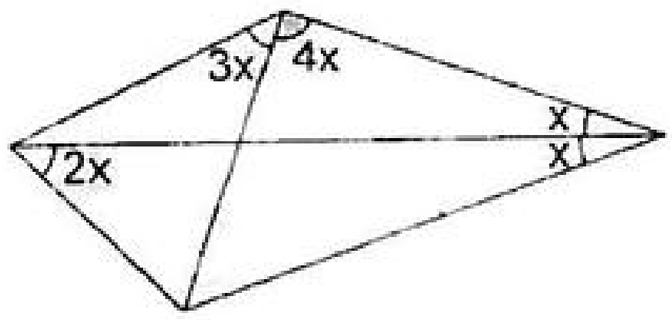
A) 15° B) 18° C) 22°30'
D) 35° E) 40°

06. Calcular x



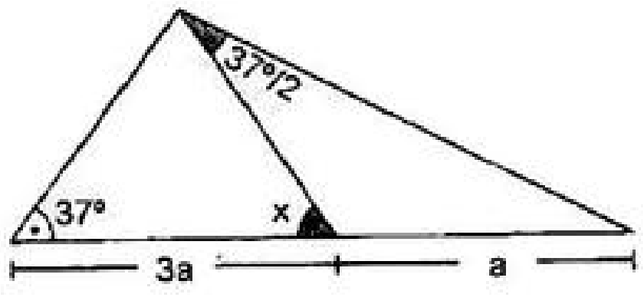
A) 68° B) 78° C)88°
D) 90° E) 79°

07. Calcular x



A) 15° B) 18° C)20°
D) 22,5° E) 30°

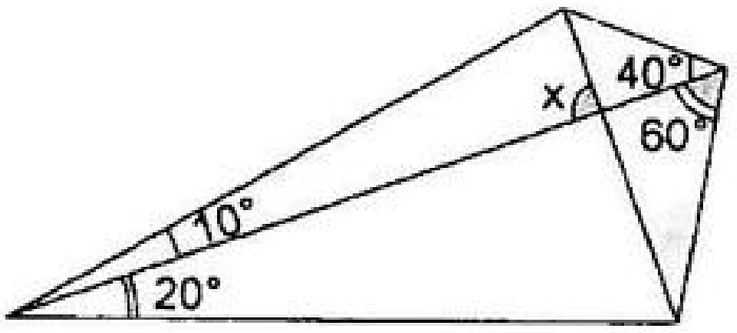
08. Calcular x



A) 45° B) 37° C)53°
D) 60° E) 30°

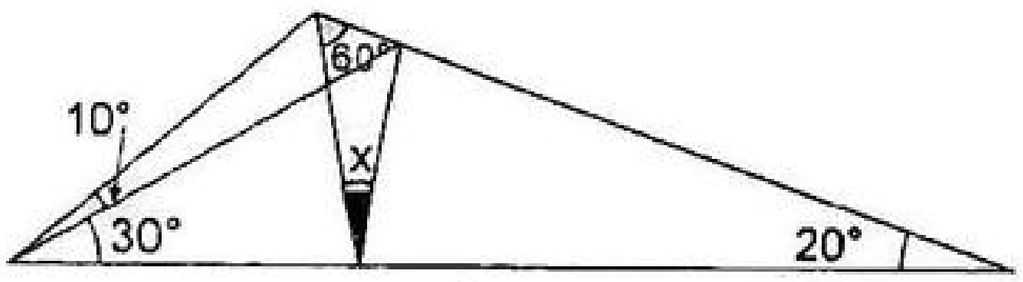
Scanned by CamScanner

09. Calcular x



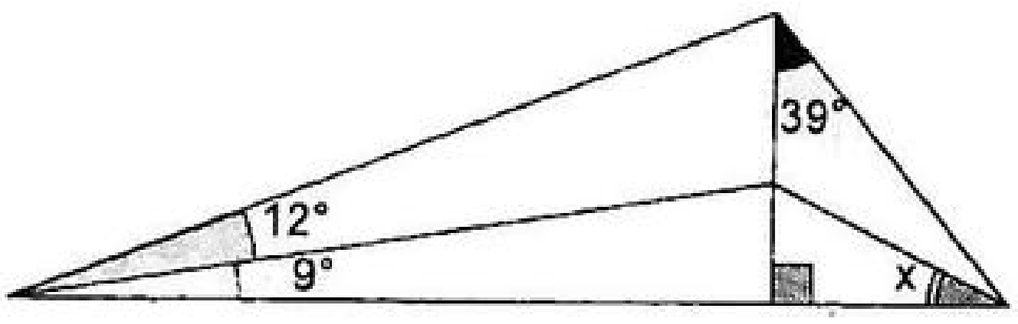
A) 10° B) 18° C) 15°
D) 20° E) 18°

10. Calcular x.



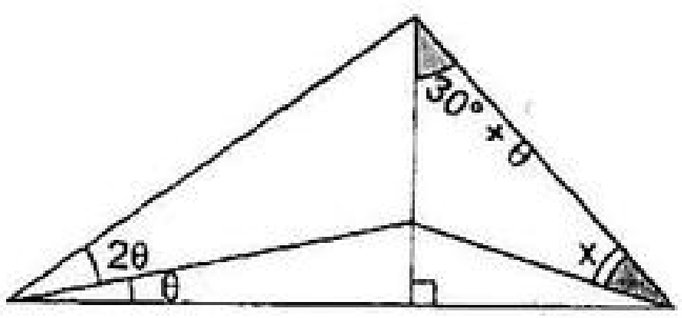
A) 15° B) 20° C) 22°30'
D) 25° E) 30°

11. Calcular x,



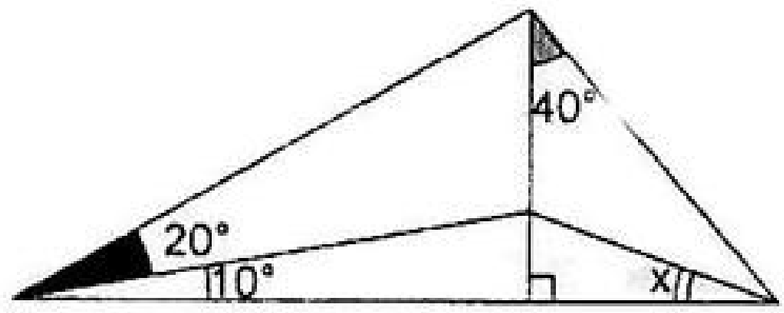
A) 20° B) 40° C) 35°
D) 50° E) 45°

12. Calcular x



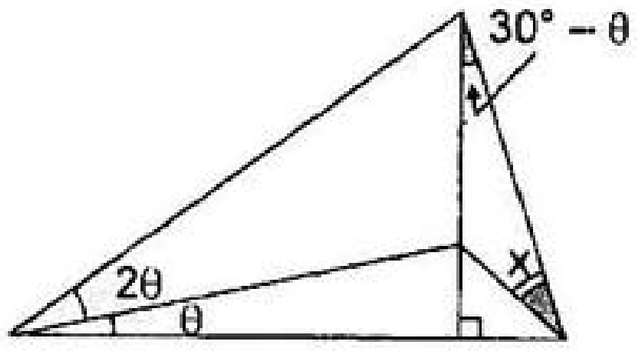
A) 32° B) 30° C) 64°
D) 58° E) 48°

13. Calcular x



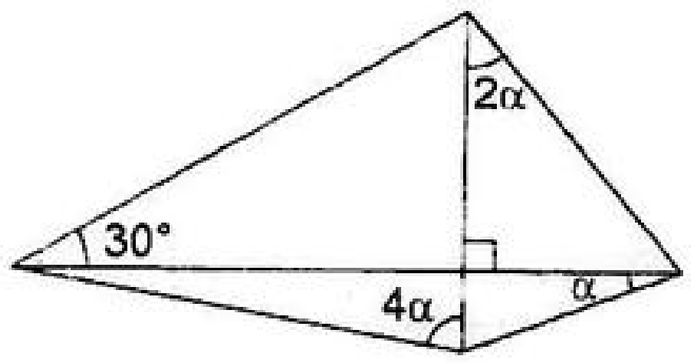
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 22°30' E) 30°

14. Calcular x



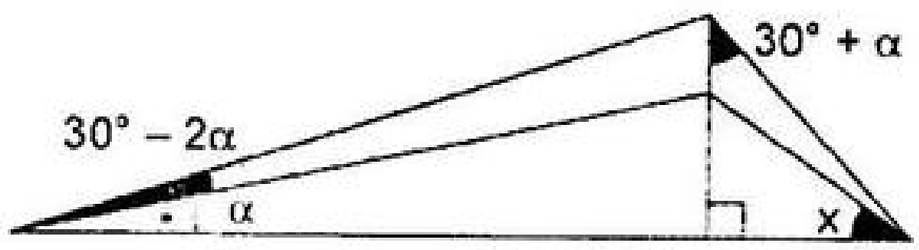
A) 30° B) 36° C) 22°30'
D) 20°30' E) 45°

15. Calcular x



A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 22°30'

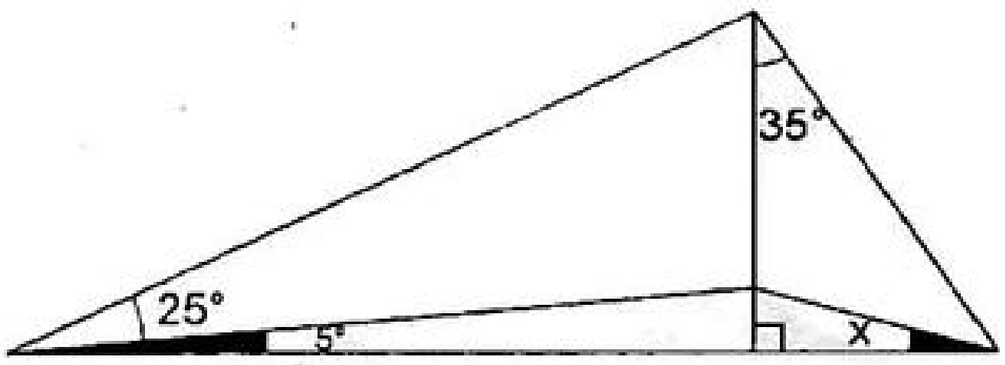
16. Calcular x



A) α B) 30° – α C) 60° – 2α
D) 2α E) 3α

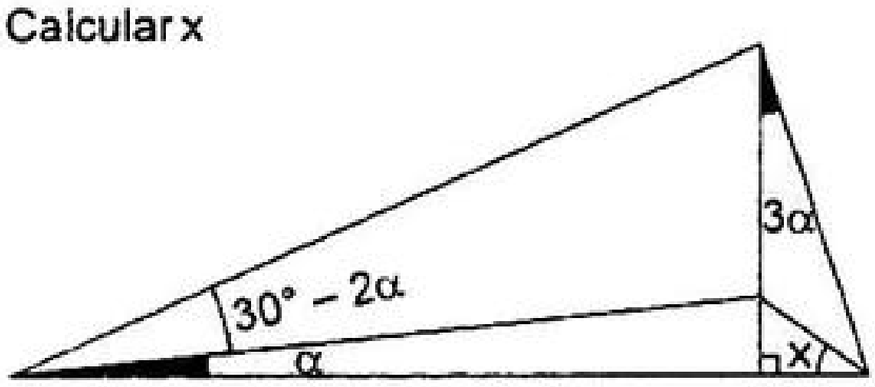
Scanned by CamScanner

17. Calcular x



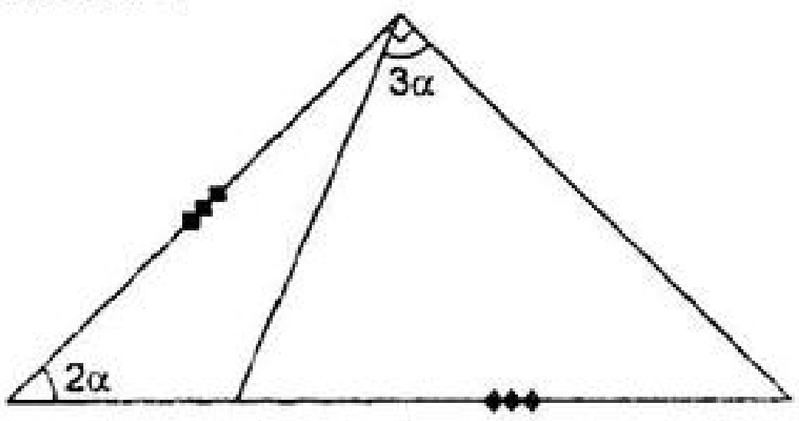
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

18. Calcular x



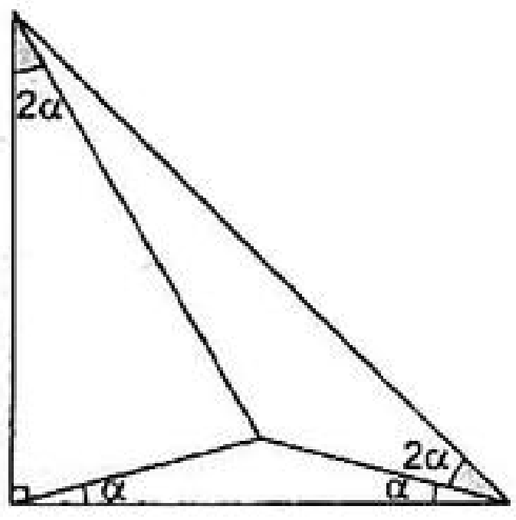
A) 30° – α B) 60° – α C) 30°
D) 2α E) 30° + α

19. Calcular α



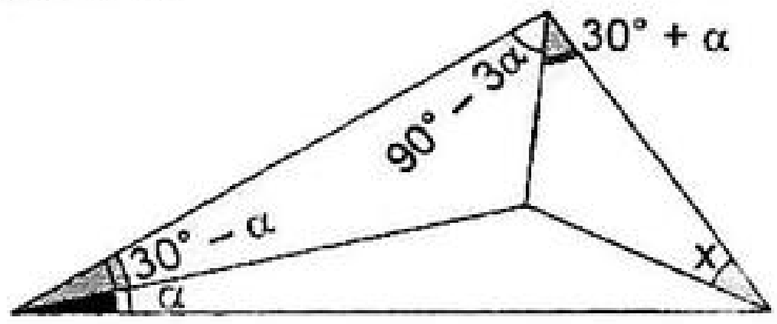
A) 15° B) 18° C) 20°
D) 22° 30' E) 26° 30'

20. Calcular α



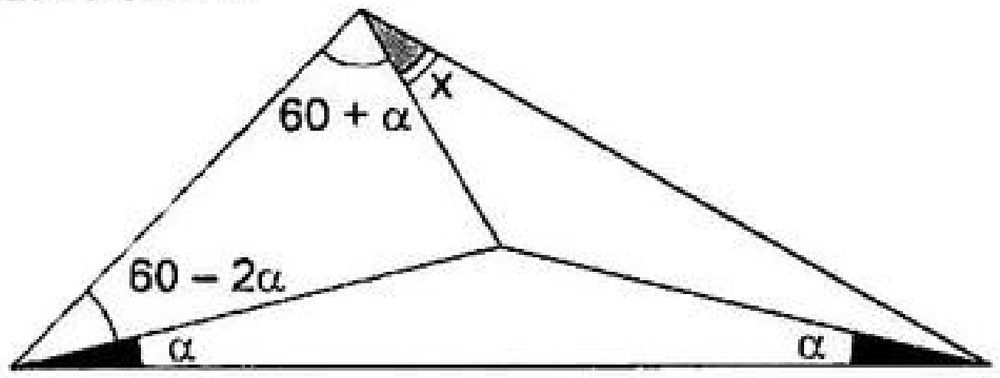
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° 30' E) 22° 30'

21. Calcular x



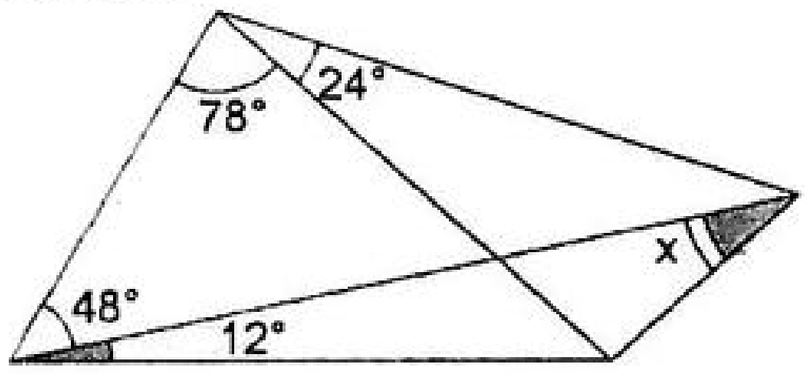
A) 18° B) 20° C) 30°
D) 37° E) 45°

22. Calcular x



A) 18° B) 18° 30' C) 22° 30'
D) 30° E) 32°

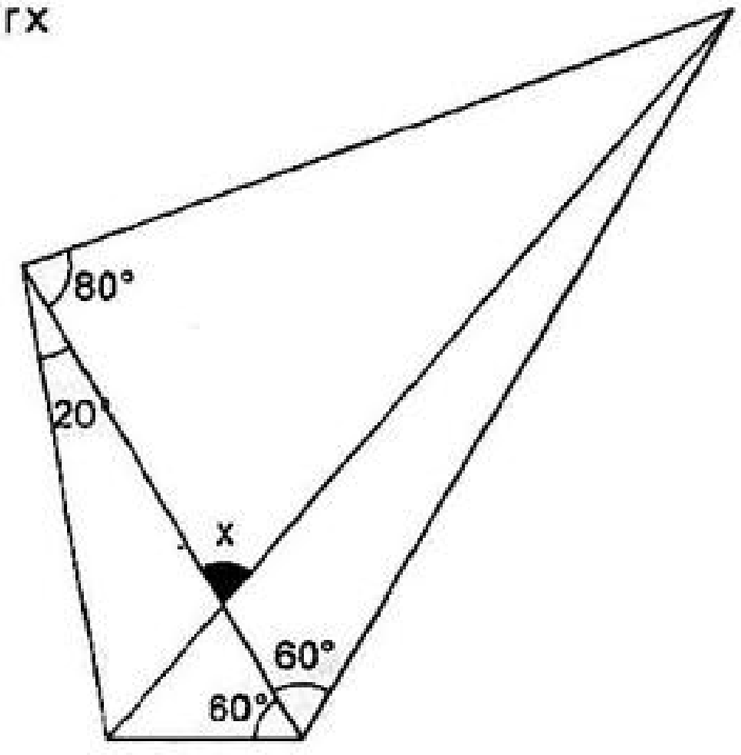
23. Calcular x



A) 18° B) 24° C) 30°
D) 36° E) 48°

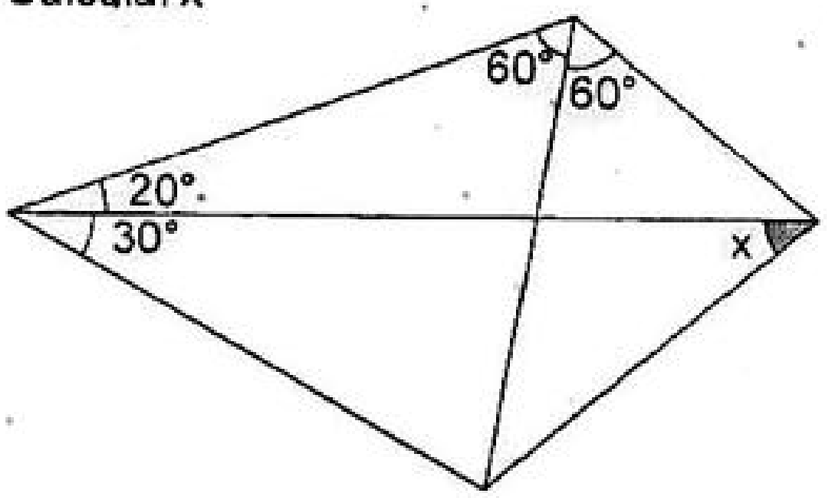
24. Calcular x

A) 65°
B) 70°
C) 75°
D) 80°
E) 90°



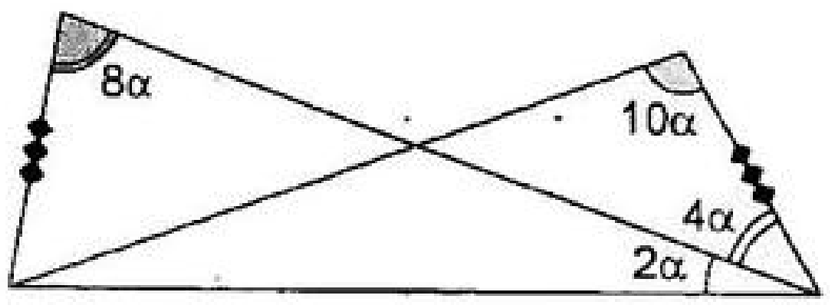
Scanned by CamScanner

25. Calcular x



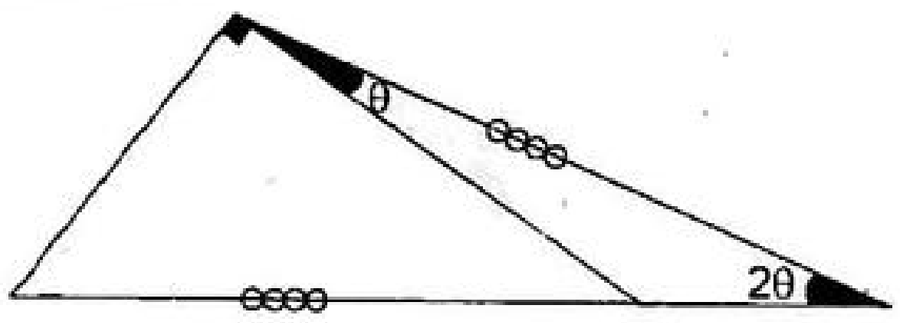
A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

26. Calcular α



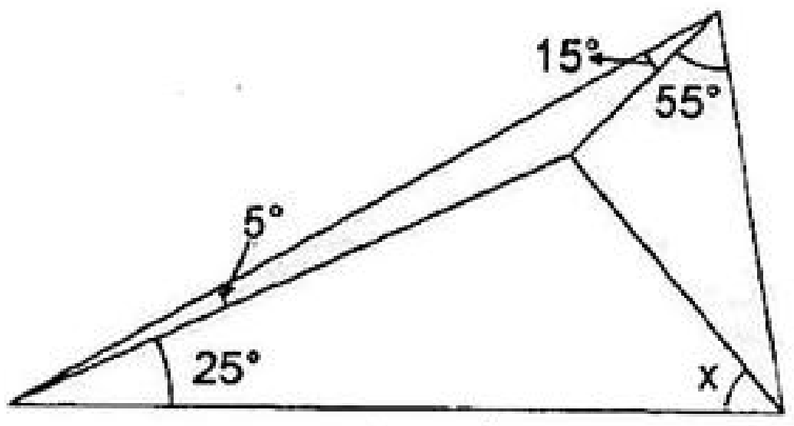
A) 8° B) 9° C) 10°
D) 12° E) 15°

27. Calcular x



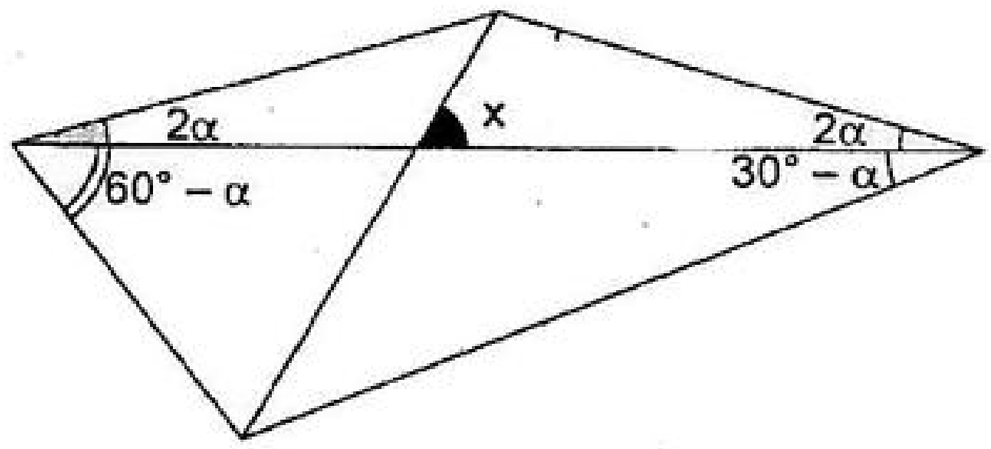
A) 18° B) 22° 30' C) 26° 30'
D) 30° E) 32°

28. Calcular x



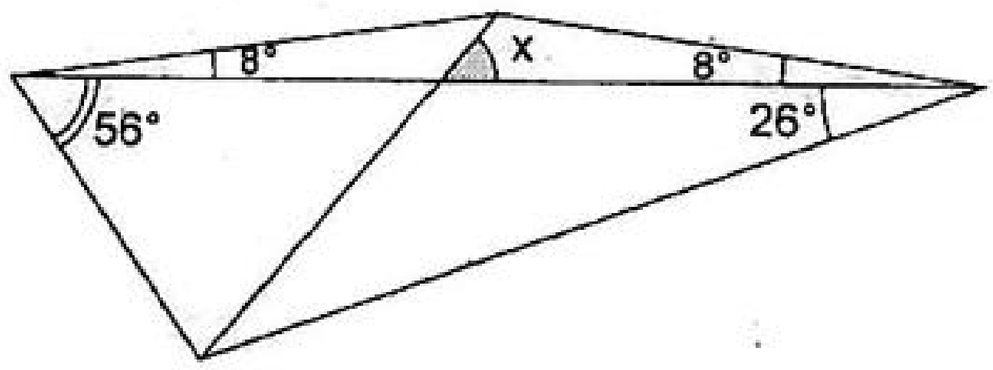
A) 45° B) 50° C) 55°
D) 60° E) 65°

29. Calcular x



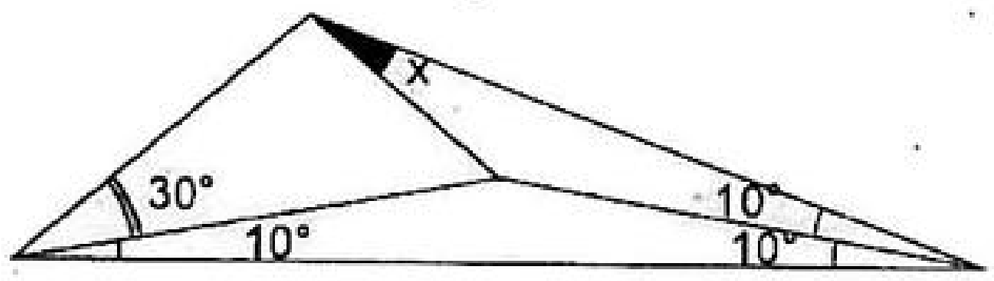
A) 50° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 70°

30. Calcular x



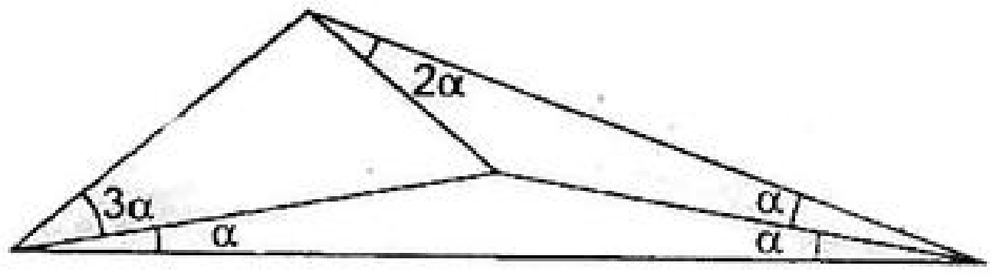
A) 50° B) 55° C) 58°
D) 60° E) 65°

31. Calcular x



A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 23°

32. Calcular a

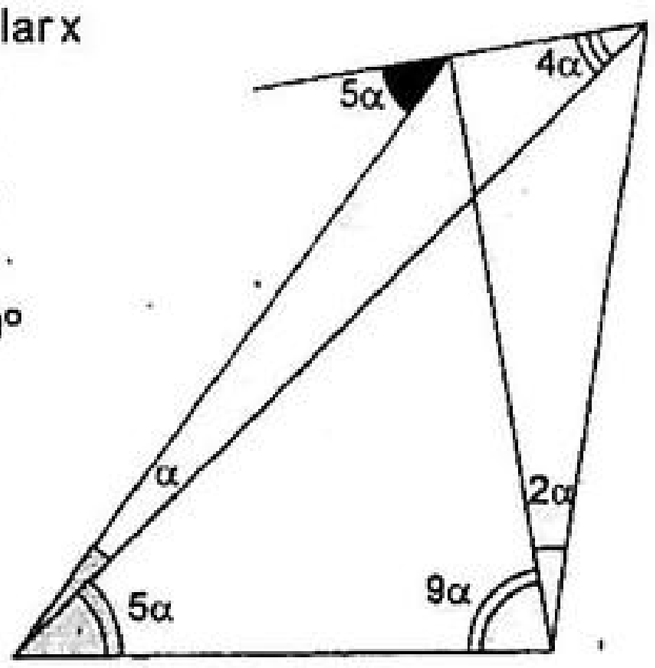


A) 8° B) 9° C) 10°
D) 12° E) 13°

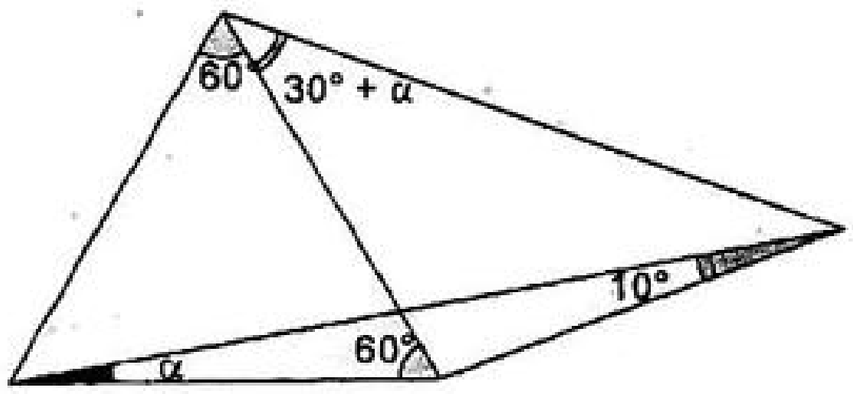
Scanned by CamScanner

33. Calcular x

A) 6°
B) 7°
C) 8°
D) 9°
E) 10°

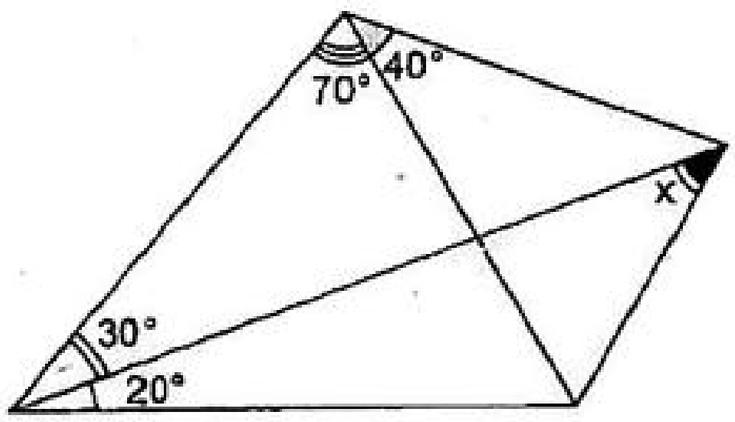


34. Calcular α



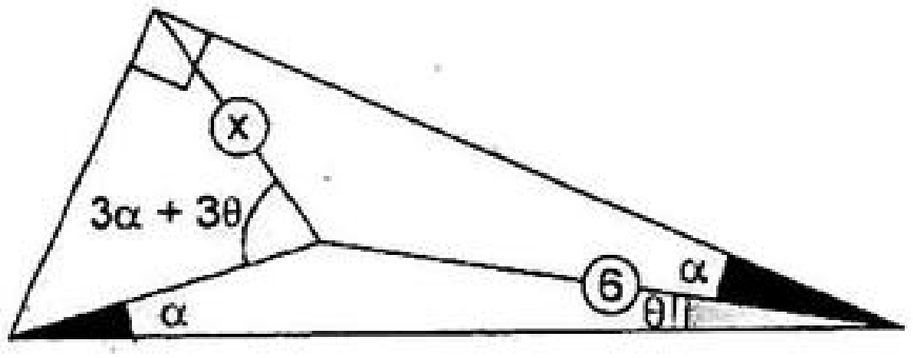
A) 9° B) 10° C)12°
D) 15° E) 18°

35. Calcular x



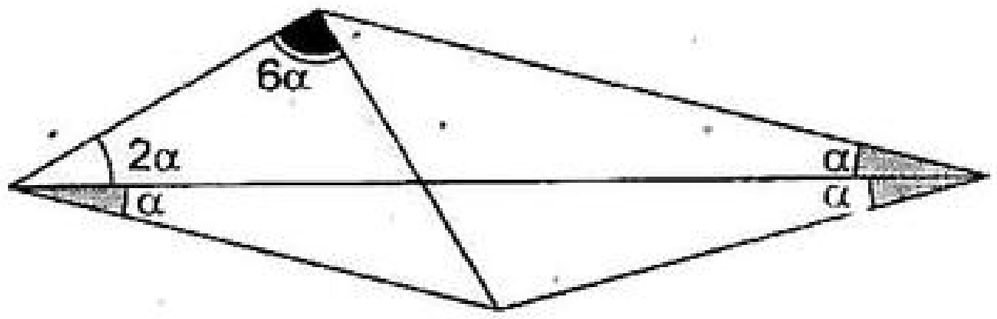
A) 30° B) 35° C)40°
D) 45° E) 50°

36. Calcular x



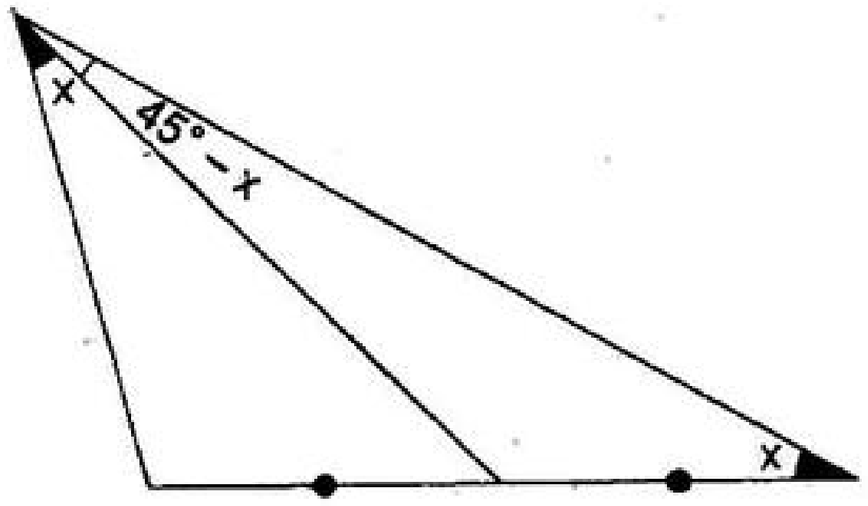
A) 2° B) 3° C)4°
D) 5° E) 6°

37. Calcular x



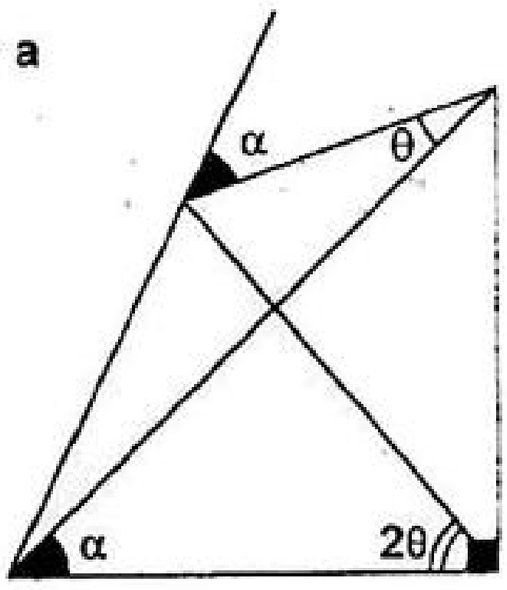
A) 10° B) 12° C)15°
D) 18° E) 18° 30'

38. Calcular x



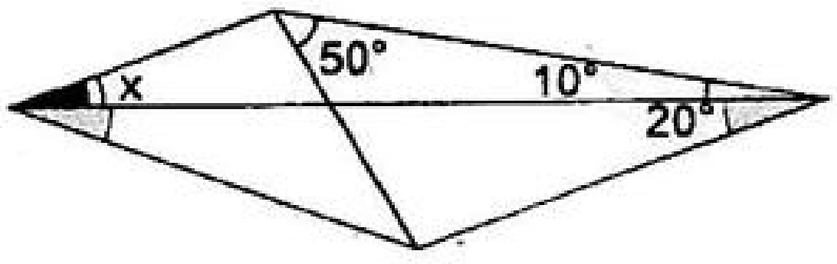
A) 18° B) 22° 30' C)28° 30'
D) 30° E) 36°

39. Calcular a



A) 30° B) 36° C)54°
D) 60° E) 45°

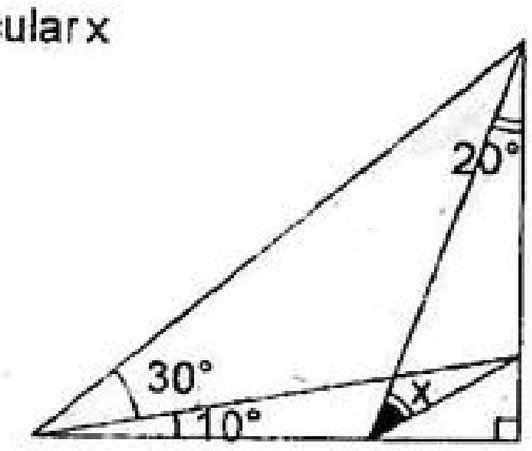
40. Calcular x



A) 15° B) 18° C)20°
D) 25° E) 30°

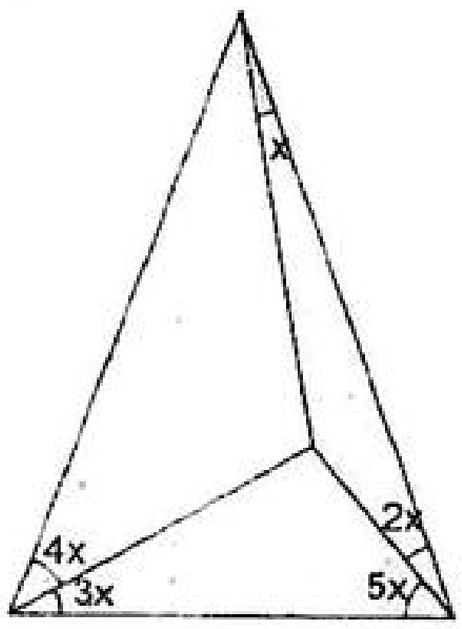
Scanned by CamScanner

41. Calcular x



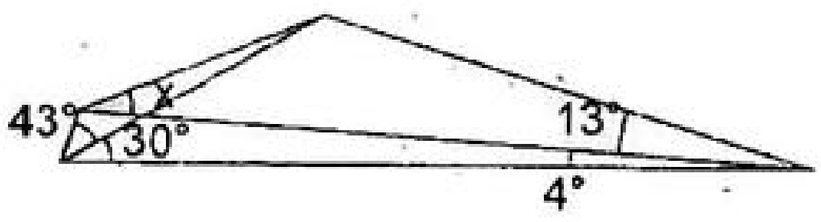
A) 20° B) 30° C)36°
D) 40° E) 45°

42. Calcular x



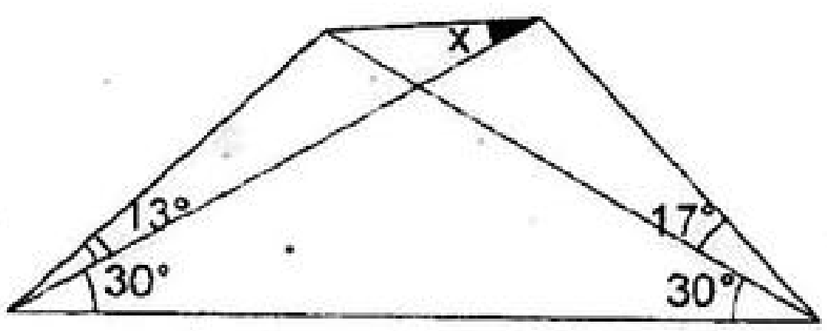
A) 8° B) 9° C)10°
D) 12° E) 13°

43. Calcular x



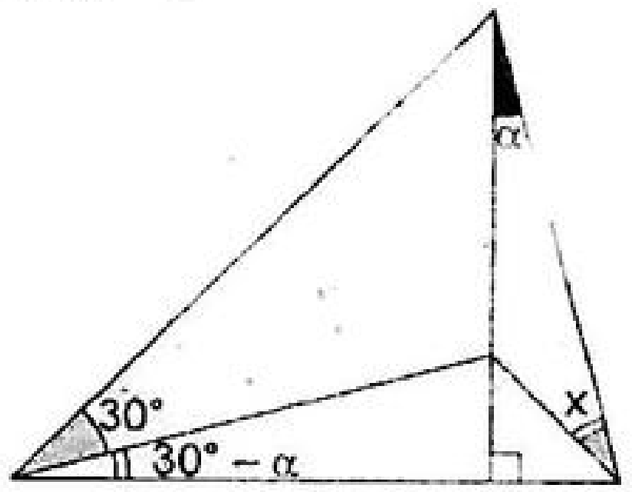
A) 18° B) 22° 30' C)26° 30'
D) 26° E) 30°

44. Calcular x



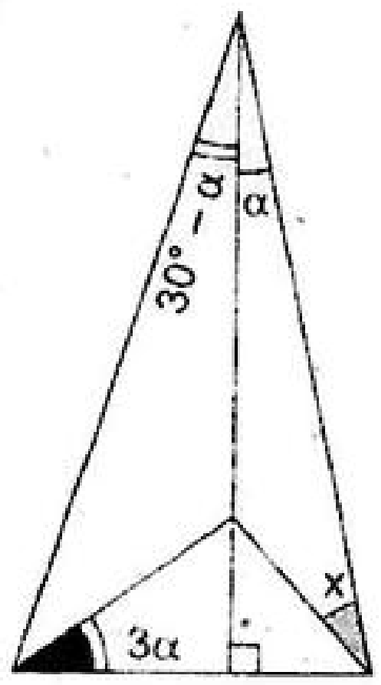
A) 20° B) 22° C)22° 30'
D) 26° E) 26° 30'

45. Calcular x



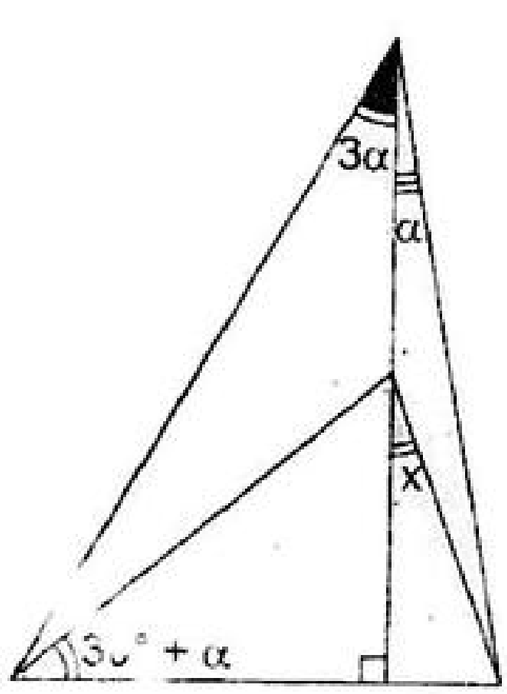
A) 30° − α B) 30° + α C)60° − 2α
D) α E) 2α

46. Calcular x



A) 18° B) 26° C)26° 30'
D) 30° E) 32°

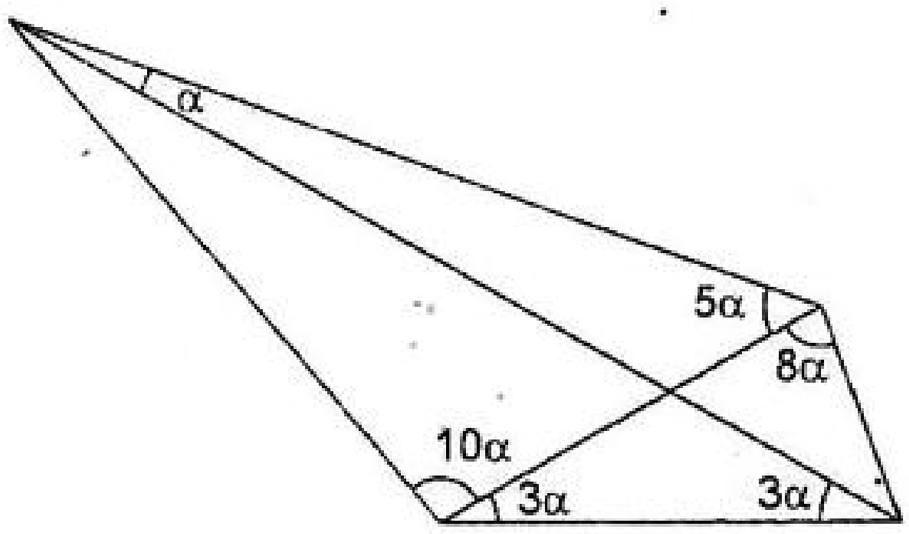
47. Calcular x



A) 30° B) 60° − α C)30° − 2α
D) 30° − α E) 2α

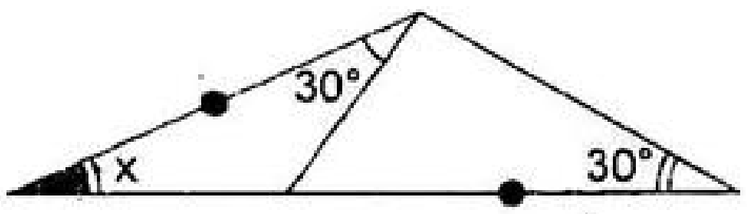
Scanned by CamScanner

48. Calcular a



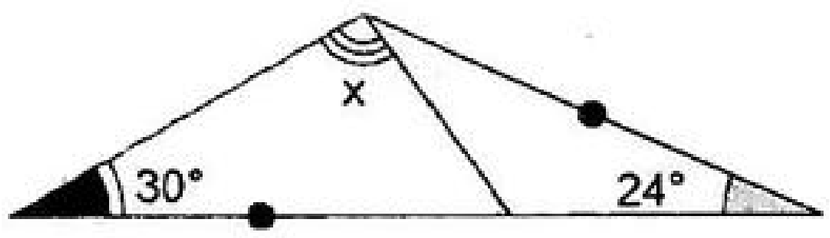
A) 9° B) 10° C)12°
D) 15° E) 8°

49. Calcular x



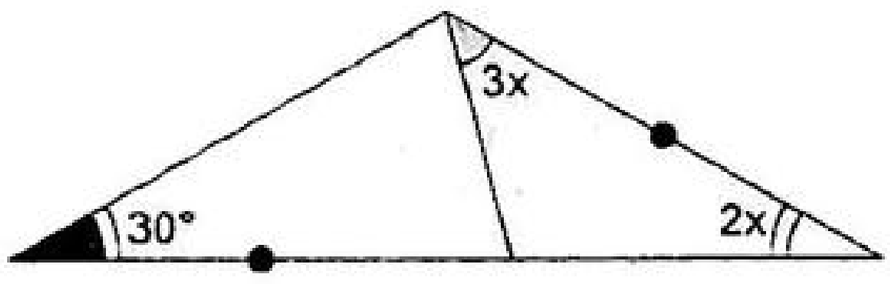
A) 18° B) 20° C)24°
D) 26° 30' E) 18° 30'

50. Calcular x



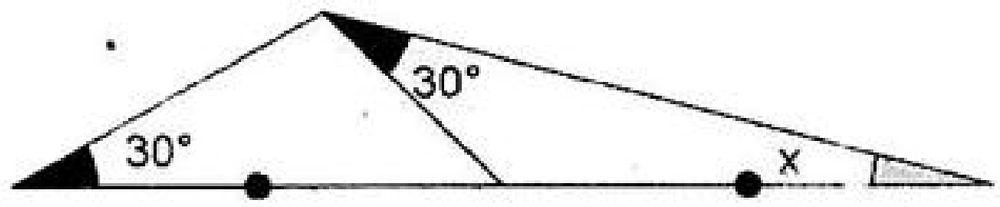
A) 90° B) 92° C)96°
D) 100° E) 120°

51. Calcular x



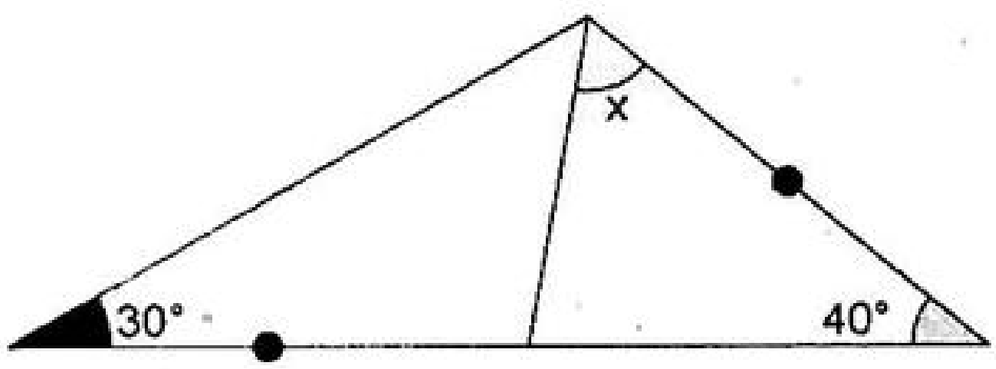
A) 10° B) 12° C)14°
D) 15° E) 18°

52. Calcular x



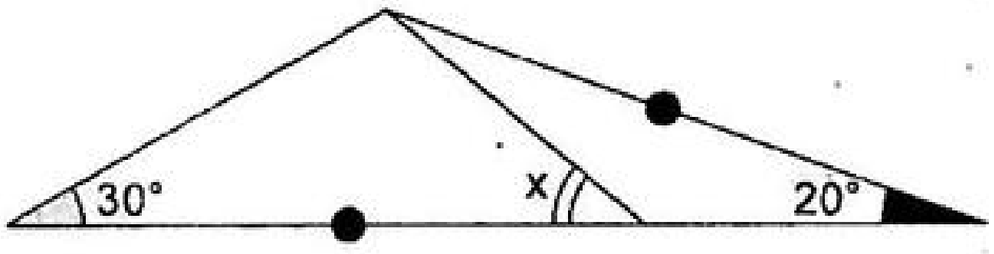
A) 9° B) 10° C)12°
D) 15° E) 18°

53. Calcular x



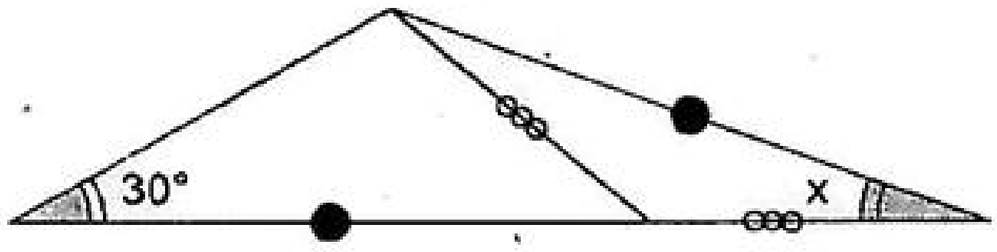
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

54. Calcular x



A) 30° B) 37° C)40°
D) 42° E) 53°

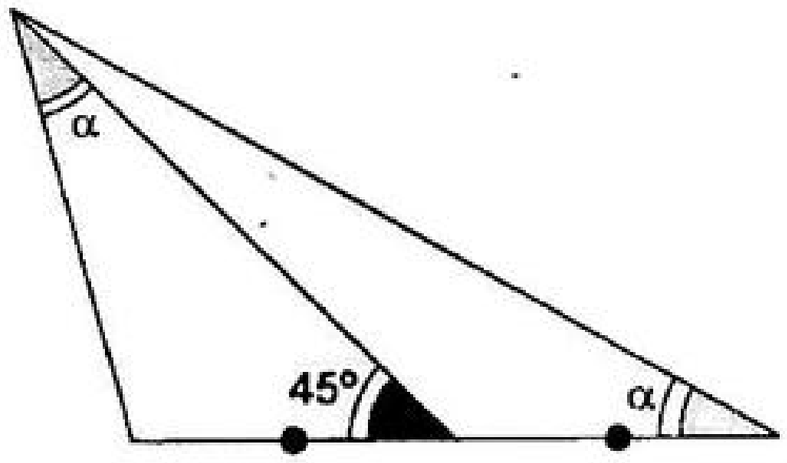
55. Calcular x



A) 10° B) 20° C)15°
D) 18° E) 22° 30'

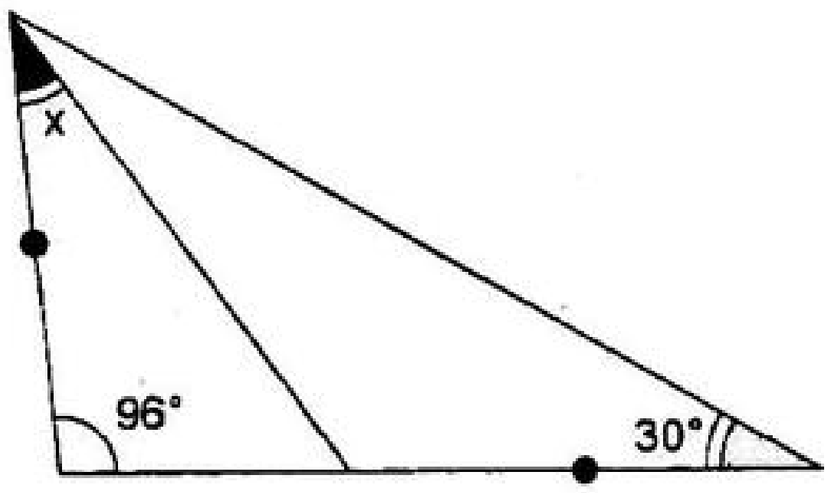
Scanned by CamScanner

56. Calcular a



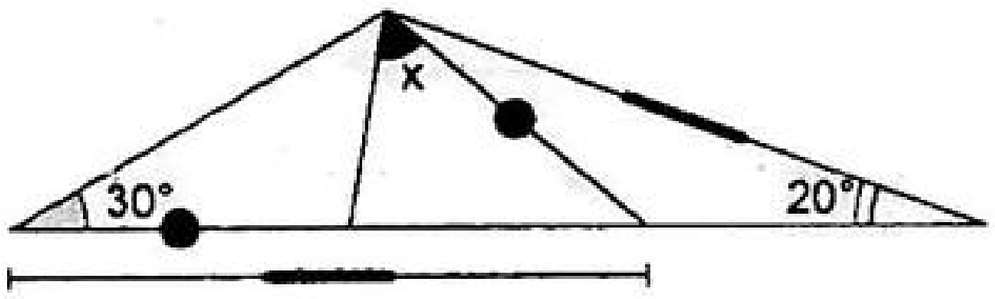
A) 0° B) 24° C)30°
D) 37° E) 36°

57. Calcular x



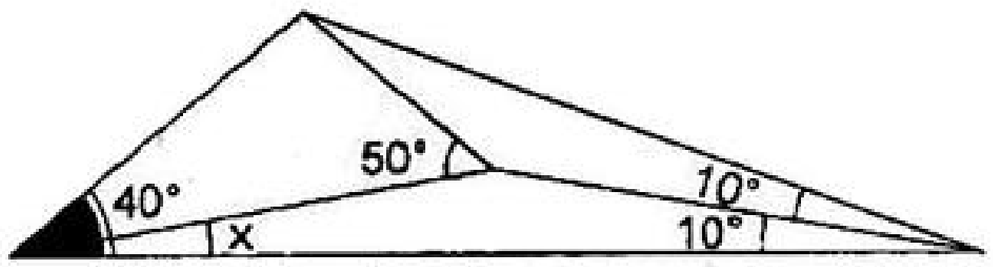
A) 30° B) 36° C)37°
D) 60° E) 24°

58. Calcular x



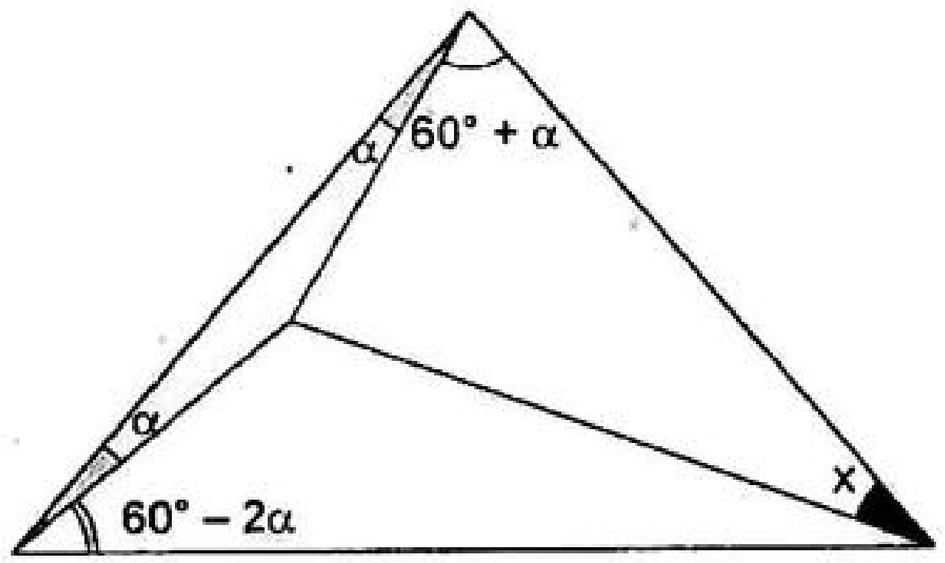
A) 30° B) 45° C)53°
D) 60° E) 70°

59. Calcular x



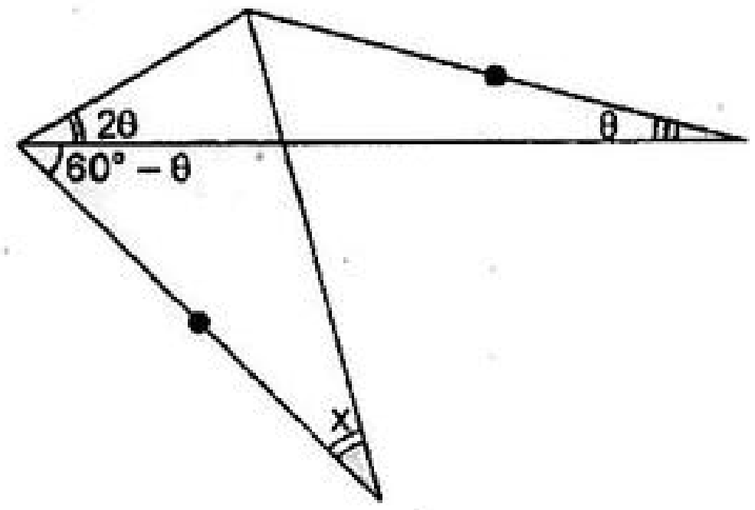
A) 10° B) 12° C)14°
D) 15° E) 8°

60. Calcular x



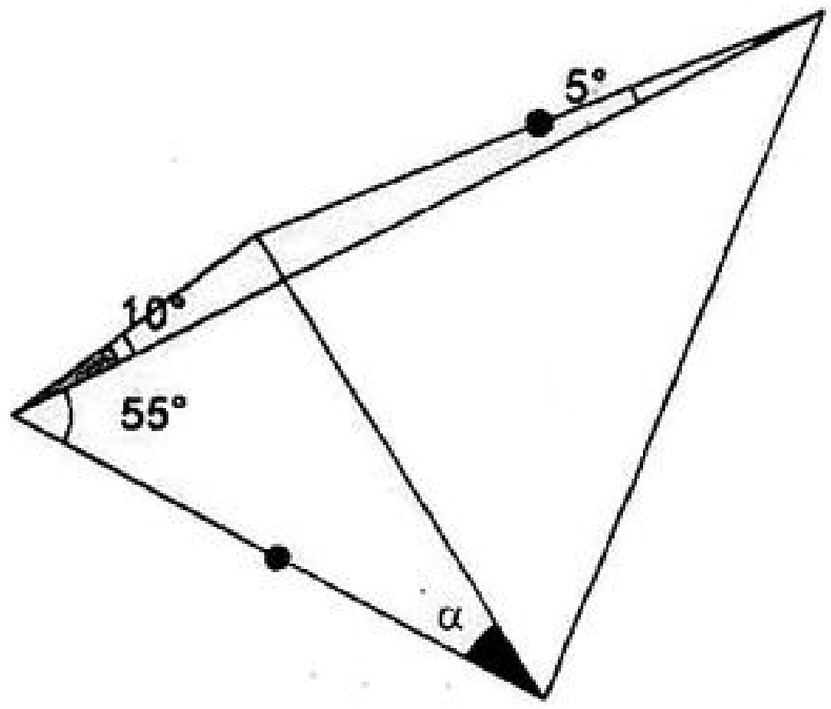
A) 45° B) 18° C)30°
D) 36° E) 37°

61. Calcular x



A) 24° B) 30° C)36°
D) 48° E) 60°

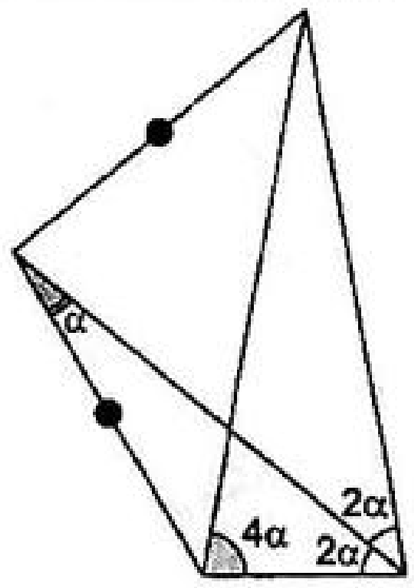
62. Calcular a



A) 10° B) 15° C)18°
D) 20° E) 24°

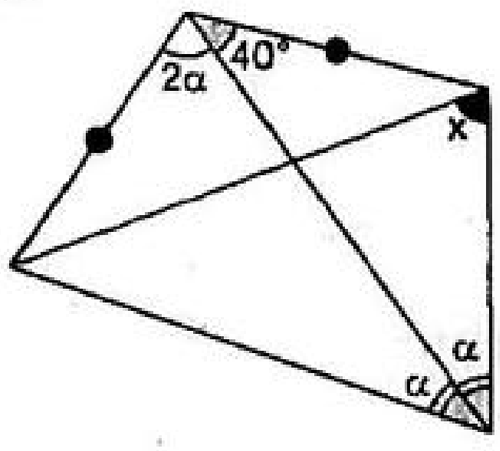
Scanned by CamScanner

63. Calcular x



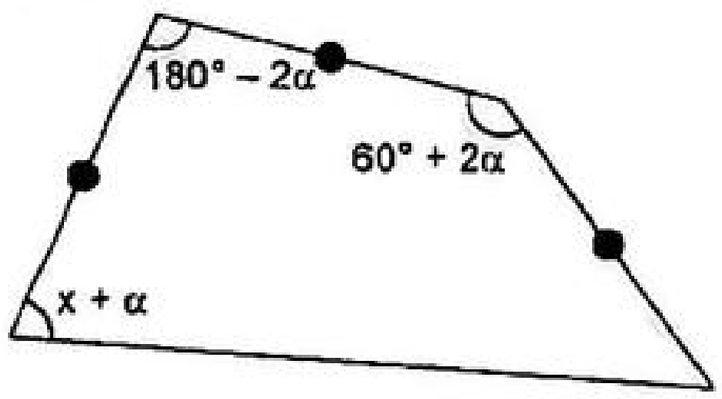
A) B) C)
D) E)

64. Calcular x



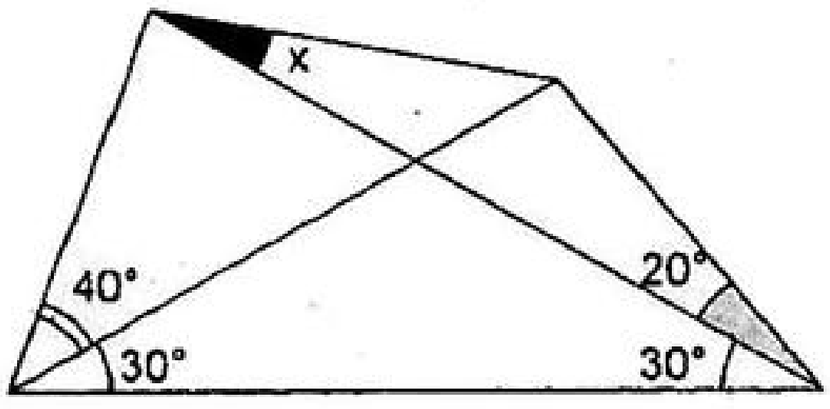
A) 30° B) 45° C)60°
D) 30°-a E) 2a

65. Calcular x



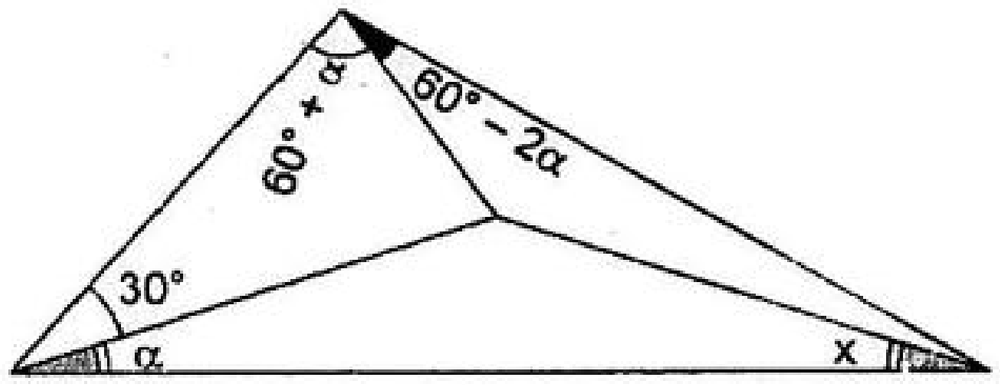
A) 24° B) 30° C)36°
D) 32° E) 40°

66. Calcular x



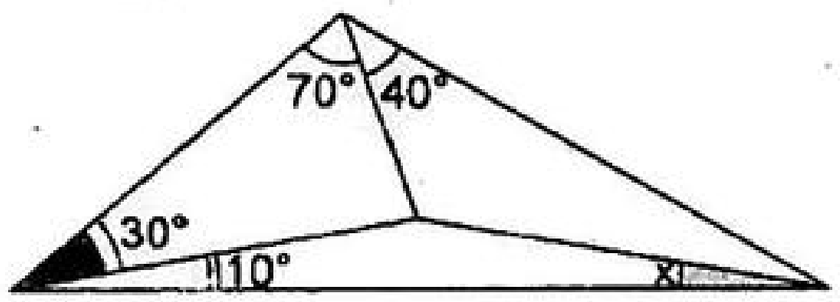
A) 10° B) 18° C)15°
D) 20° E) 24°

67. Calcular x



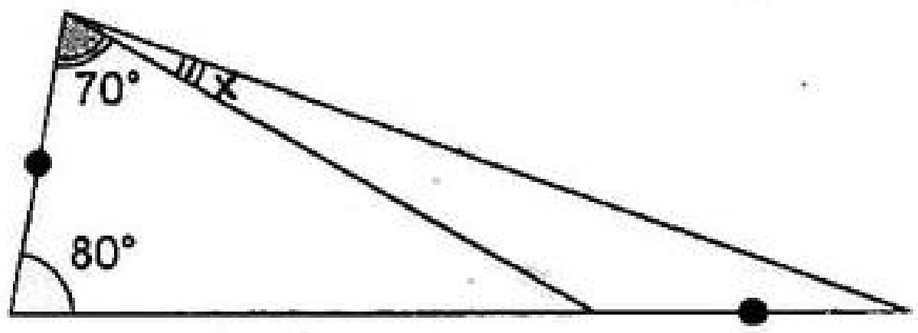
A) a B) 2a C)30°–a
D 30°–2a E) 60°–a

68. Calcular a



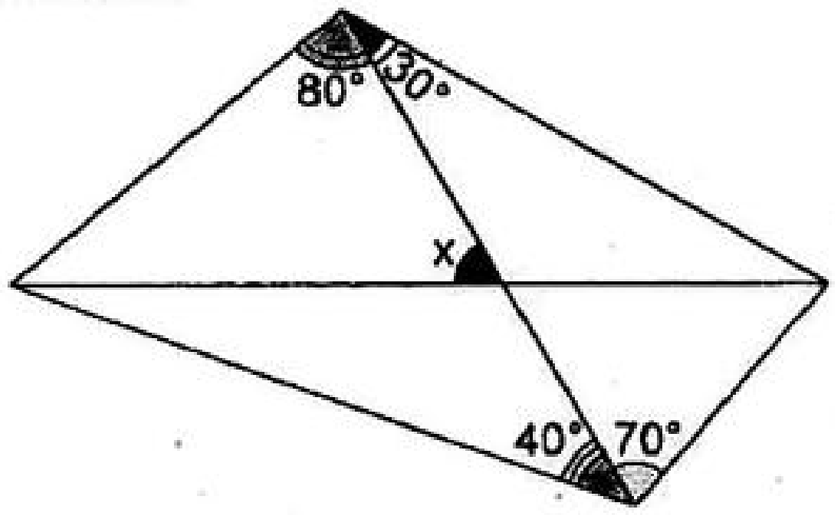
A) 9° B) 10° C)12°
D) 15° E) 18°

69. Calcular x



A) 8° B) 9° C)12°
D) 15° E) 10°

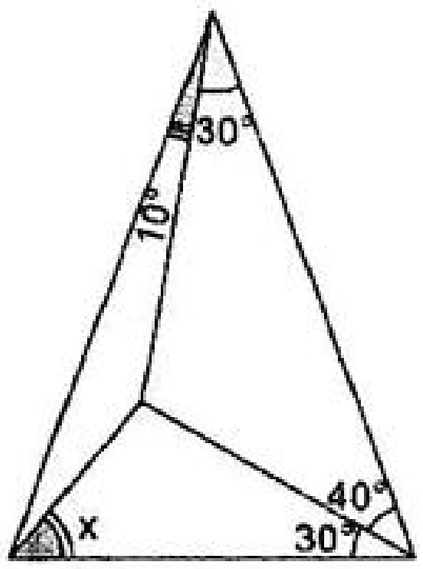
70. Calcular x



A) 42° B) 60° C)64°
D) 58° E) 48°

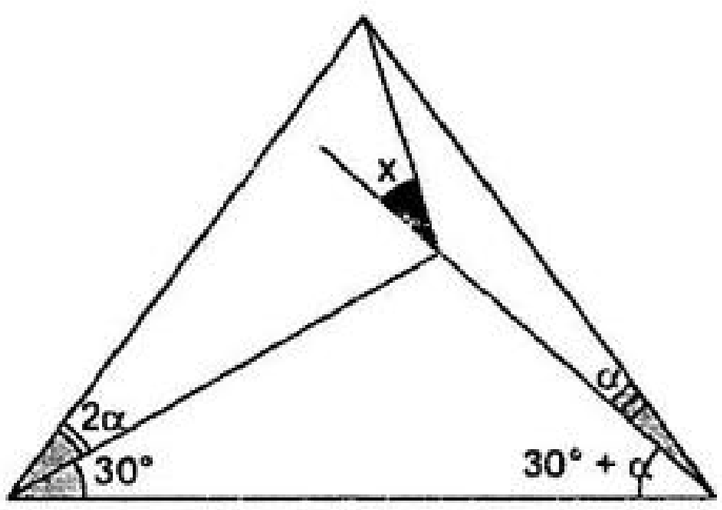
Scanned by CamScanner

71. Calcular x



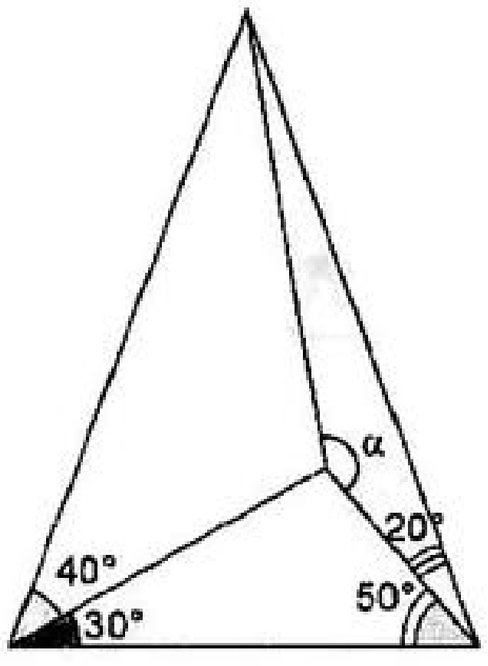
A) 30° B) 36° C)45°
D) 60° E) 50°

72. Calcular x



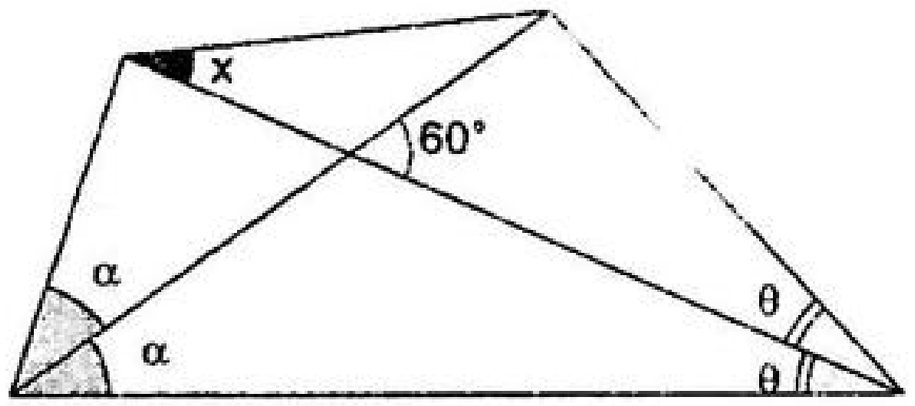
A) 2a B) 30 – a C) 60 – 2a
D) 60° E) 30°

73. Calcular x



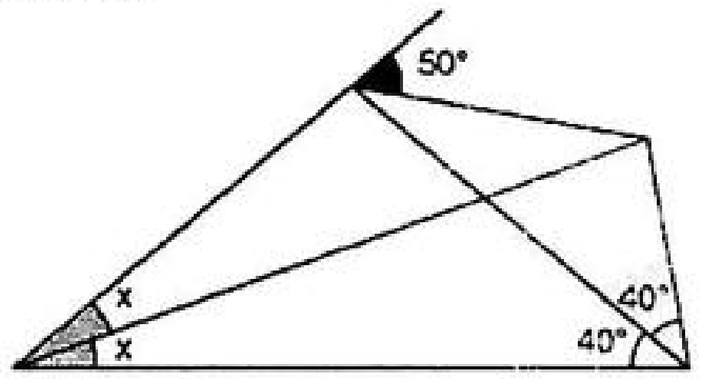
A) 100° B) 120° C)135°
D) 150° E) 160°

74. Calcular x



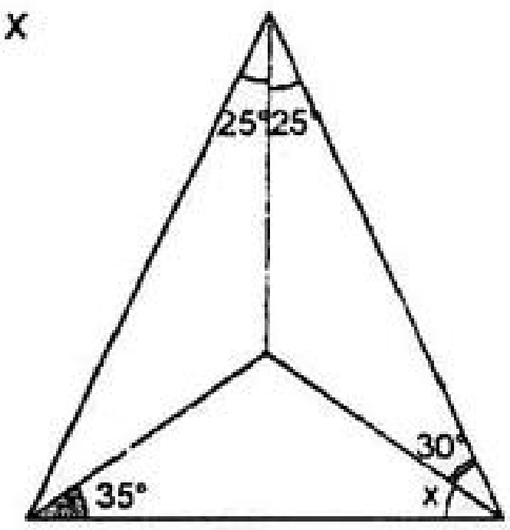
A) 18° B) 24° C)30°
D) 36° E) 45°

75. Calcular x



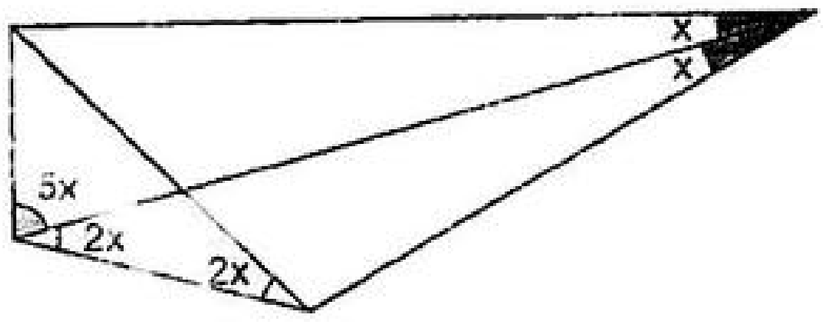
A) 10° B) 15° C)18°
D) 20° E) 24°

76. Calcular x



A) 30° B) 25° C)35°
D) 20° E) 45°

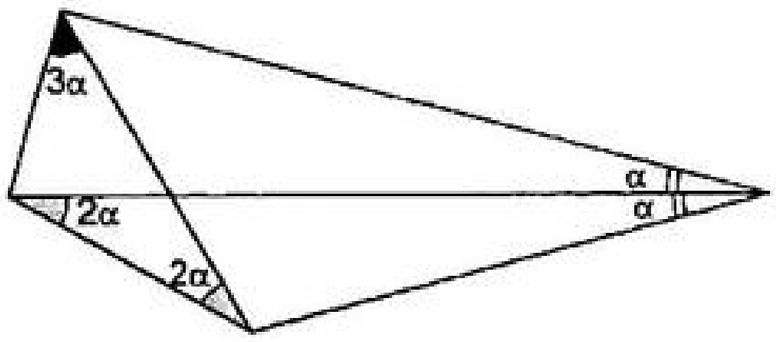
77. Calcular x



A) 10° B) 12° C)14°
D) 15° E) 16°

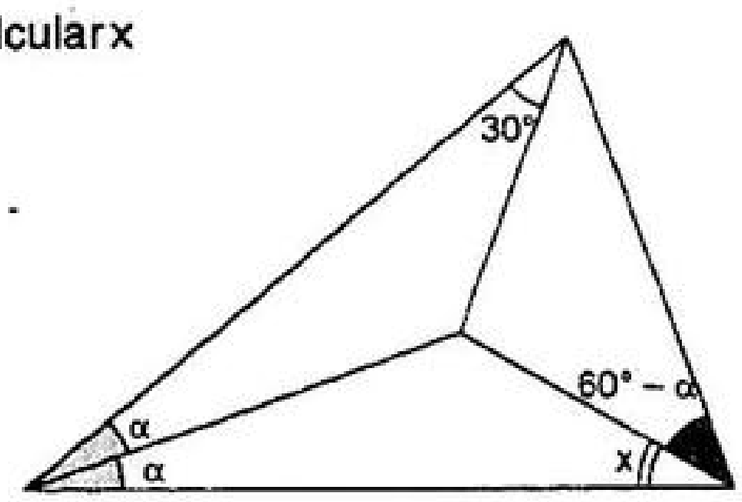
Scanned by CamScanner

78. Calcular a



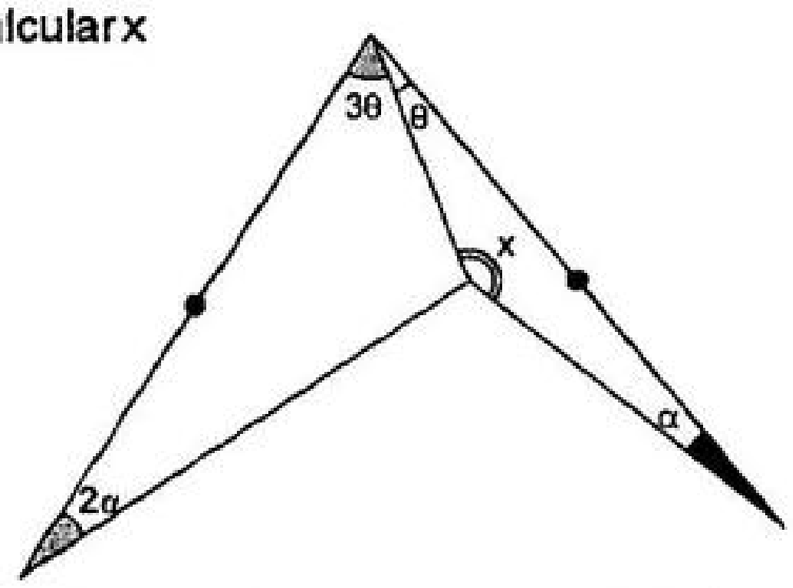
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

79. Calcular x



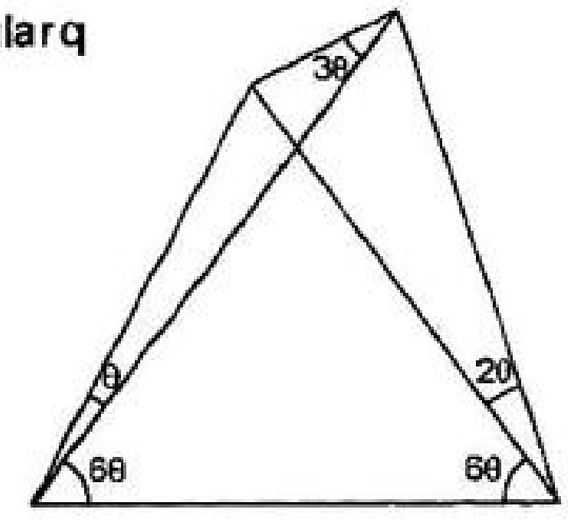
A) 18° B) 24° C) 28°
D) 30° E) 32°

80. Calcular x



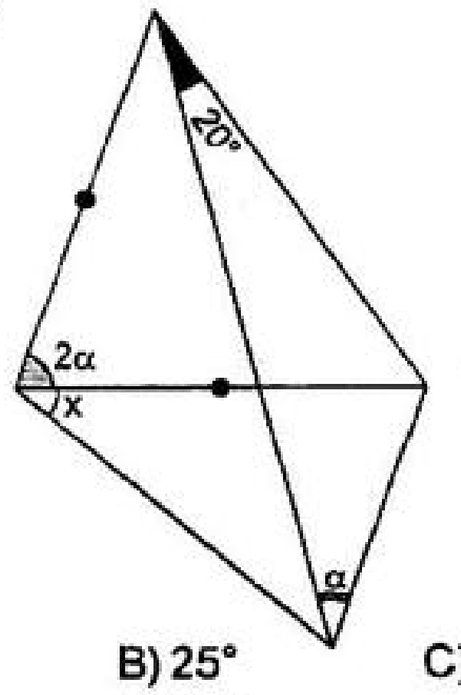
A) 100° B) 120° C) 138°
D) 155° E) 160°

81. Calcular q



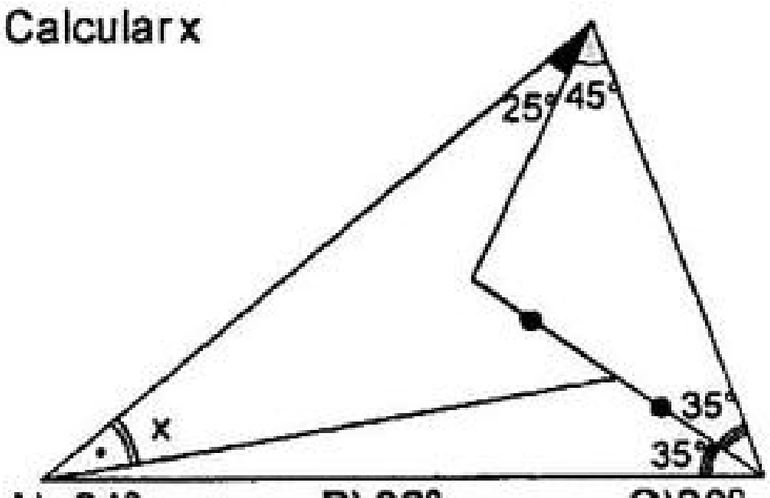
A) 9° B) 12° C) 13°
D) 10° E) 8°

82. Calcular x



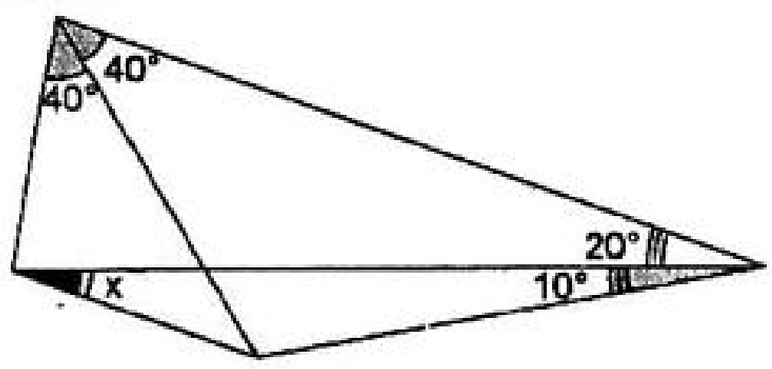
A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

83. Calcular x



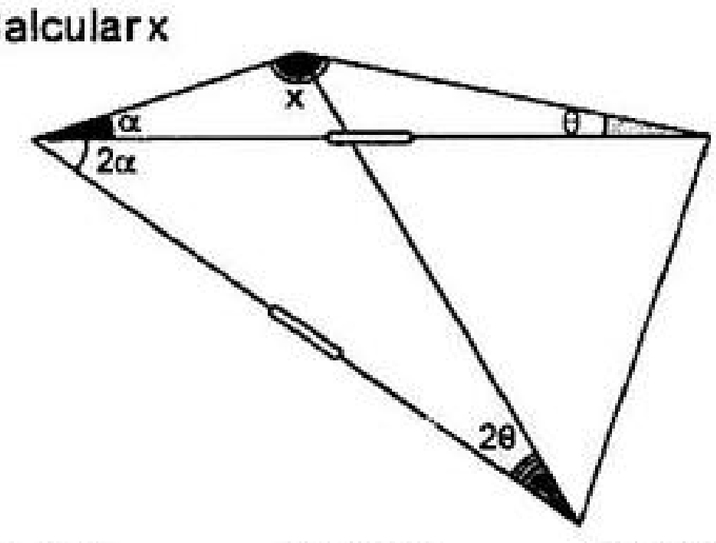
A) 24° B) 26° C) 30°
D) 32° E) 36°

84. Calcular x



A) 10° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 26°

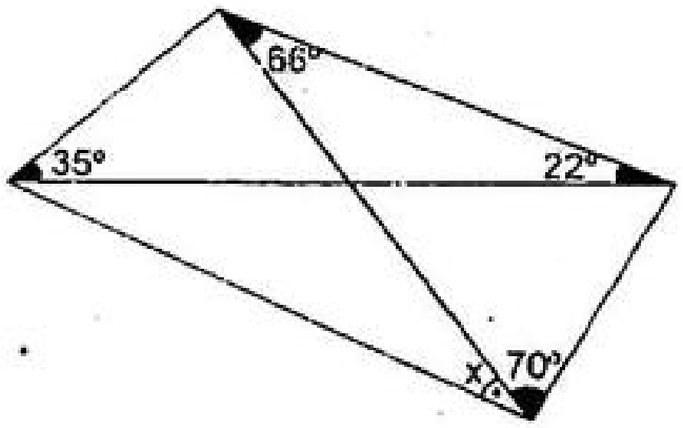
85. Calcular x



A) 90° B) 100° C) 120°
D) 135° E) 150°

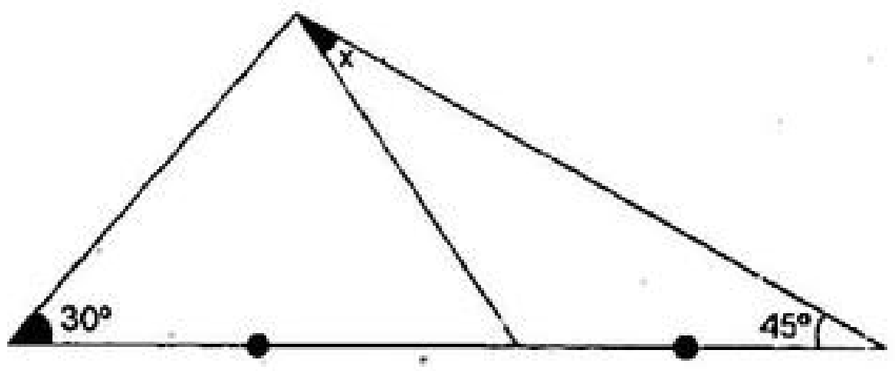
Scanned by CamScanner

86. Calcular x



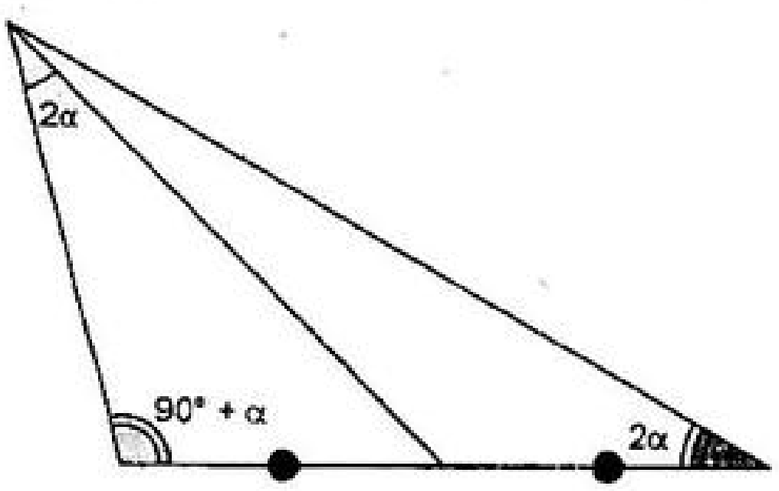
A) 10°° B) 12° C)14°
D) 15° E) 18°

87. Calcular x



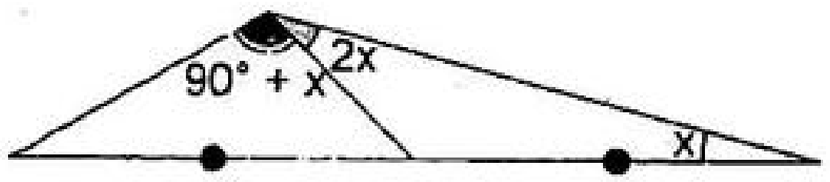
A) 30° B) 40° C)45°
D) 55° E) 35°

88. Calcular x



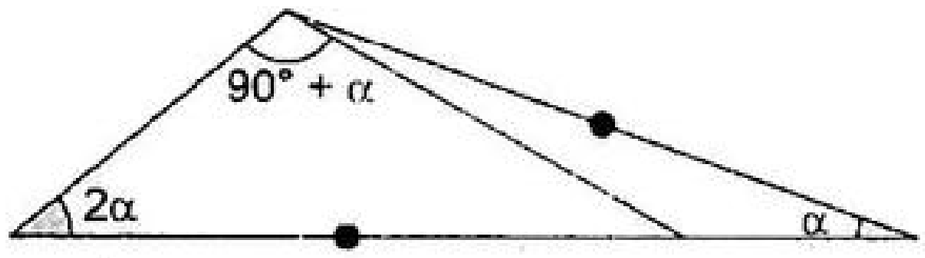
A) 24° B) 22° 30' C)26°
D) 30° E) 36°

89. Calcular x



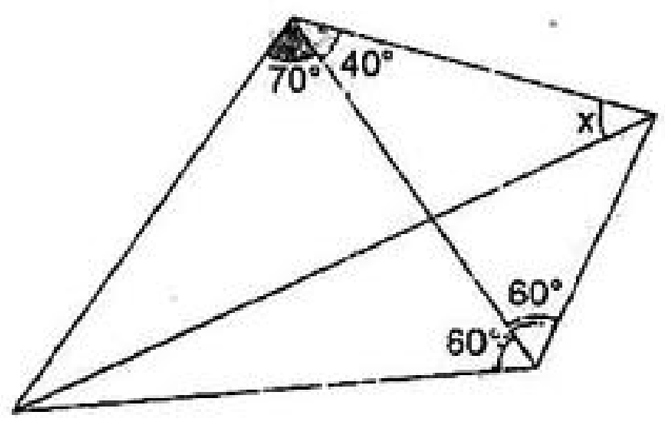
A) 10° B) 12° C)14°
D) 15° E) 18°

90. Calcular a



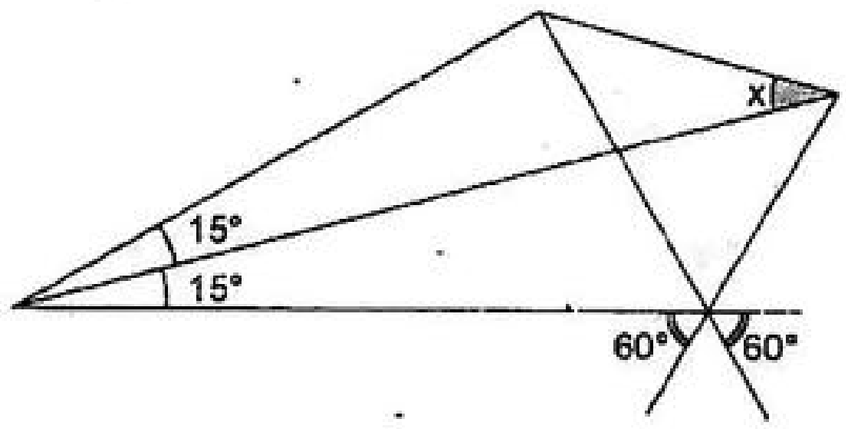
A) 12° B) 15° C)18°
D) 20° E) 24°

91. Calcular x



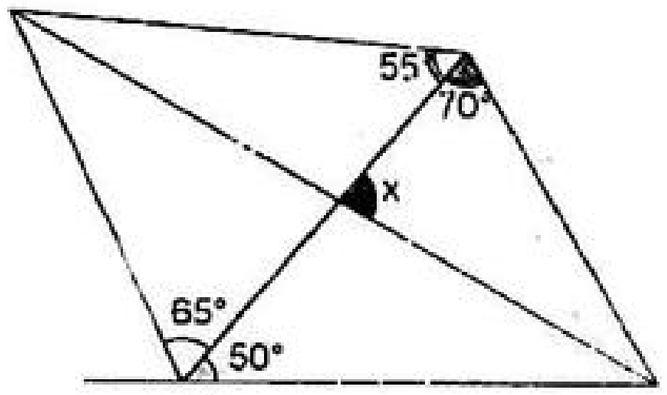
A) 30° B) 40° C)45°
D) 50° E) 55°

92. Calcular x



A) 18° B) 24° C)28°
D) 30° E) 36°

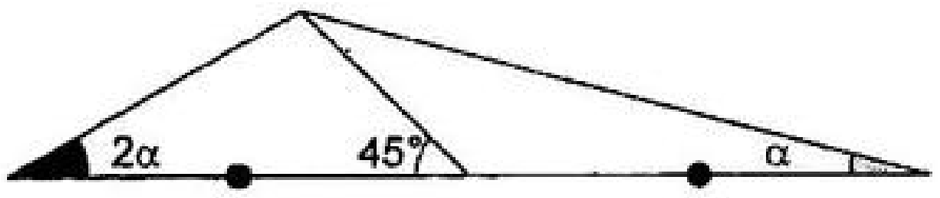
93. Calcular x



A) 60° B) 75° C)70°
D) 90° E) 80°

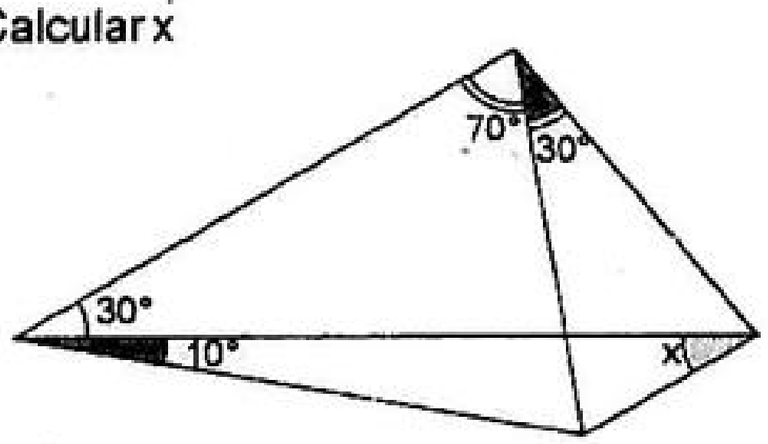
Scanned by CamScanner

94. Calcular x



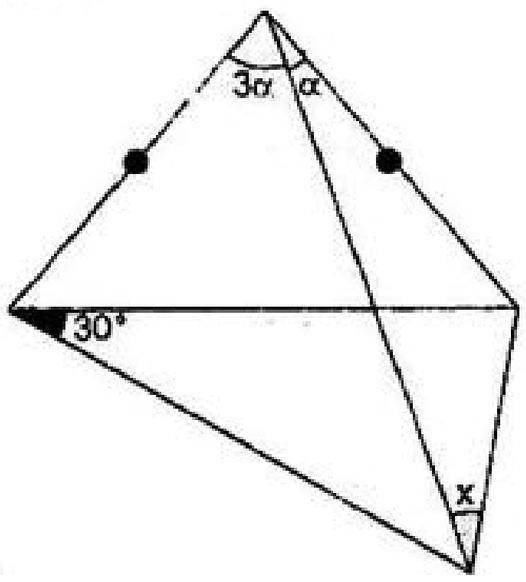
A) 10° B) 9° C)8°
D) 12° E) 15°

95. Calcular x



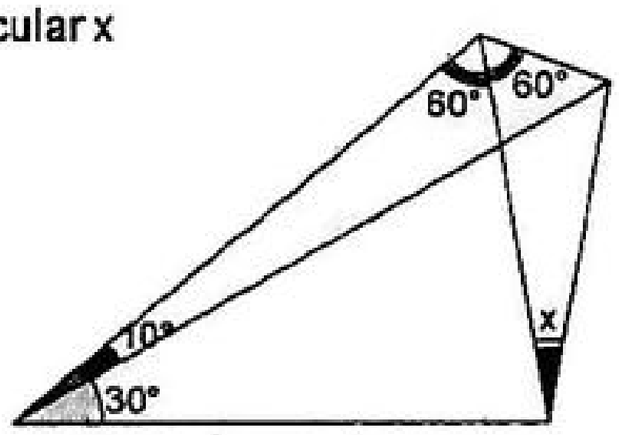
A) 18° B) 24° C)30°
D) 32° E) 36°

96. Calcular x



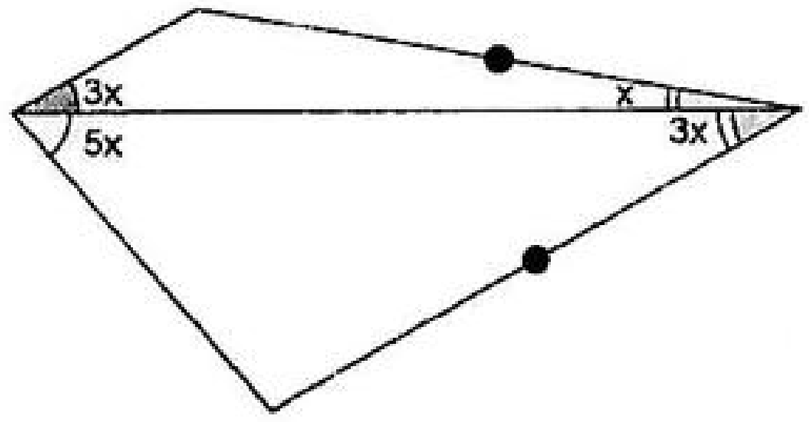
A) 30° B) 45° C)53°
D) 30° - a E) 60°

97. Calcular x



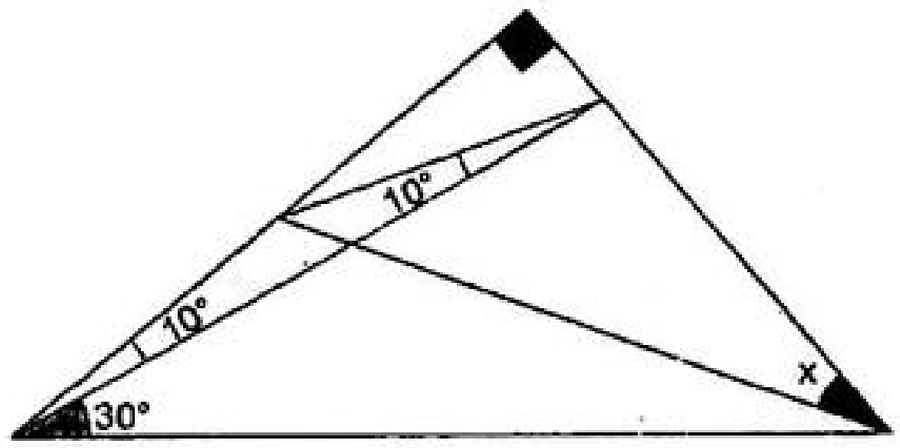
A) 10° B) 20° C)15°
D) 18° E) 24°

98. Calcular x



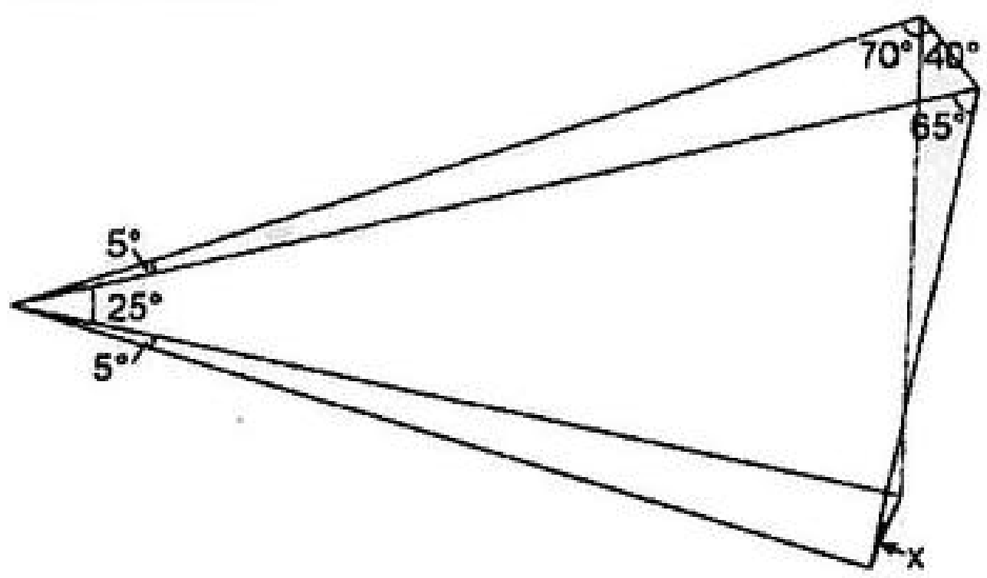
A) 8° B) 9° C)11°
D) 12° E) 10

99. Calcular x



A) 18° B) 30° C)36°
D) 60° E) 45°

100. Calcular x

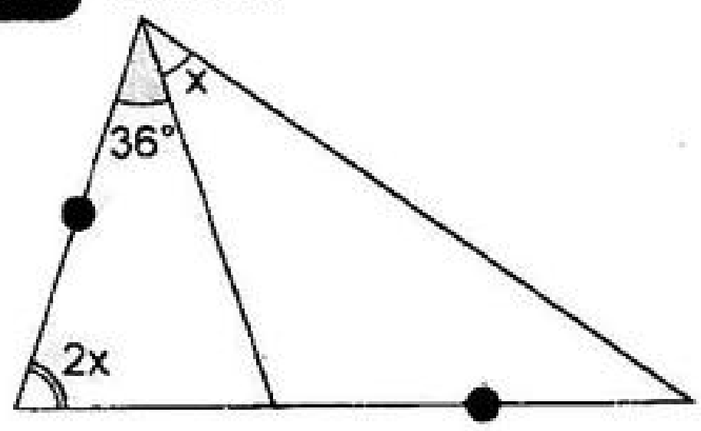


A) 10° B) 12° C)8°
D) 9° E) 15°

Scanned by CamScanner

Resolución de problemas

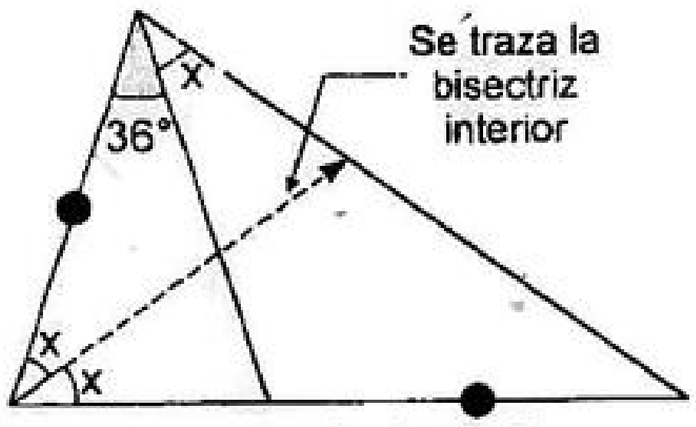
Problema 01. Hallar x.



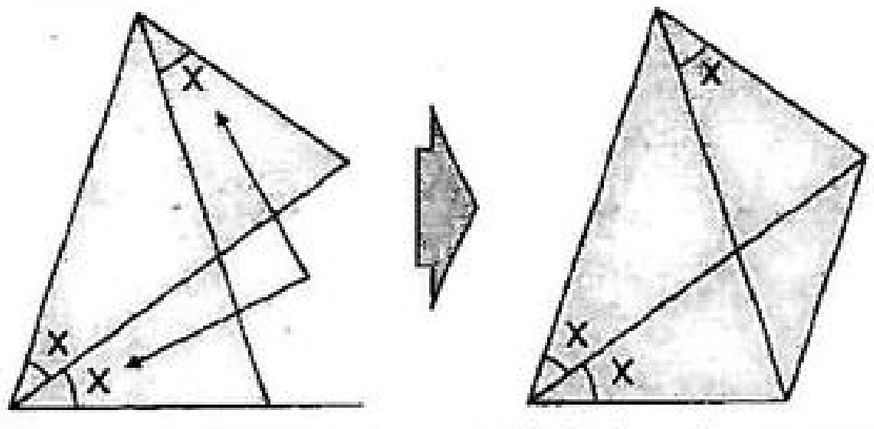
Resolución:

Empleando, el octavo criterio de construcción de la siguiente manera:

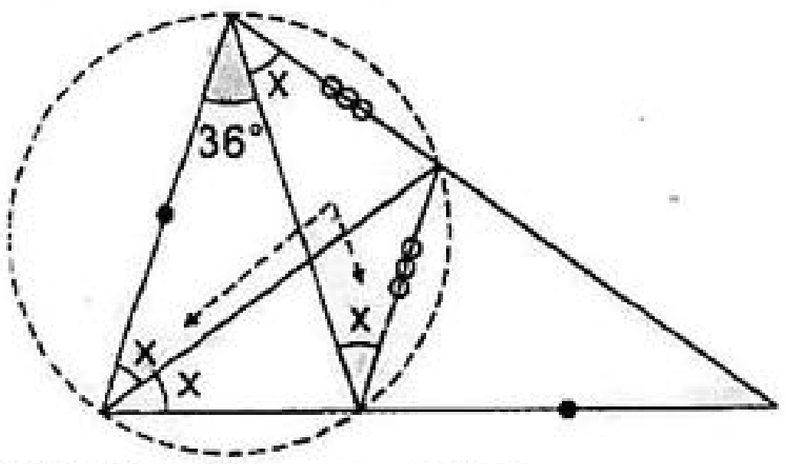
Paso N° 1



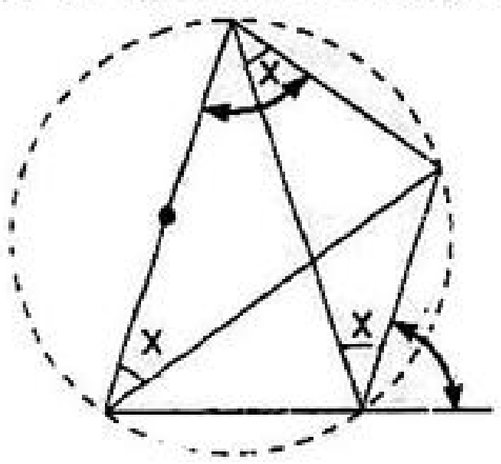
Paso N° 2. Observemos la siguiente figura:

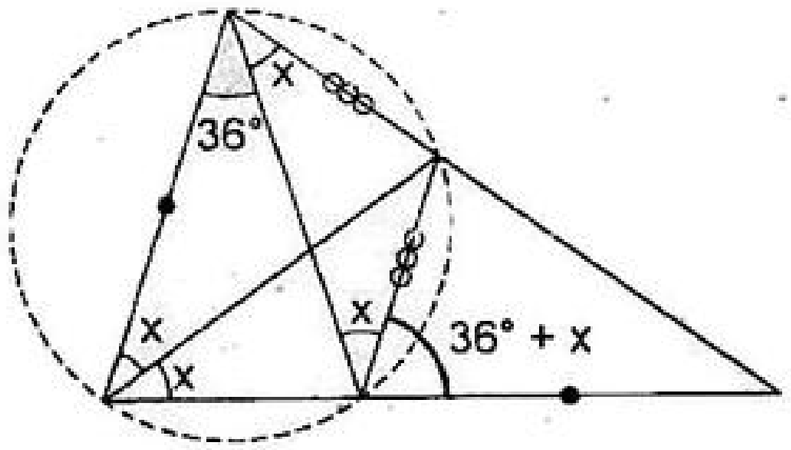


Es un cuadrilátero inscriptible donde se cumple:

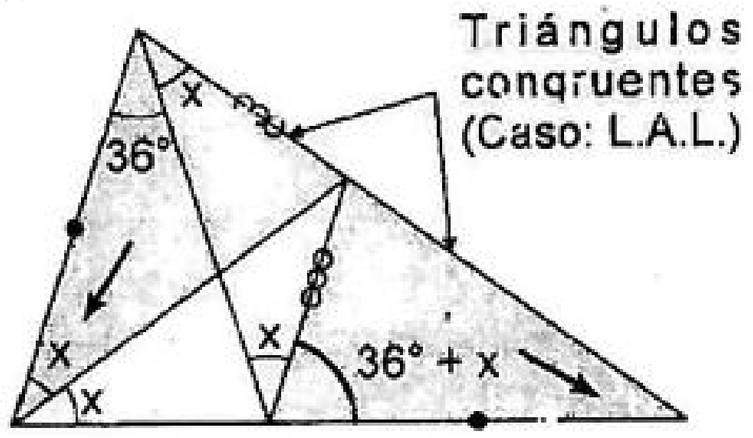


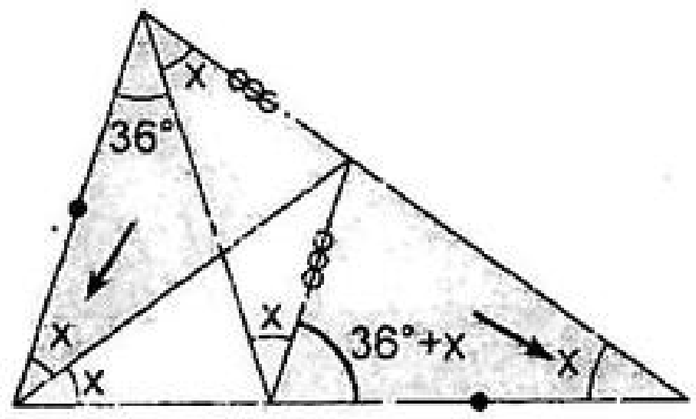
Paso N° 3. También se cumple:

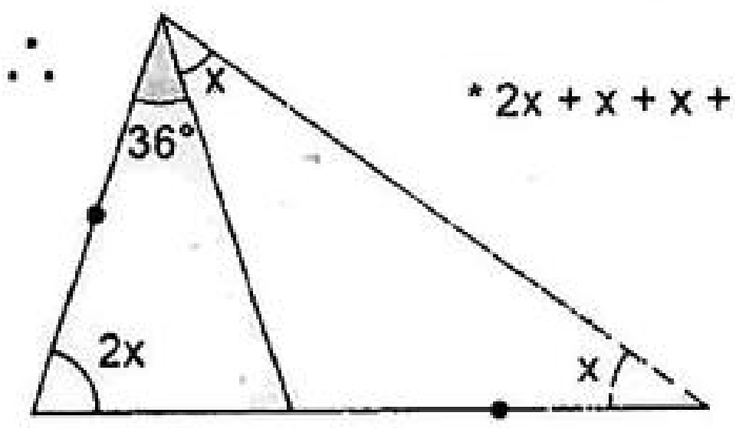




Paso N° 4:

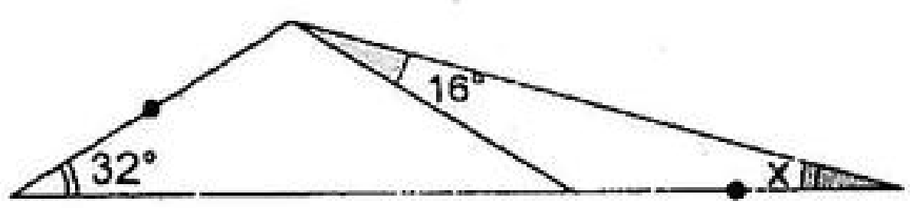






* 2x + x + x + 36 = 180°
4x = 144°
x = 36°

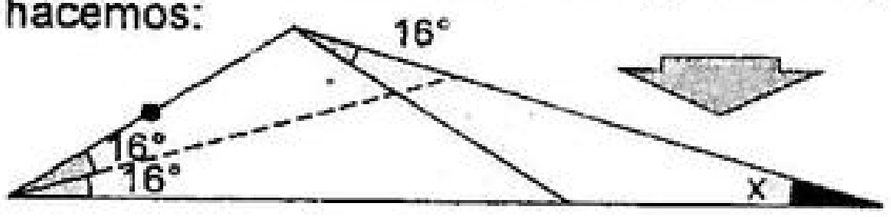
Problema 02. Hallar x.



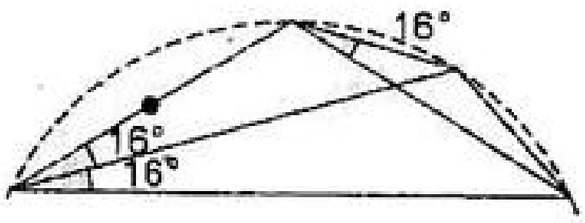
Scanned by CamScanner

Resolución:

Paso N°1. Observemos la siguiente figura y hacemos:

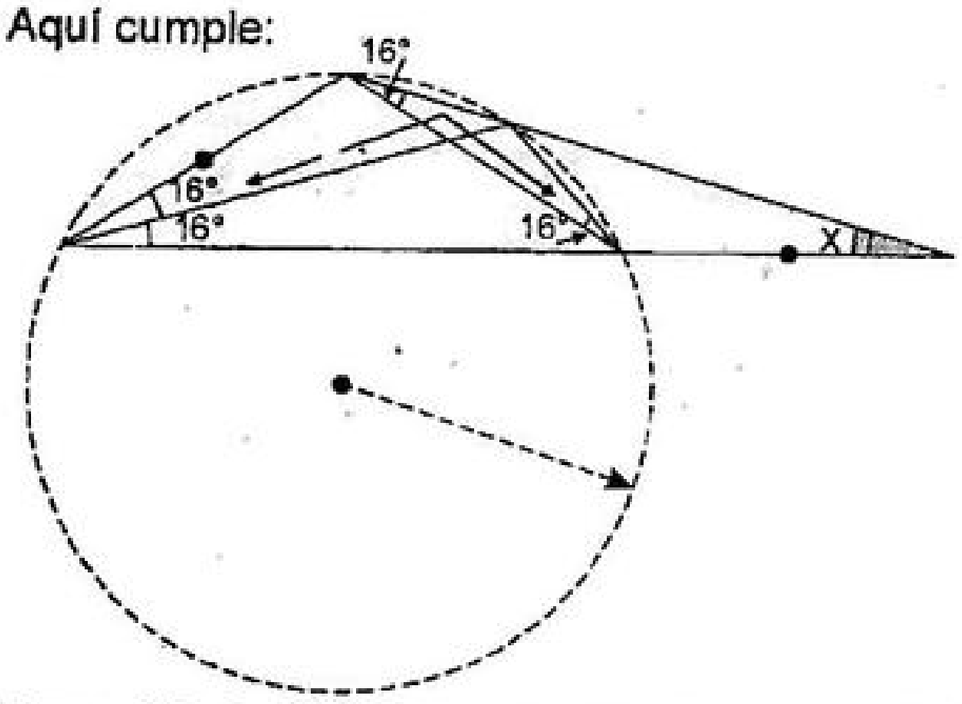


Se obtiene un cuadrilátero inscriptible

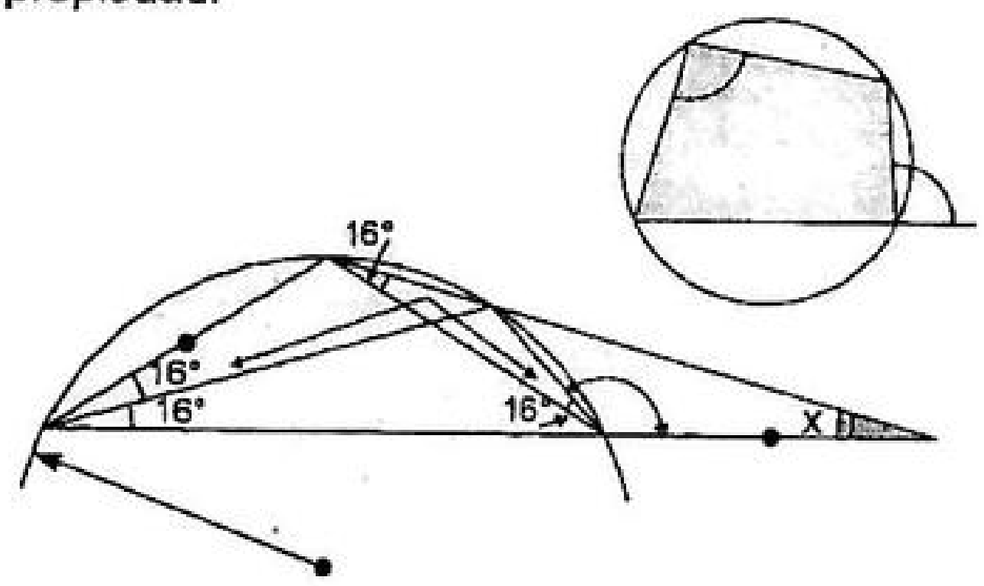


Paso N°2.

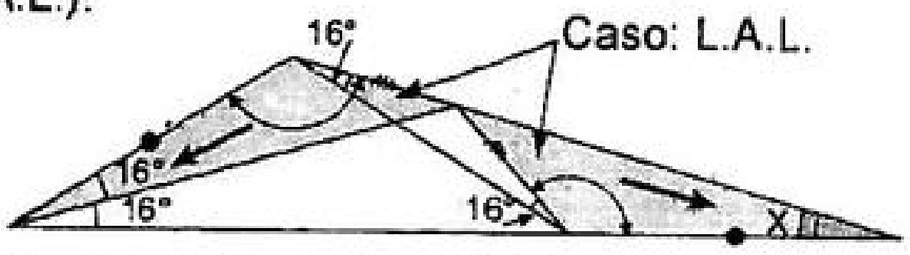
Aquí cumple:



Paso N° 3. También se cumple la siguiente propiedad:



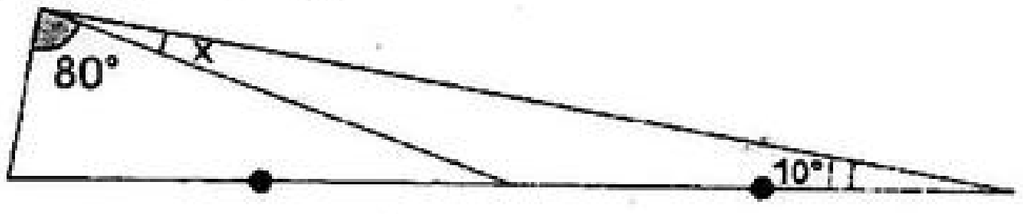
Paso N° 4. Se observa triángulos congruentes (L.A.L.):



Aquí se cumple: a mismo lado se opone mismo ángulo:

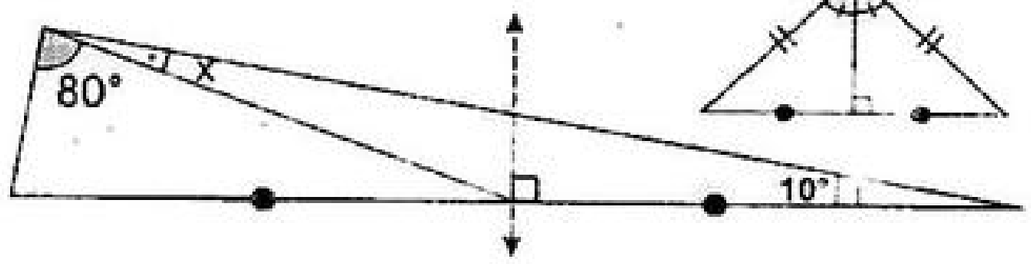
$x = 16°$

Problema 03.

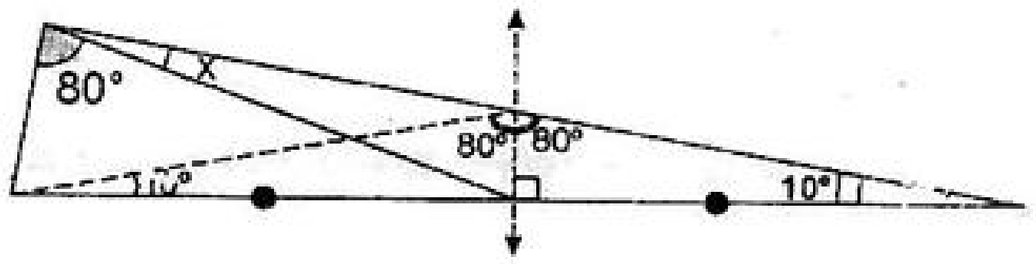


Resolución:

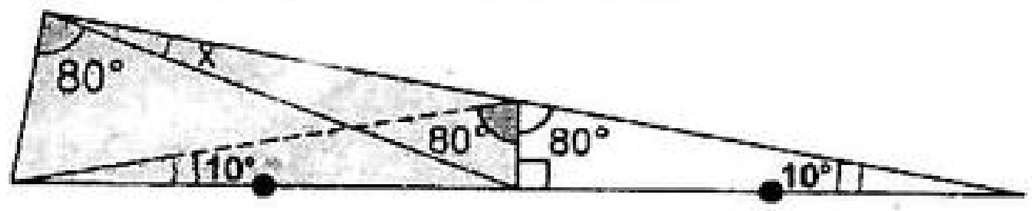
Paso N°1. Se observa una mediana entonces se traza la mediatriz.

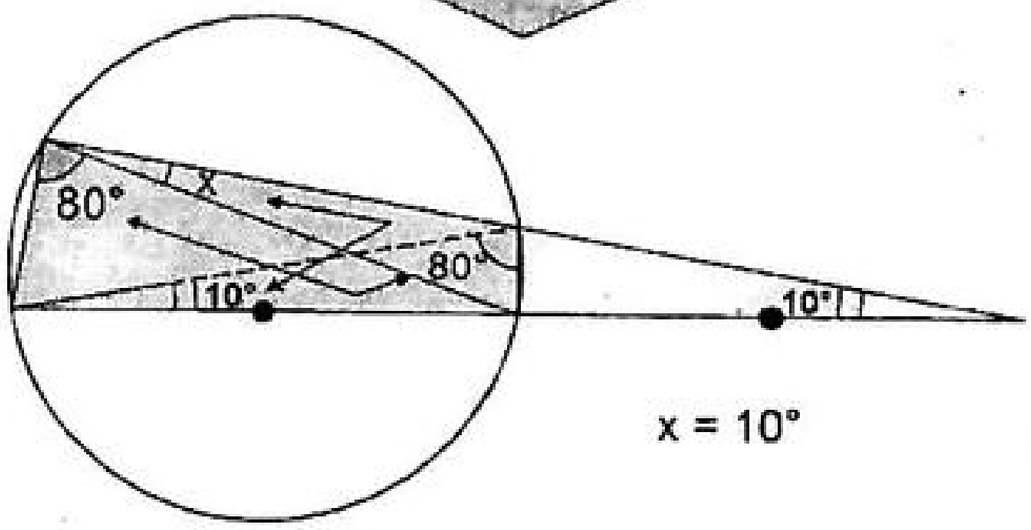


Paso N°2. Se aplica las propiedades de la mediatriz.



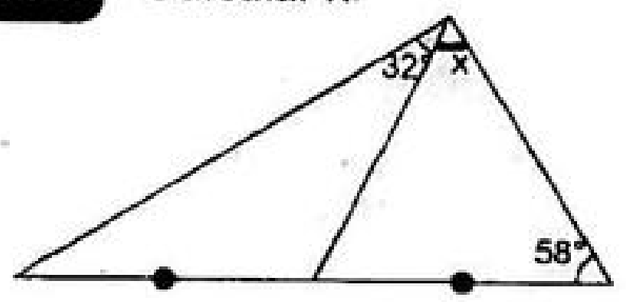
Se observa un cuadrilátero inscriptible donde cumple la propiedad del pantalón:





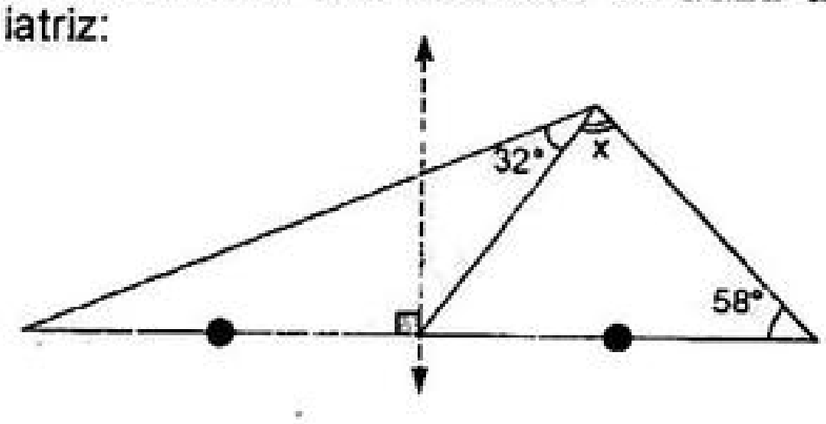
$x = 10°$

Problema 04. Calcular x.



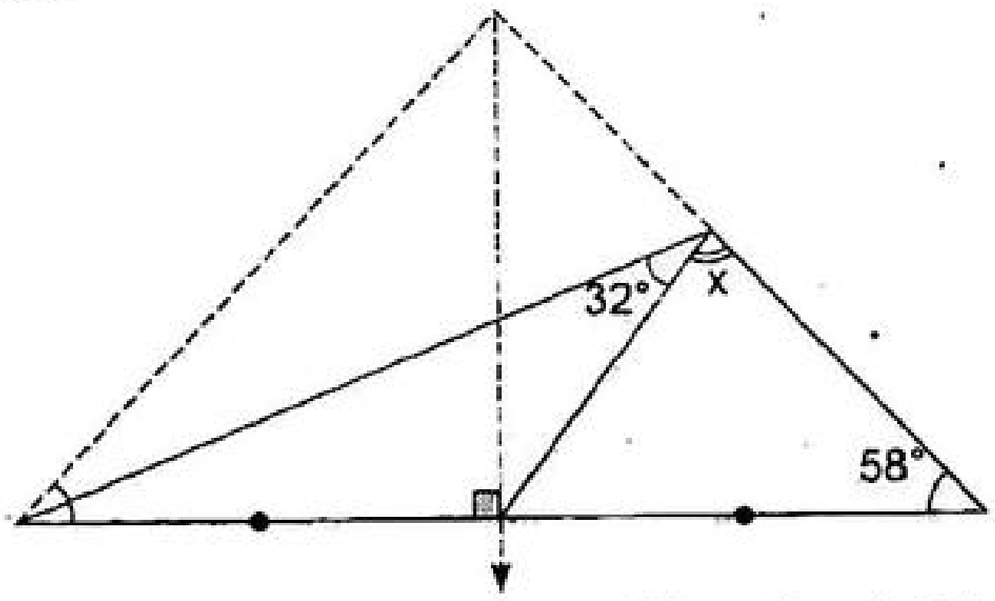
Resolución:

Paso N° 1: Empleando el octavo criterio, (caso II). Como se observa una mediana se traza a una mediatriz:

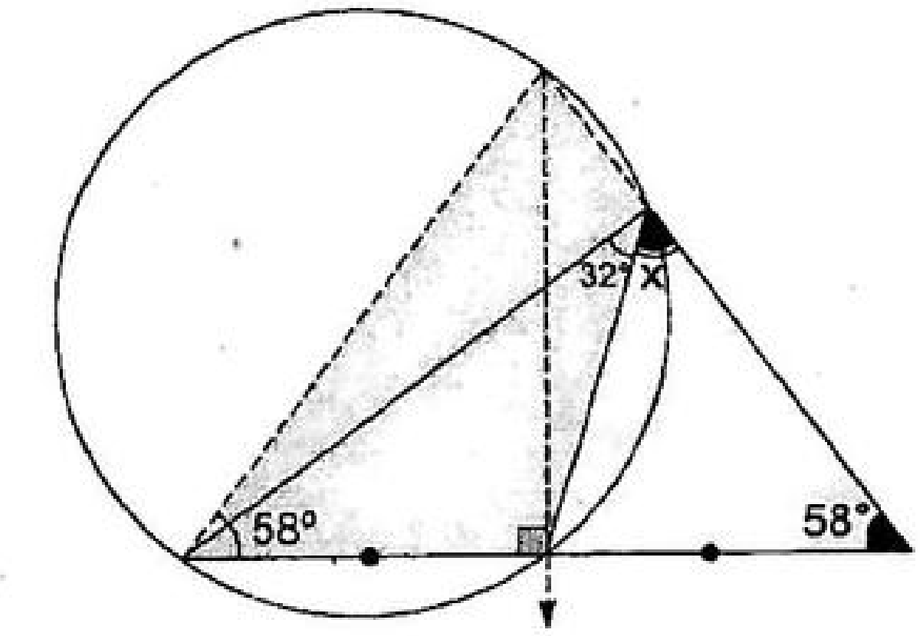


Scanned by CamScanner

Paso N° 2: Empleando la propiedad de la mediatriz.

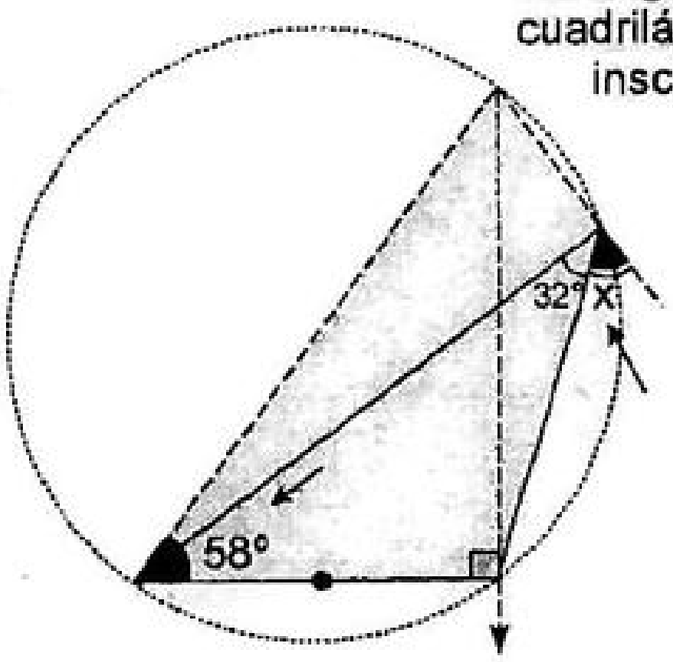


Paso N° 3: Se observa un cuadrilátero inscriptible, de la siguiente manera:

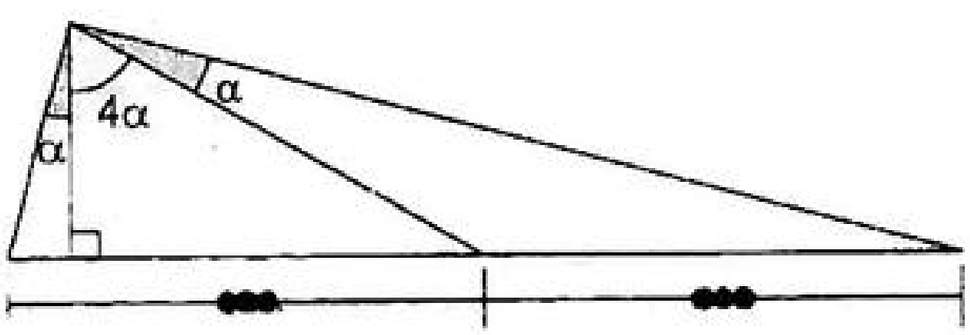


Cumple la propiedad del ángulo exterior en cuadrilátero inscriptible:

$x = 58°$

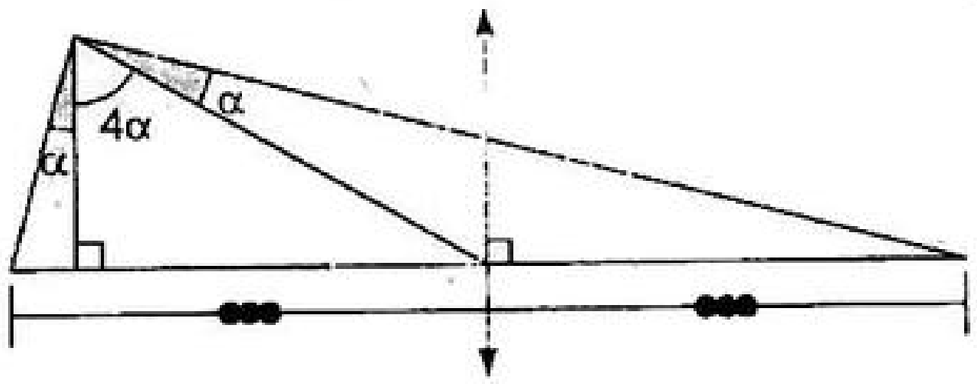


Problema 05. Calcular α.

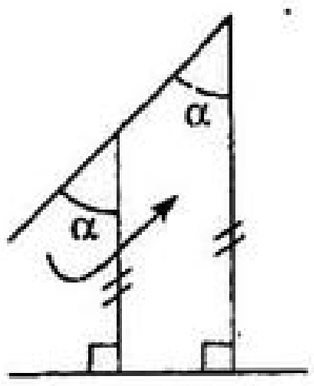


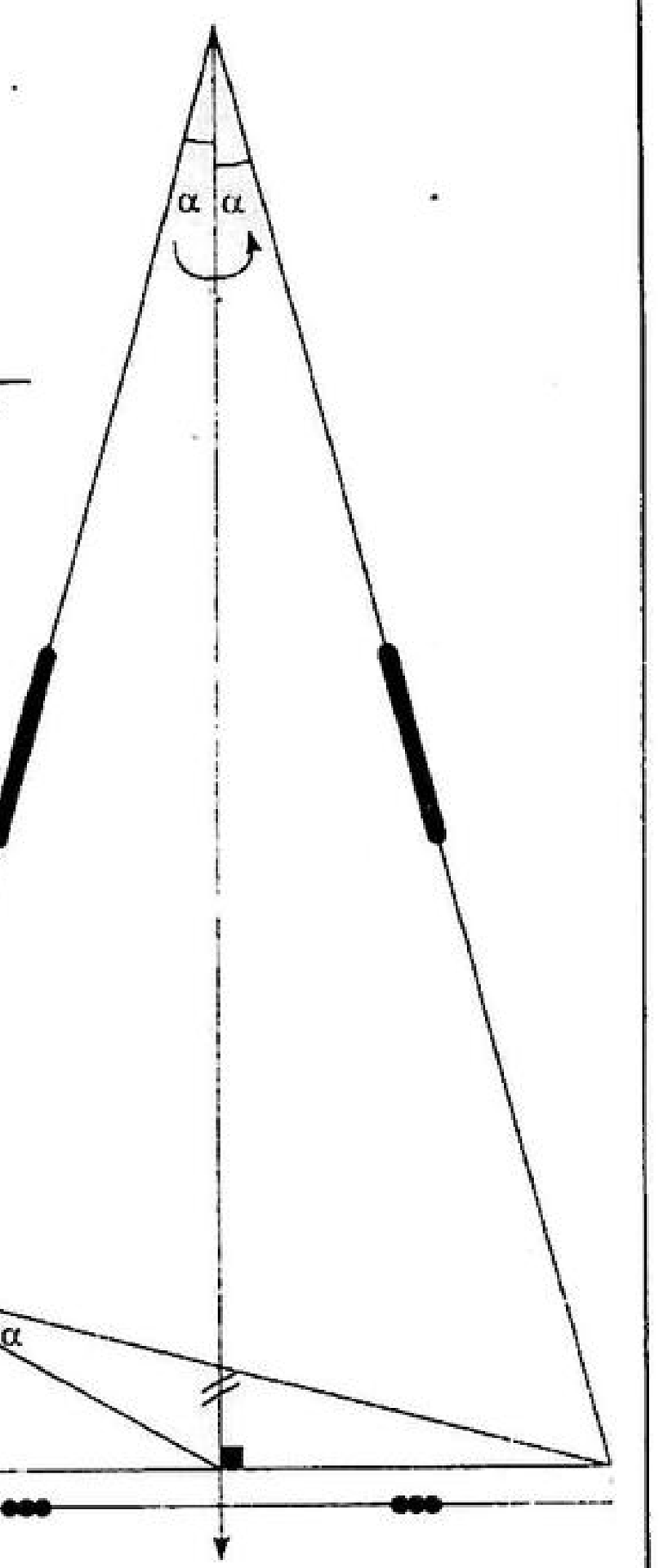
Resolución:

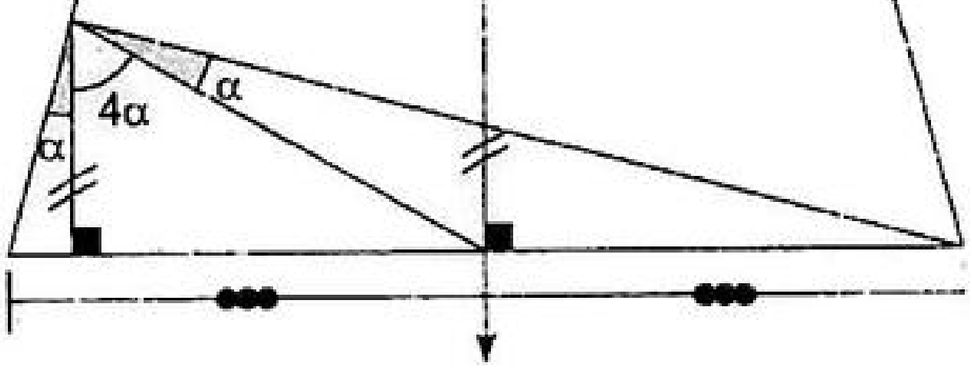
Paso N° 1. Observamos una mediana, entonces completamos a una mediatriz de la siguiente manera:



Paso N° 2. Ahora empleamos la propiedad de la mediatriz:

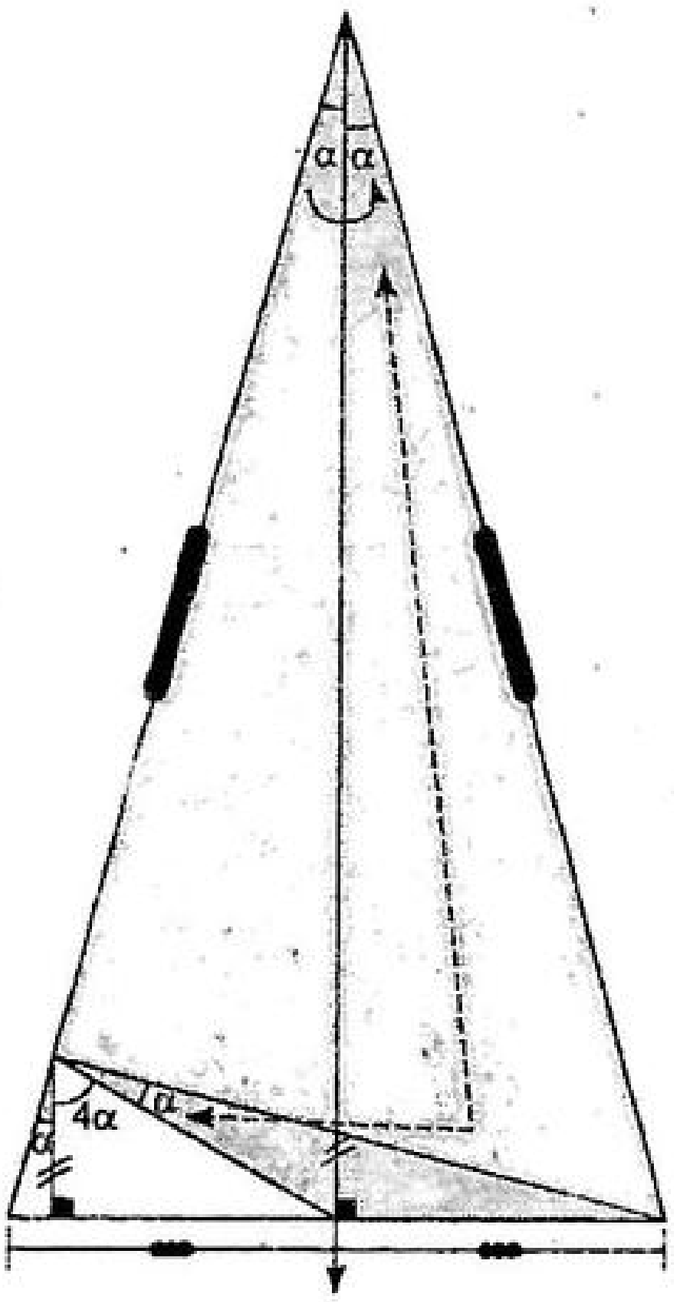




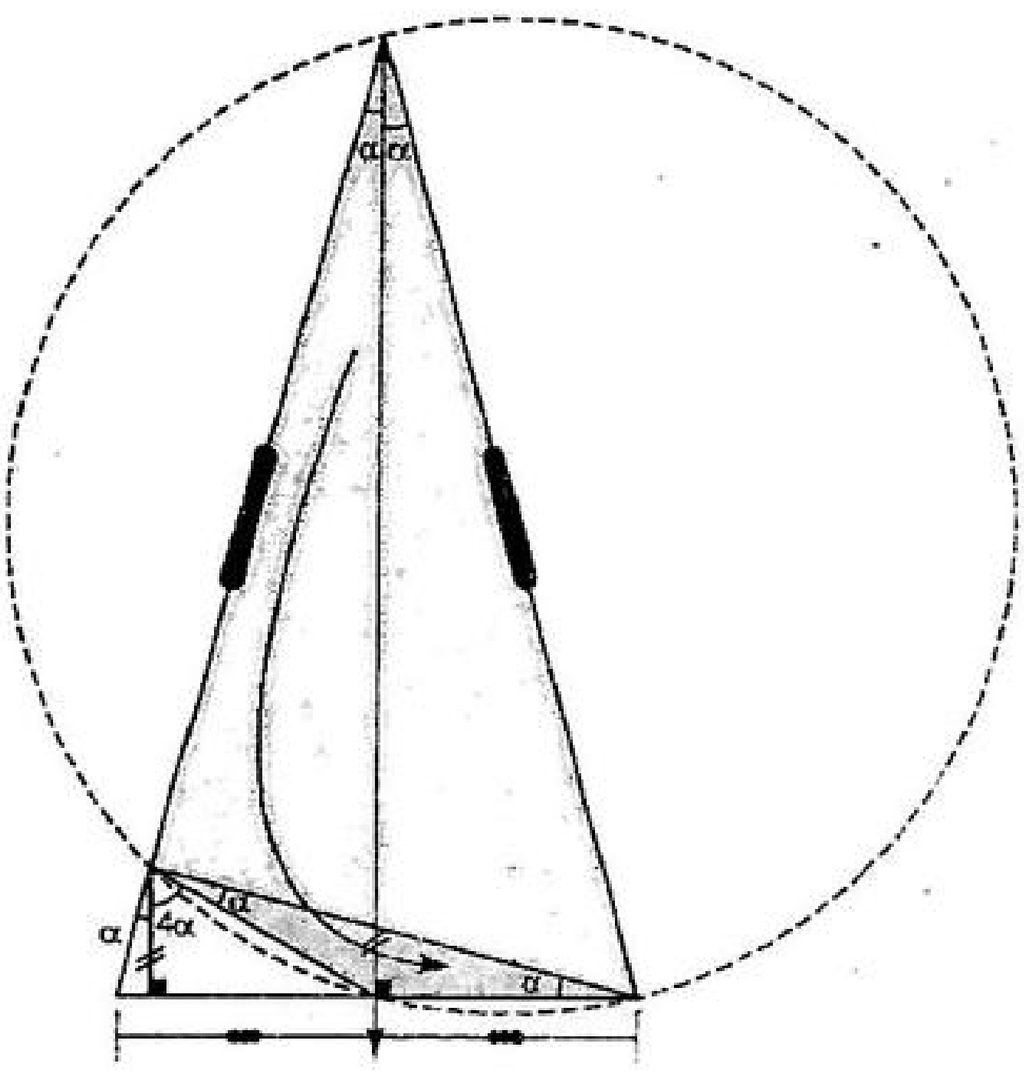


Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Se observa un cuadrilátero inscriptible donde cumple la propiedad del pantalón.



Paso N° 1. Se observa un cuadrilátero inscriptible donde cumple la propiedad del pantalón.



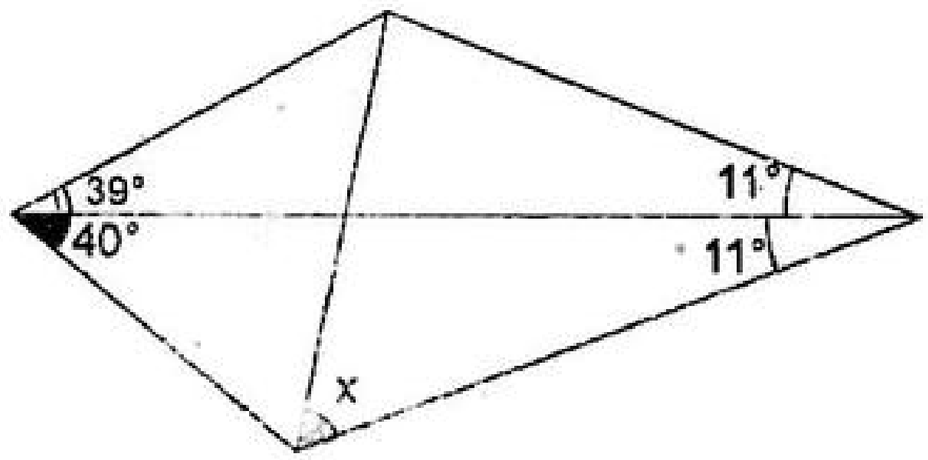
Aquí se observa:

$5\alpha + \alpha = 90°$

$6\alpha = 90°$

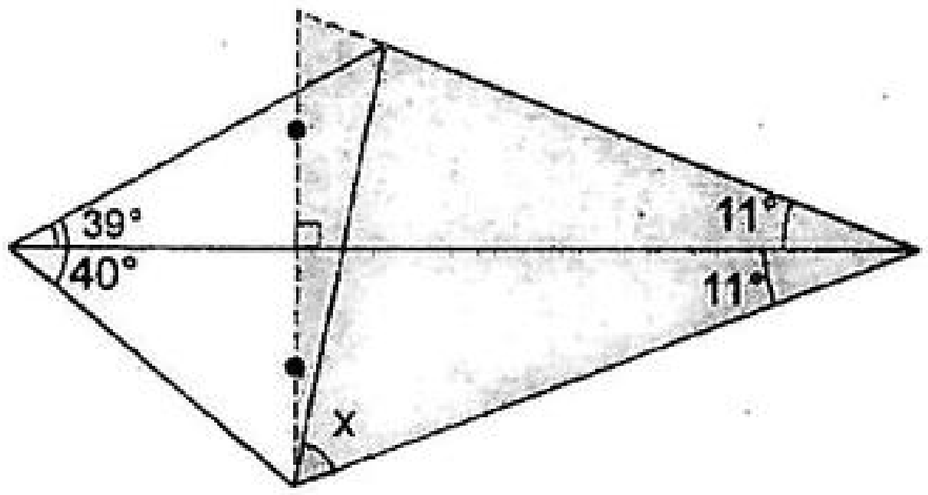
$\alpha = 15°$

Problema 06. Calcular "x".

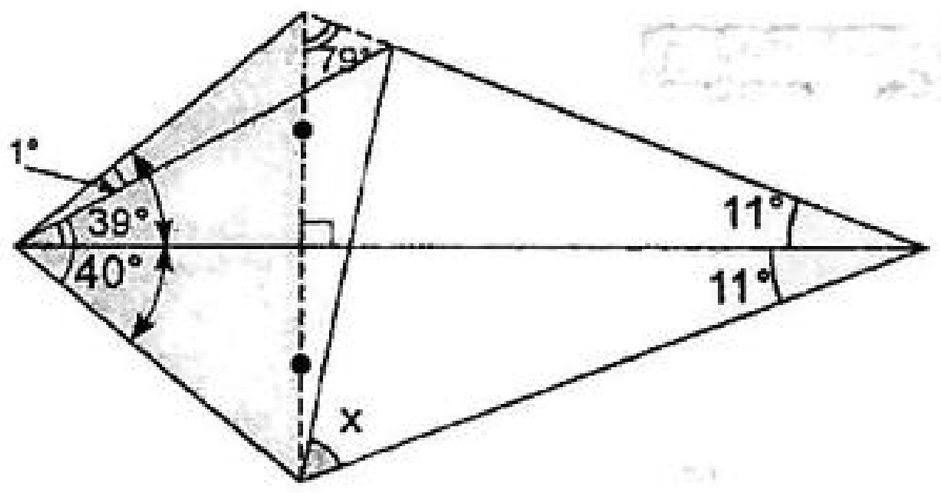


Resolución:

Paso N° 1. En la figura se observa una bisectriz, entonces empleamos el segundo criterio de construcción, completamos un triángulo isósceles.

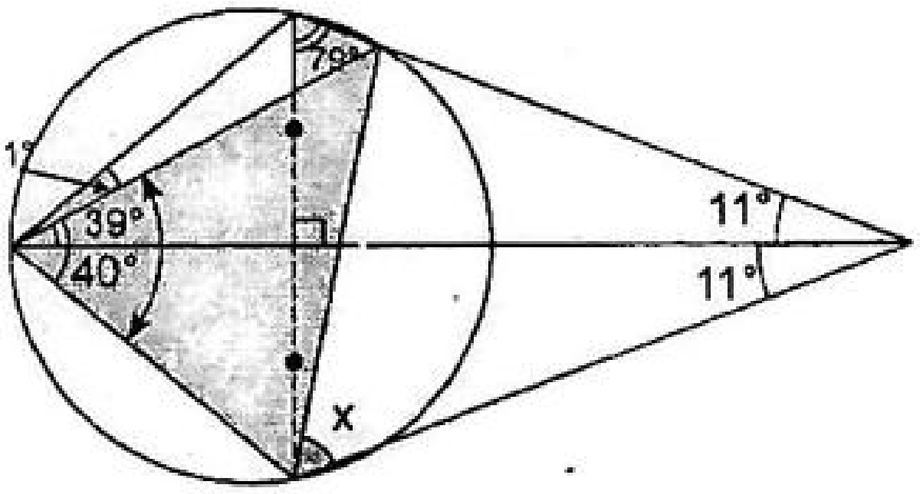


Paso N° 2.Se observa la recta mediatriz donde se cumple:



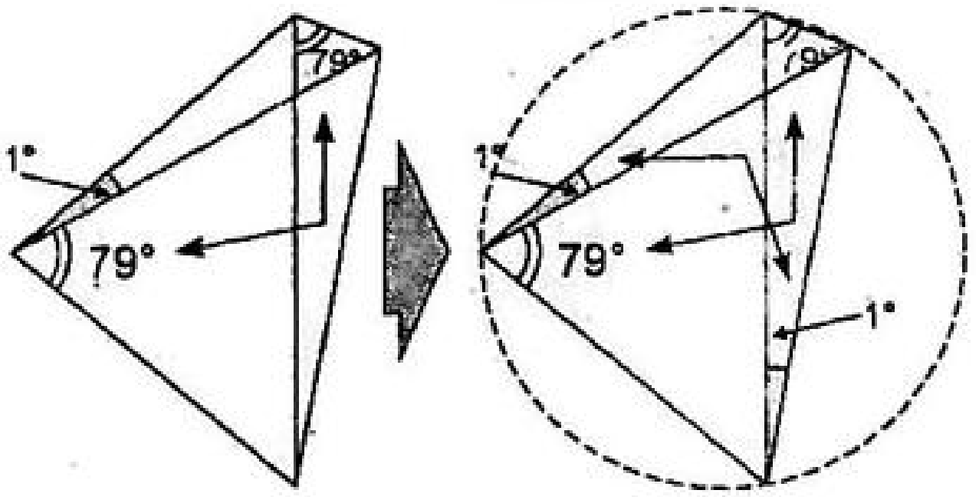
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Ahora se observa la siguiente figura:

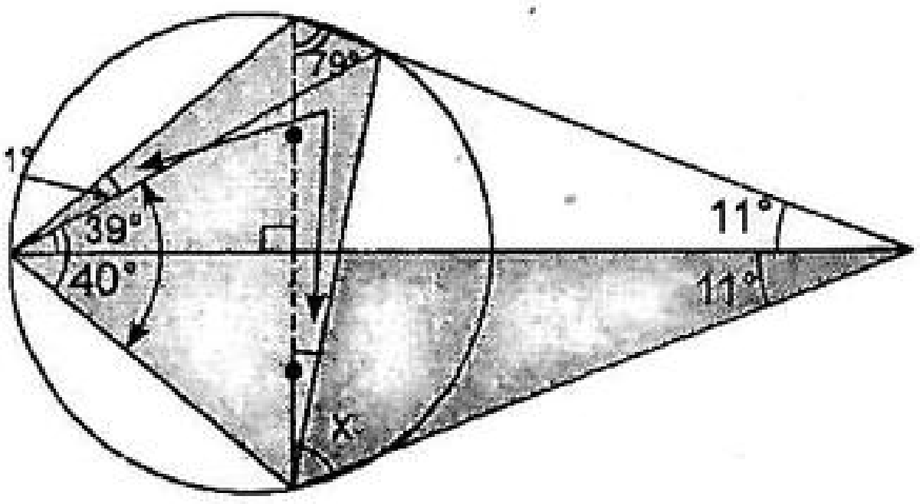


Cumple:

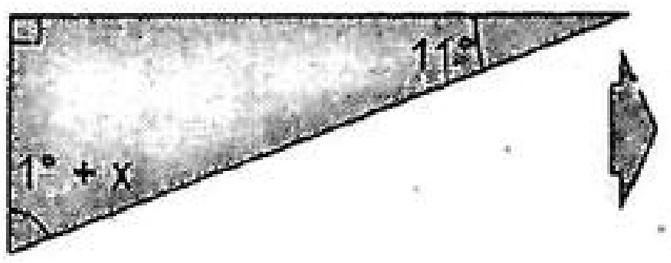
Es un cuadrilátero inscriptible:



Paso N° 4. Ahora tenemos:



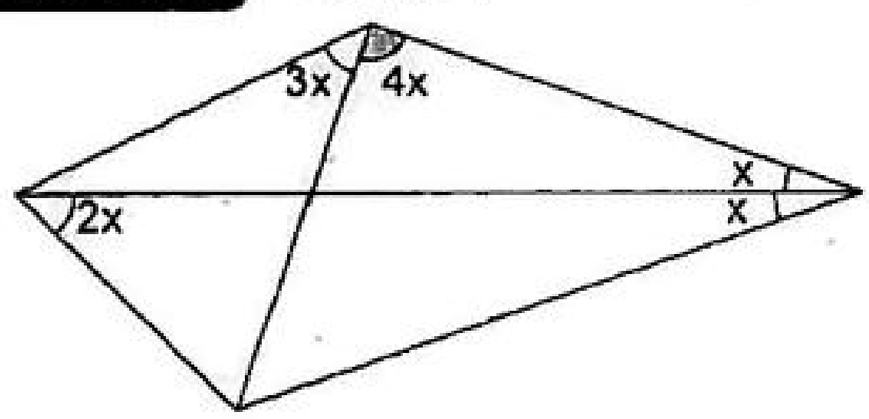
Se observa:



$1° + x + 11 = 90°$

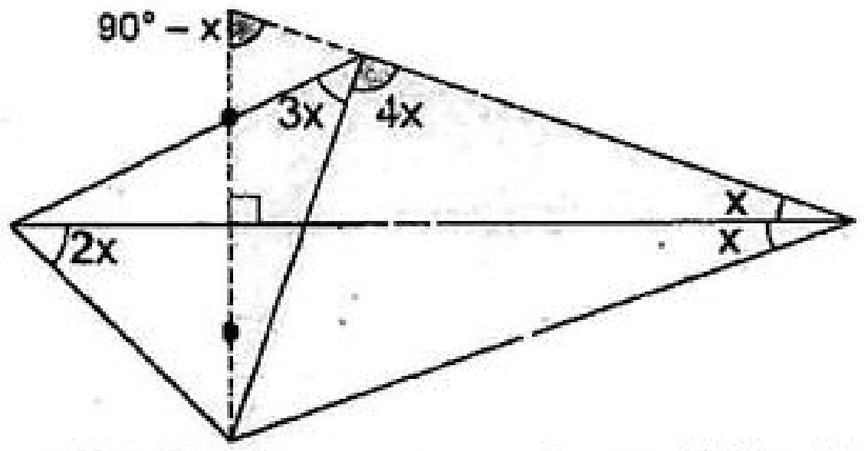
$x = 78°$

Problema 07. Calcular x.

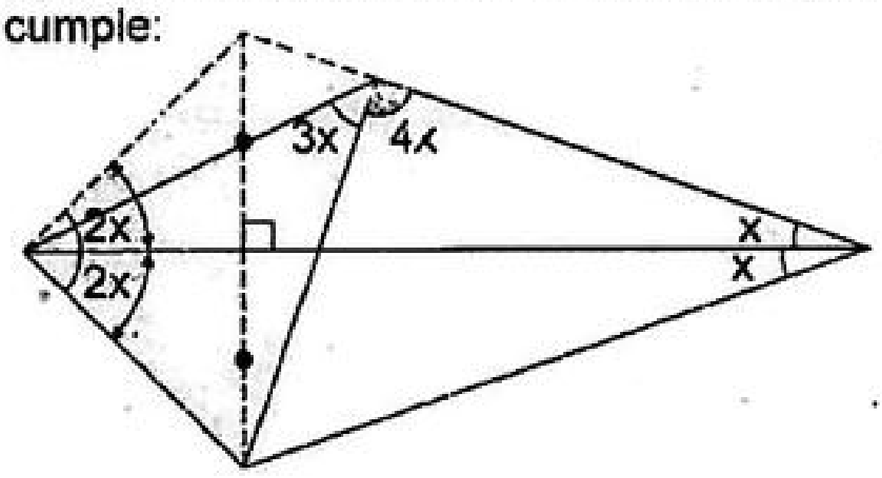


Resolución:

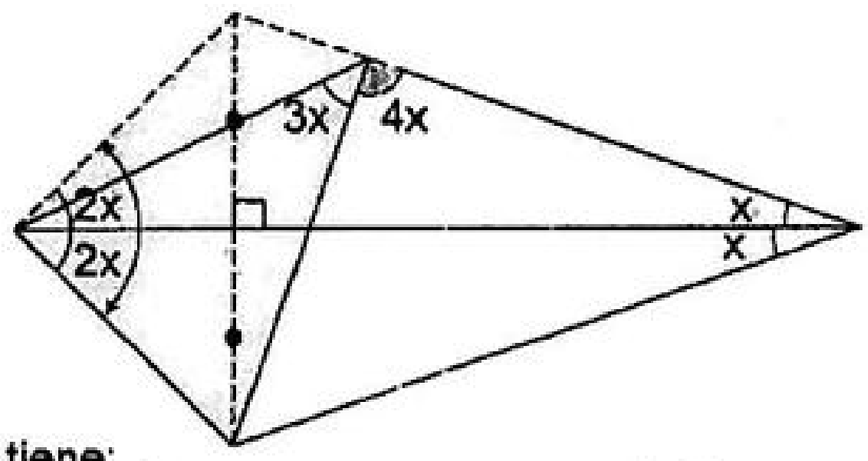
Paso N° 1. Completamos a un triángulo isósceles:



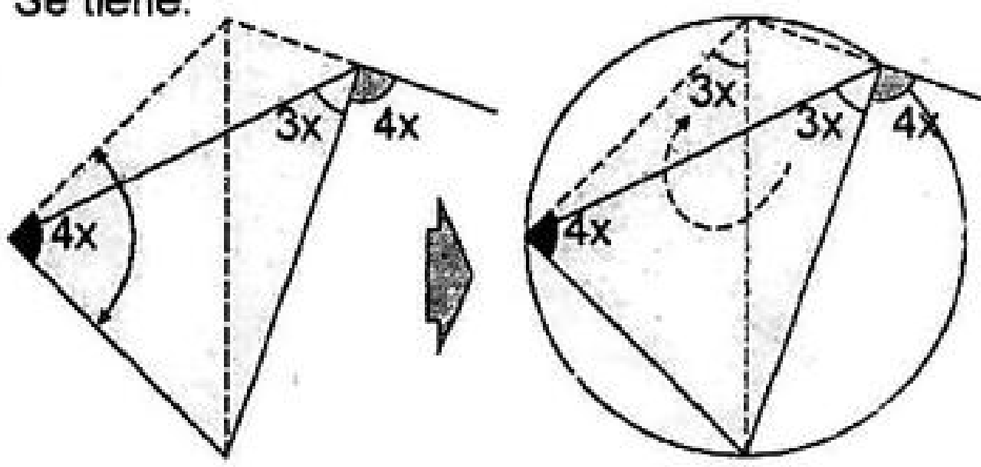
Paso N° 2. Se observa una recta mediatriz, donde se cumple:



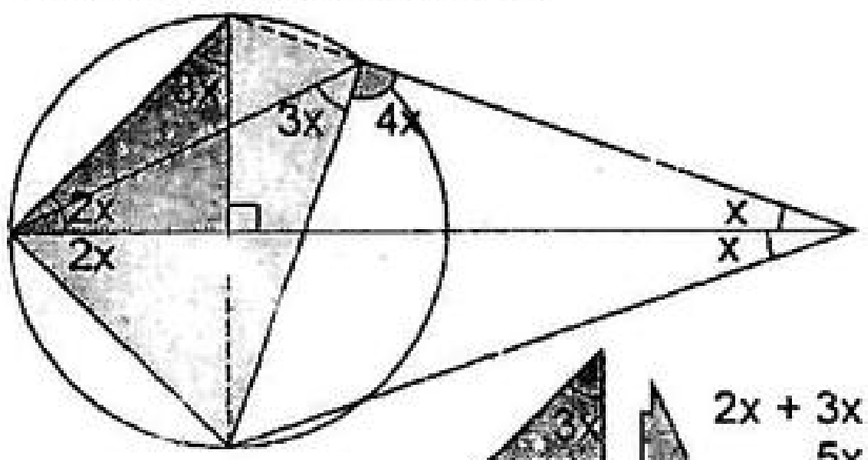
Paso N° 3. Se observa un cuadrilátero inscriptible de la forma:



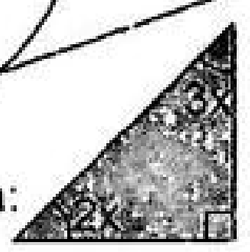
Se tiene:



Paso N° 4. Ahora tenemos:



Se observa:



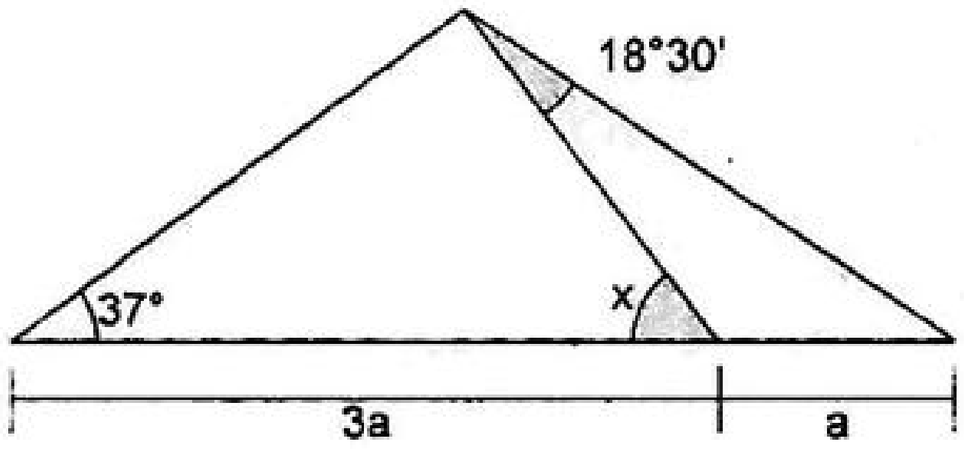
$2x + 3x = 90°$

$5x = 90°$

$x = 18°$

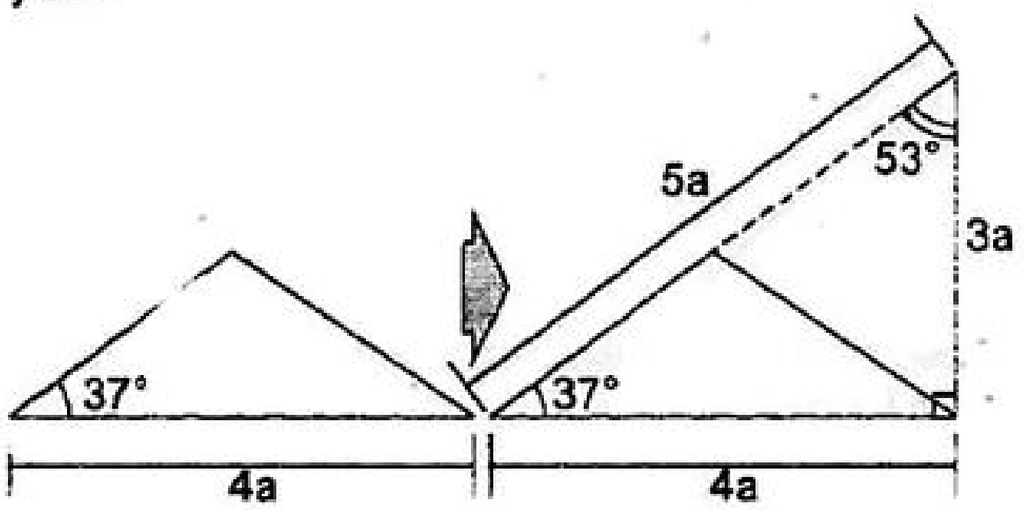
Scanned by CamScanner

Problema 08. Calcular x.

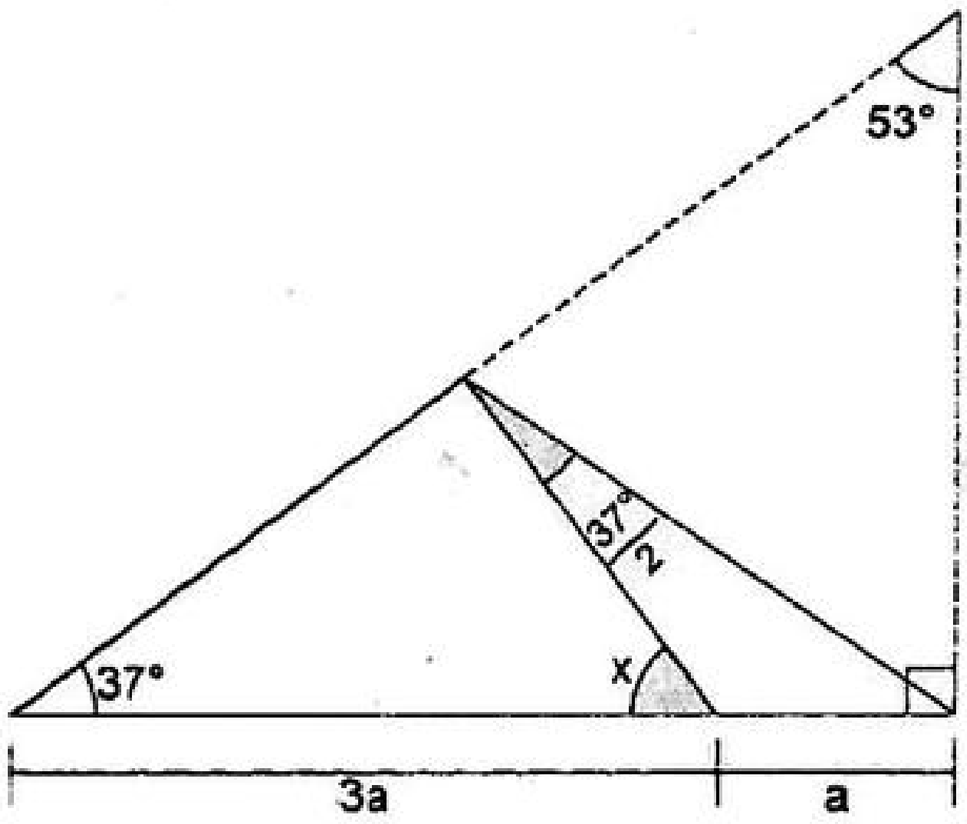


Resolución:

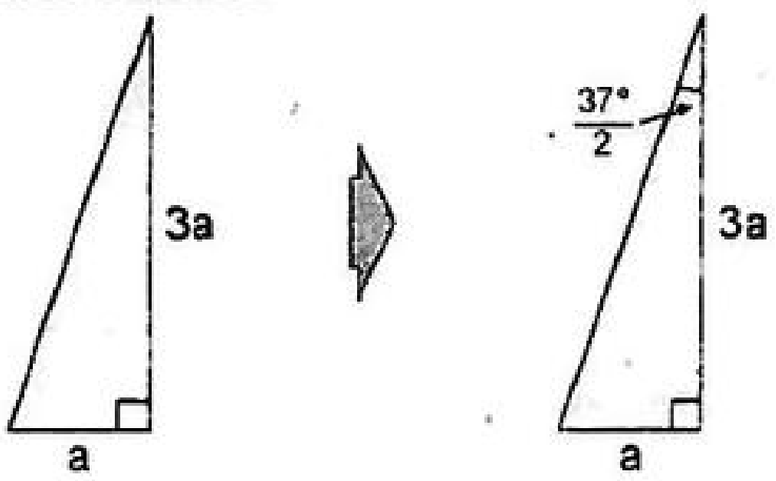
Paso N° 1. Se observa un triángulo notable de 37° y 53°:



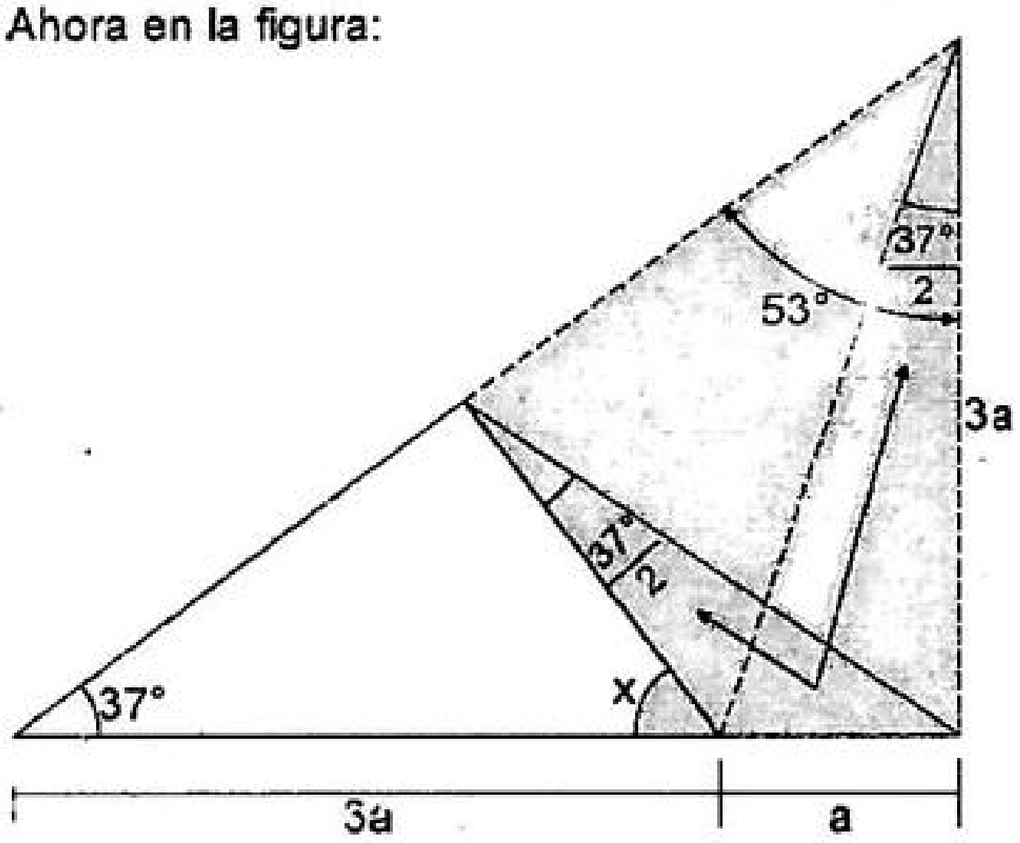
*.Ahora realizamos en la figura el trazo mostrado:



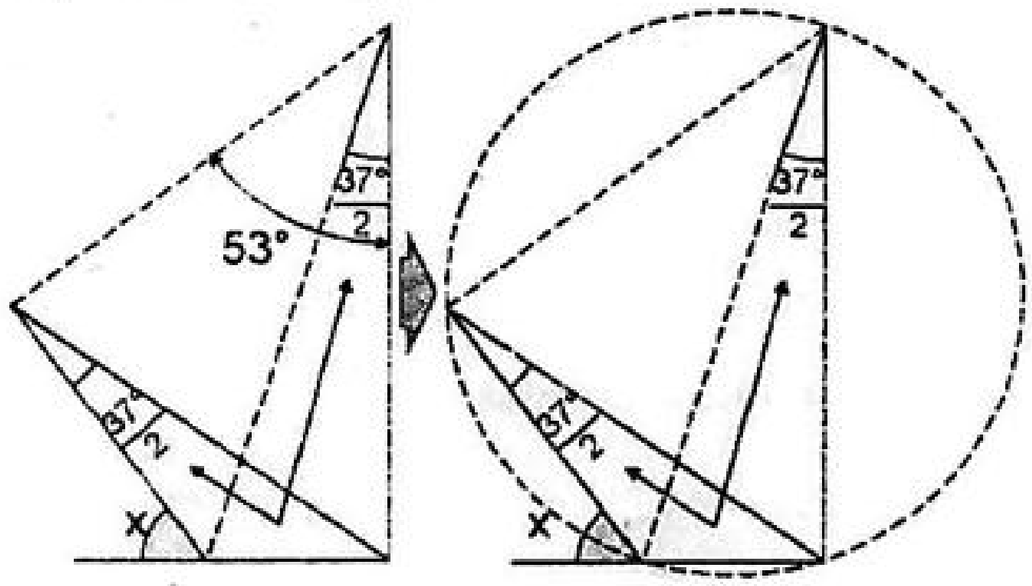
Aquí se observa:



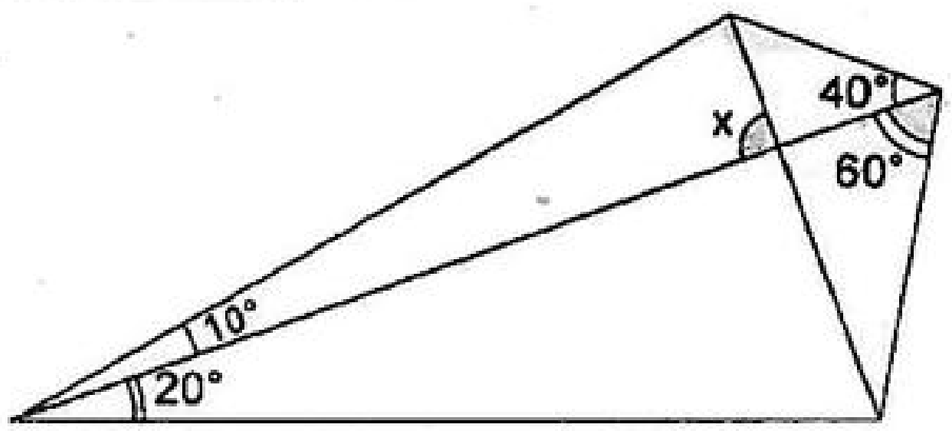
Ahora en la figura:



Aquí también cumple:



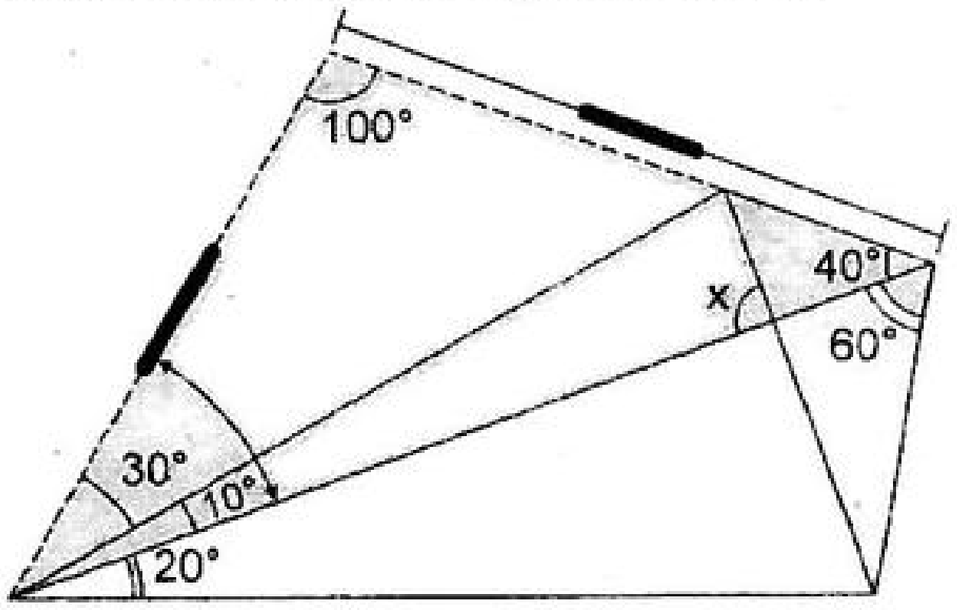
Problema 09. Calcular x.



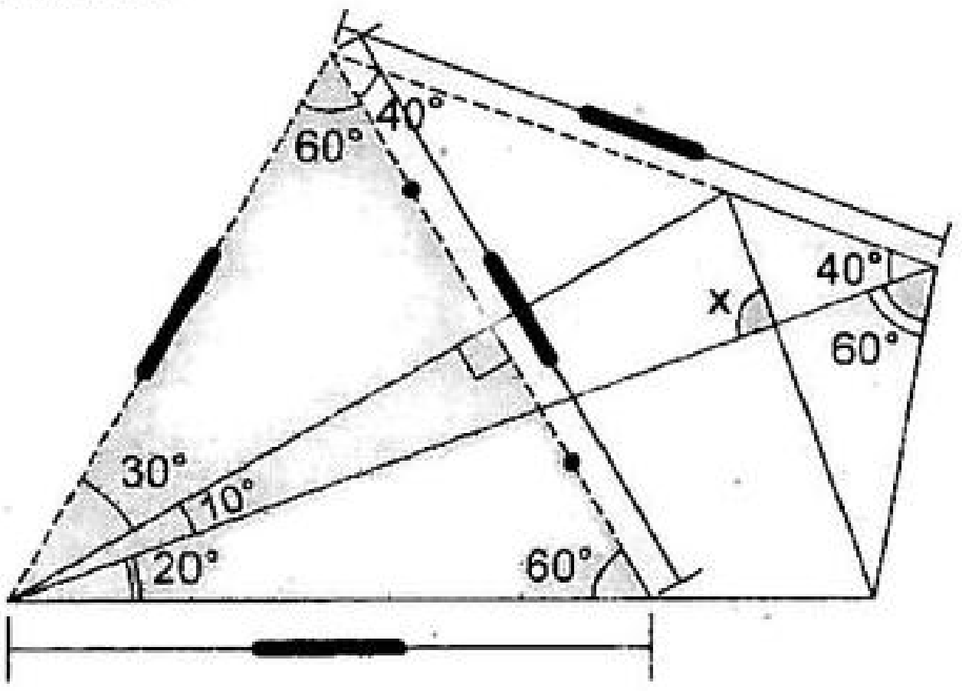
Scanned by CamScanner

Resolución:

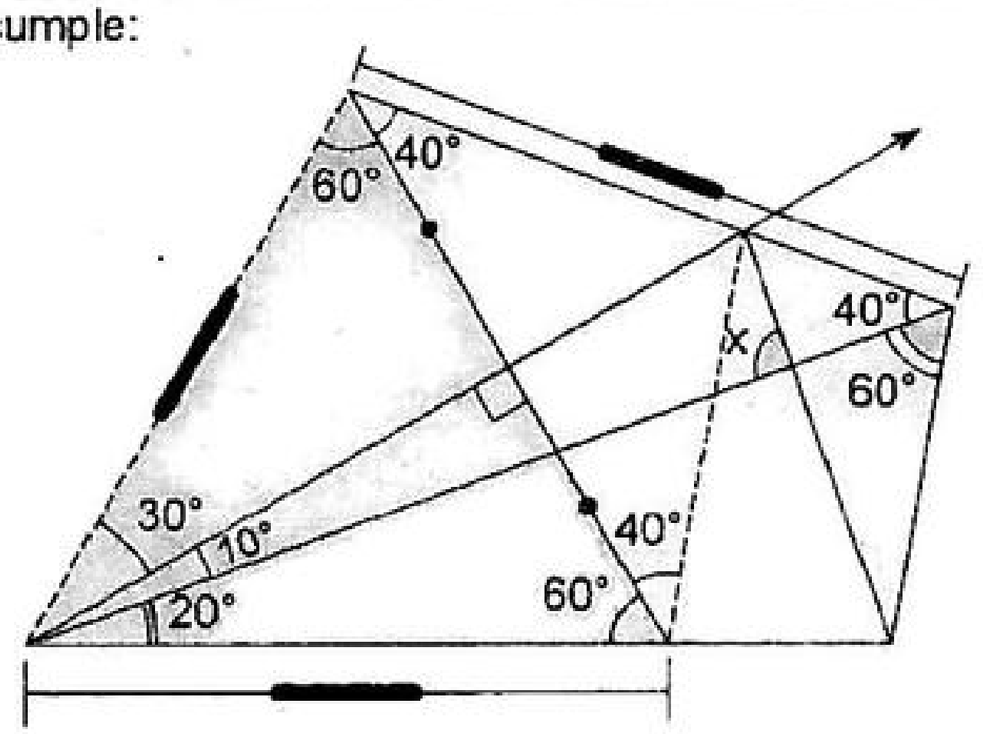
Paso N° 1. Se forma un triángulo isósceles:



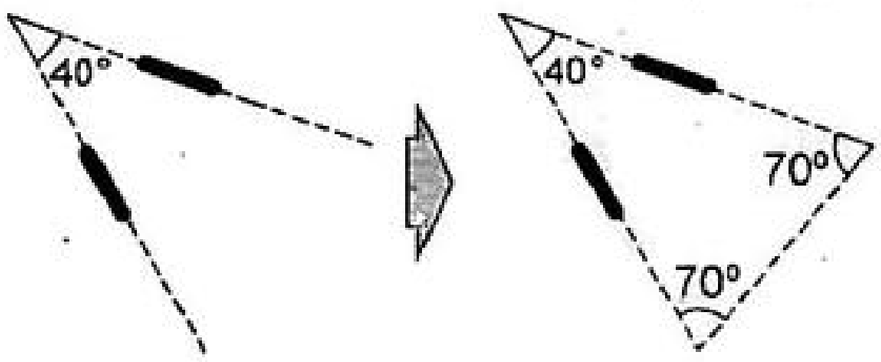
Paso N°2. Observamos un ángulo de 30° entonces formamos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

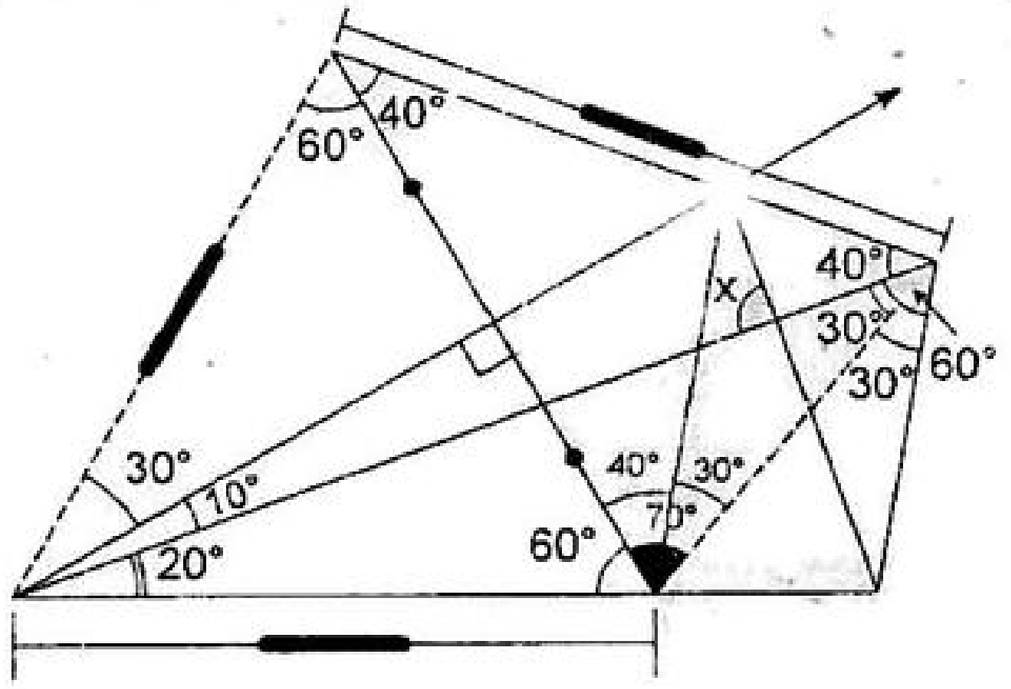


Paso N°3. Se tiene una recta mediatriz donde se cumple:

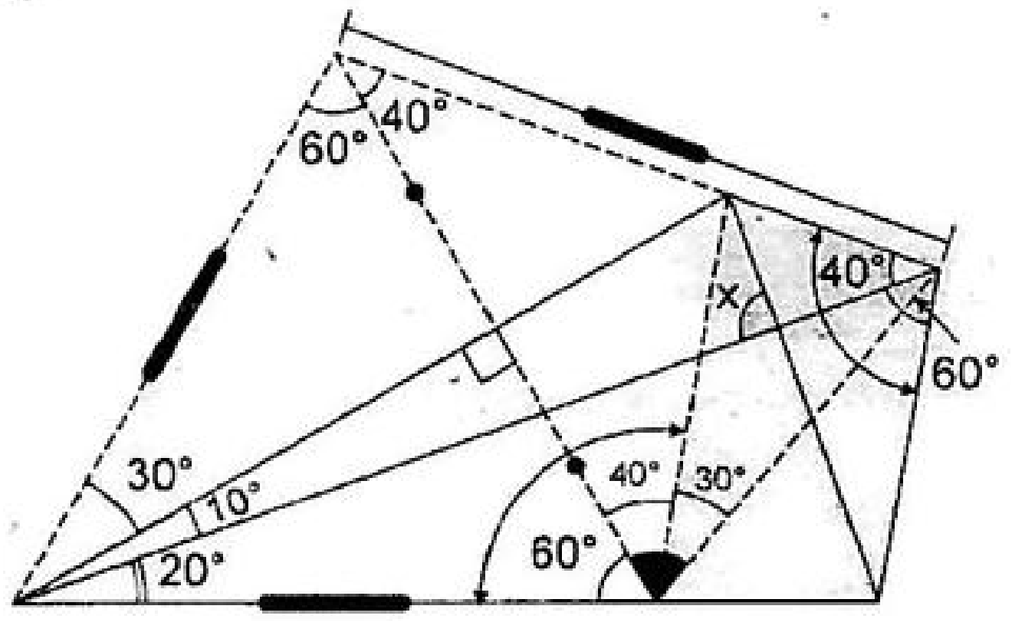


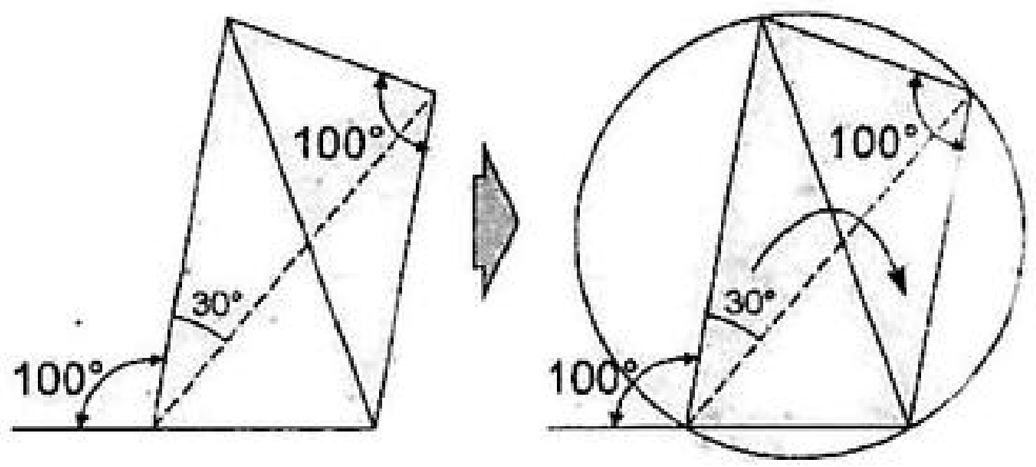
Paso N°4. Ahora observemos la siguiente figura



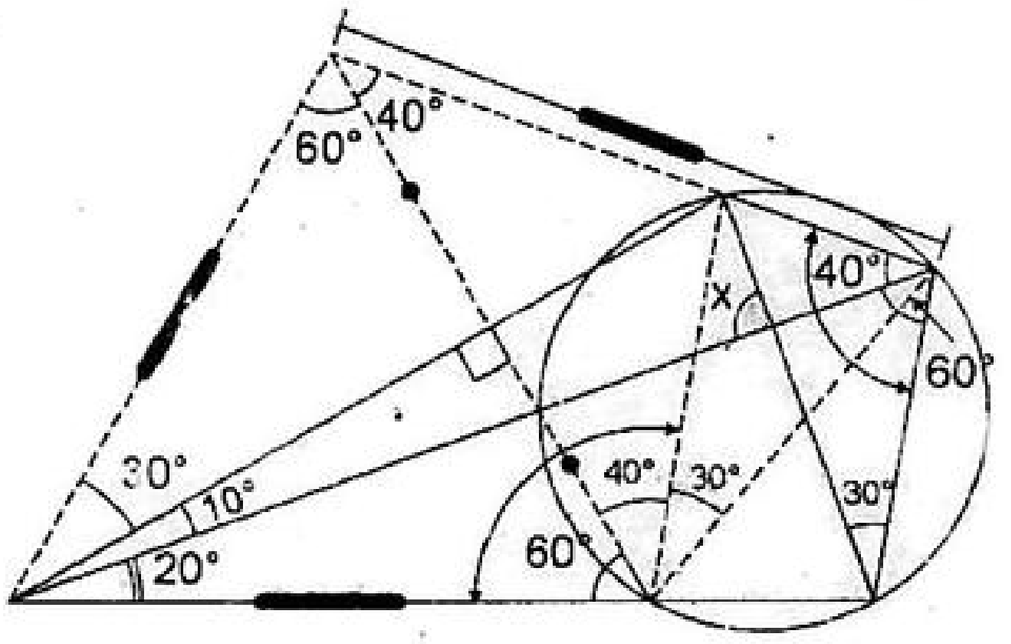


Paso N°5. Se observa un cuadrilátero donde cumple:



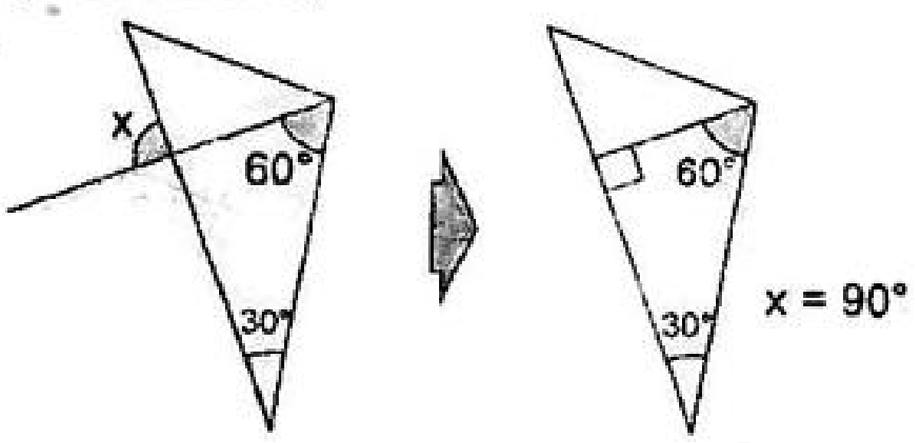


Paso N°6.

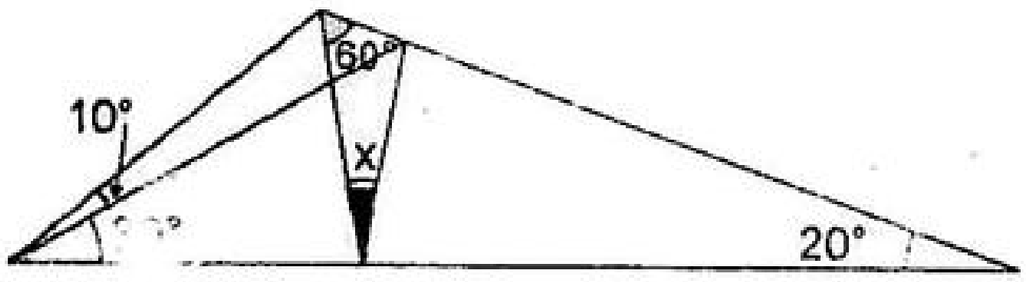


Scanned by CamScanner

Aquí se observa.

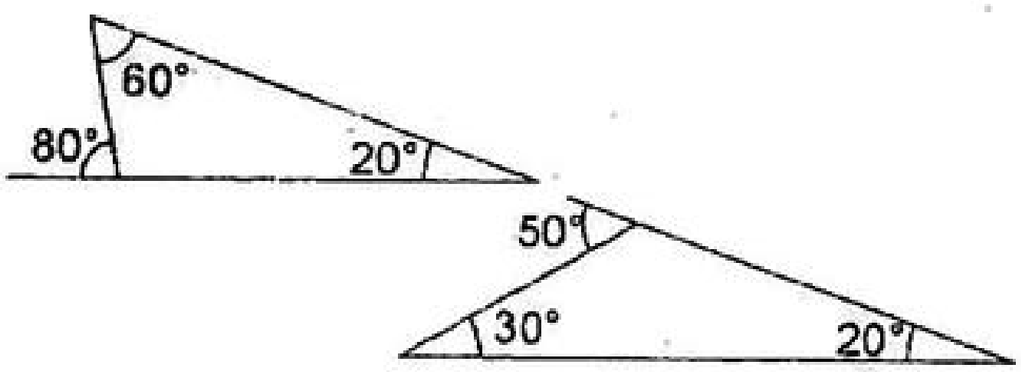


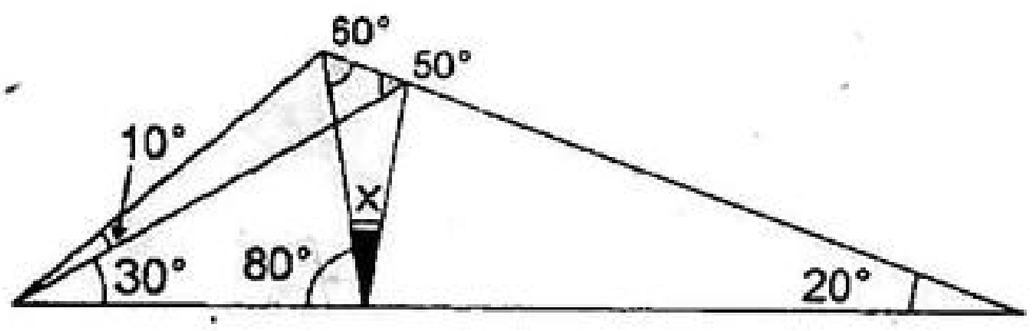
Problema 10. Calcular x.



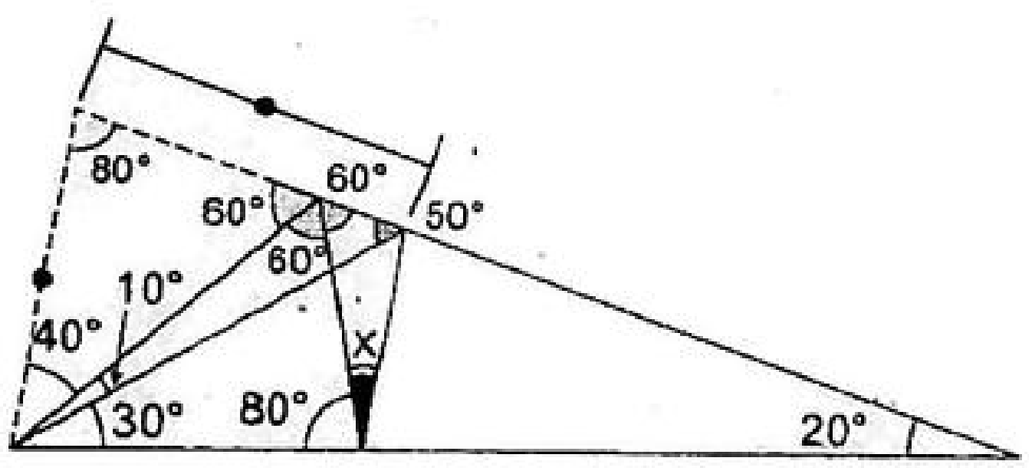
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos:



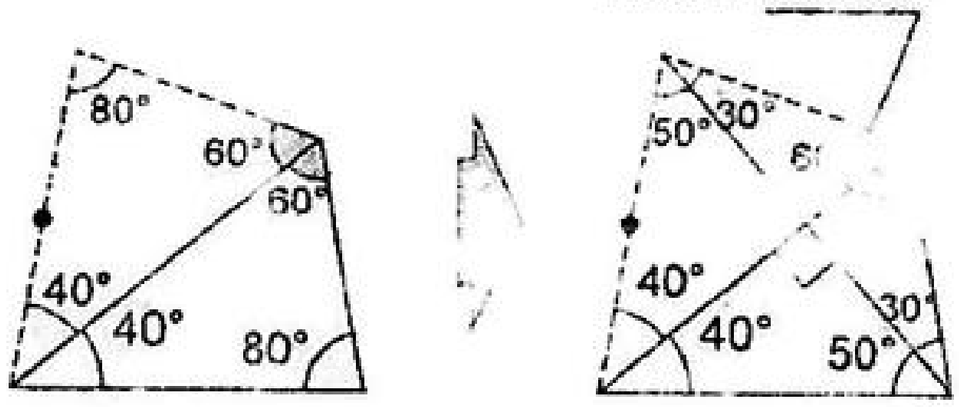


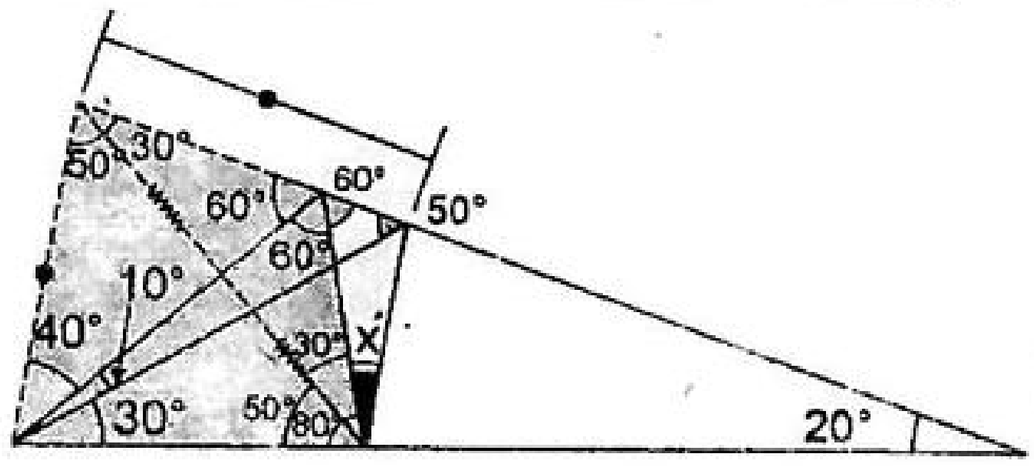
Paso N° 2. Ahora formemos un triángulo isósceles de la forma::



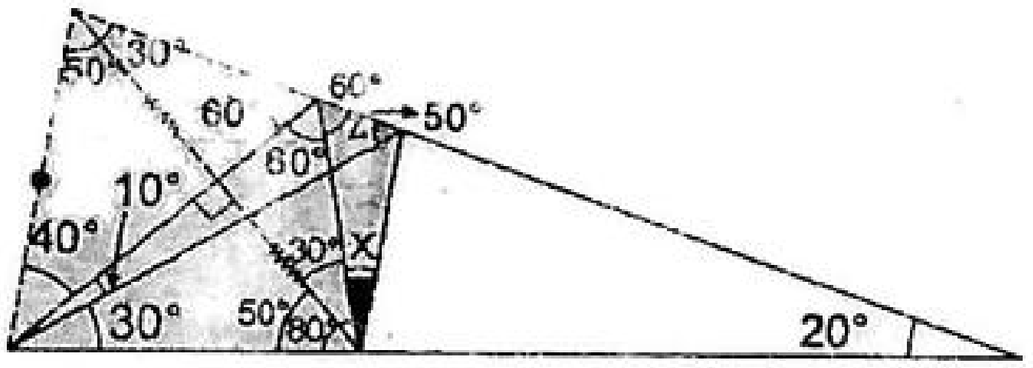
Paso N° 3. Observemos la siguiente figura:

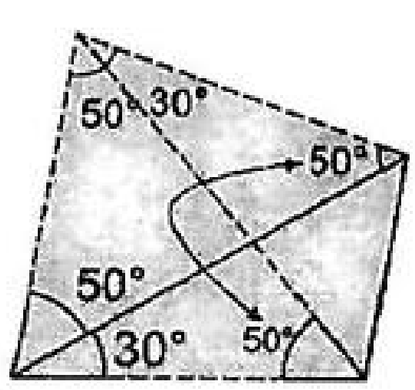
Recta mediatriz

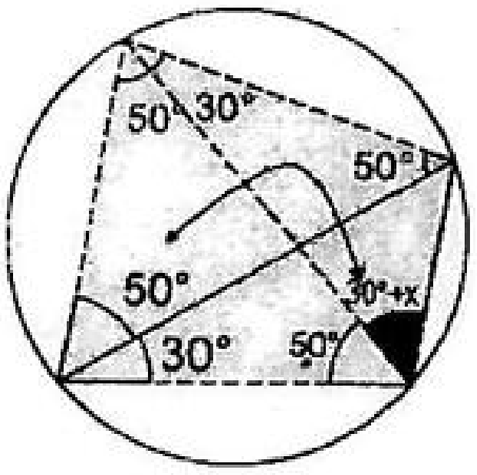


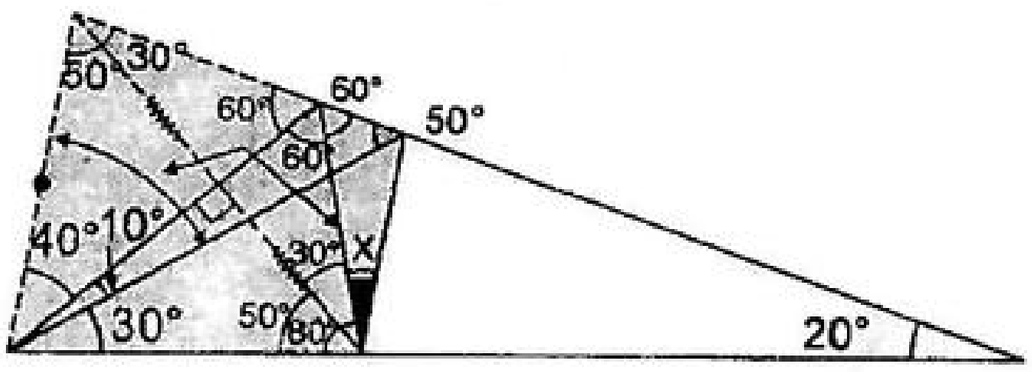


Paso N° 4. Aquí observamos un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón:







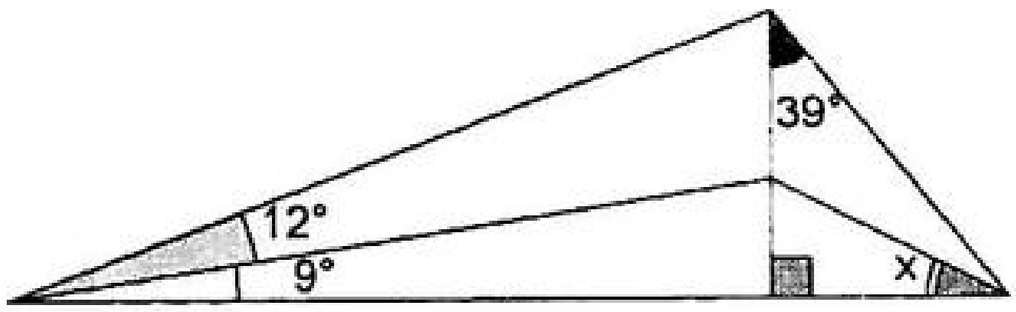


Aquí tenemos:

$$50° = 30° + x$$
$$x = 20°$$

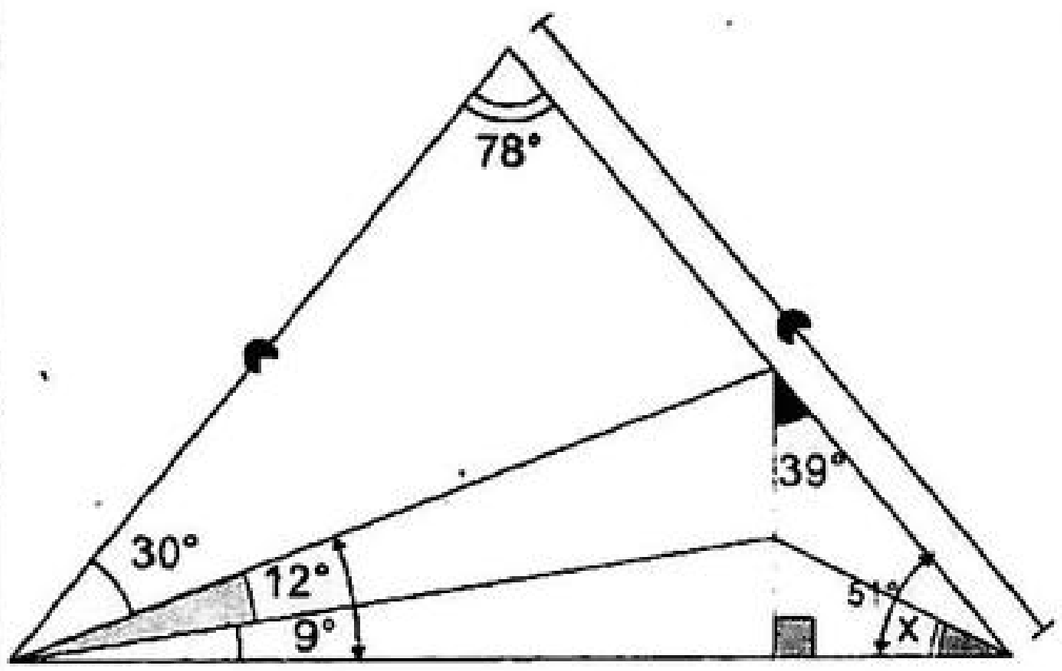
Scanned by CamScanner

Problema 11. Calcular x.

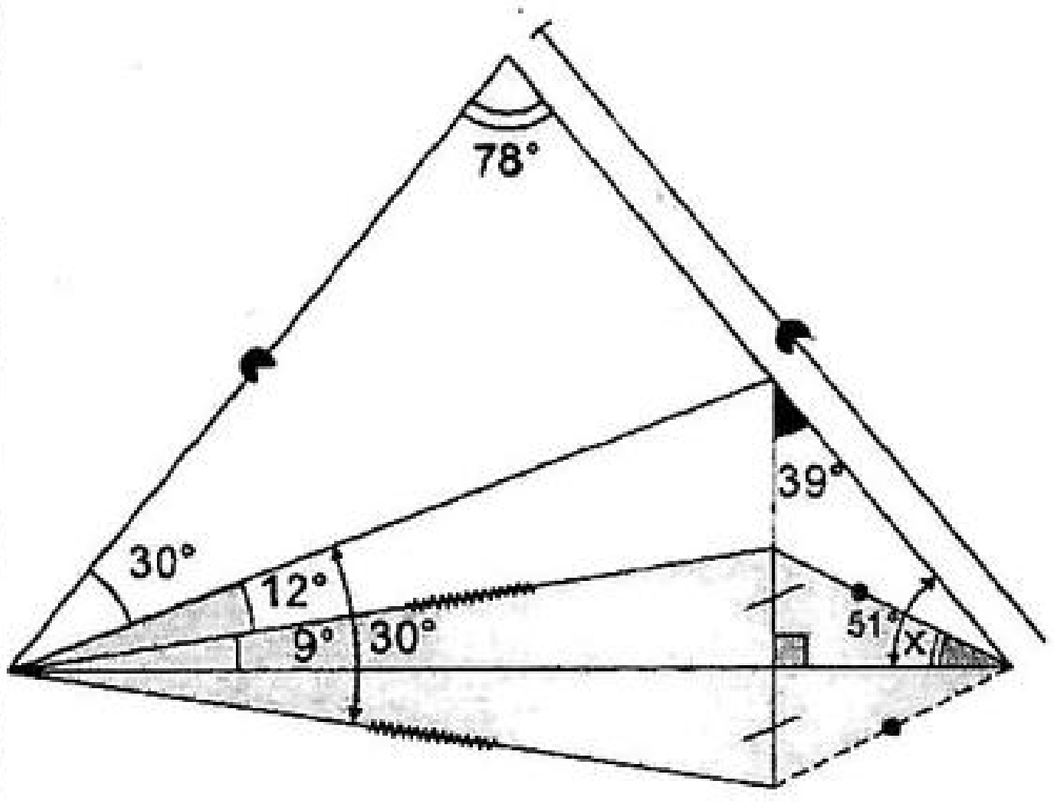


Resolución:

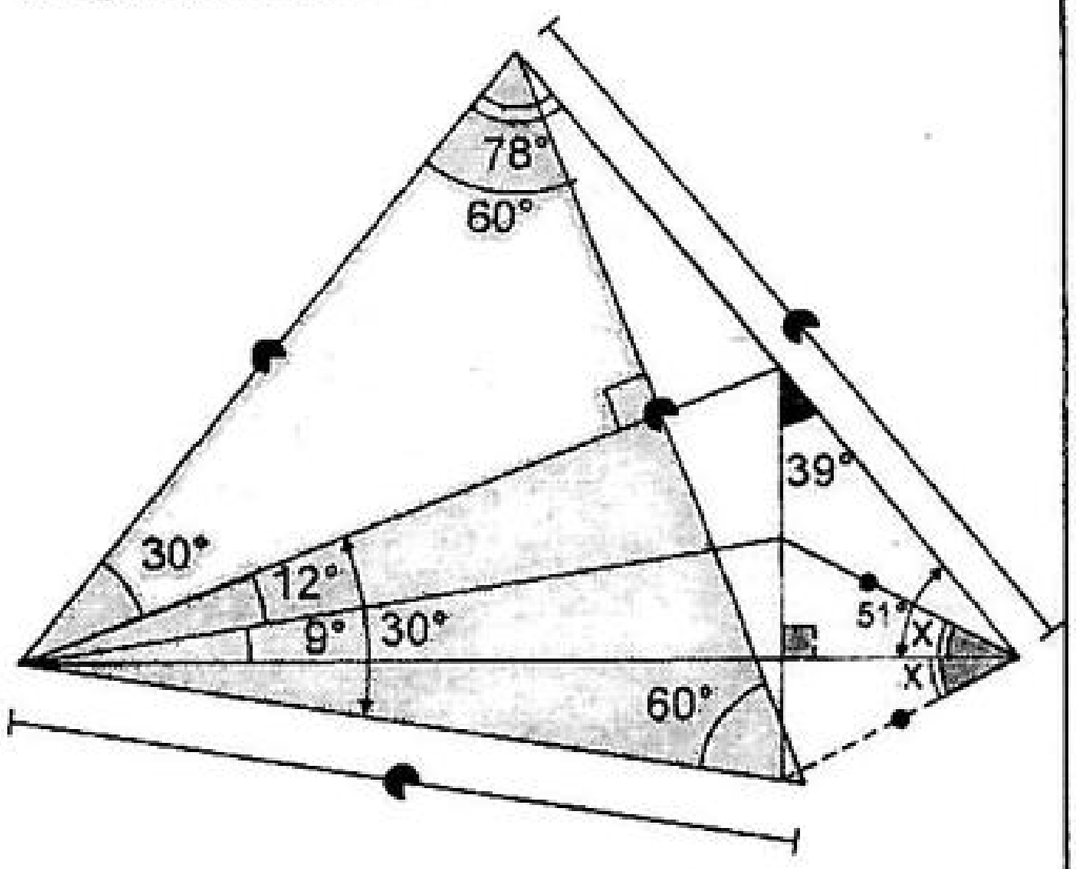
Paso N° 1. Formamos un triángulo isósceles externamente:



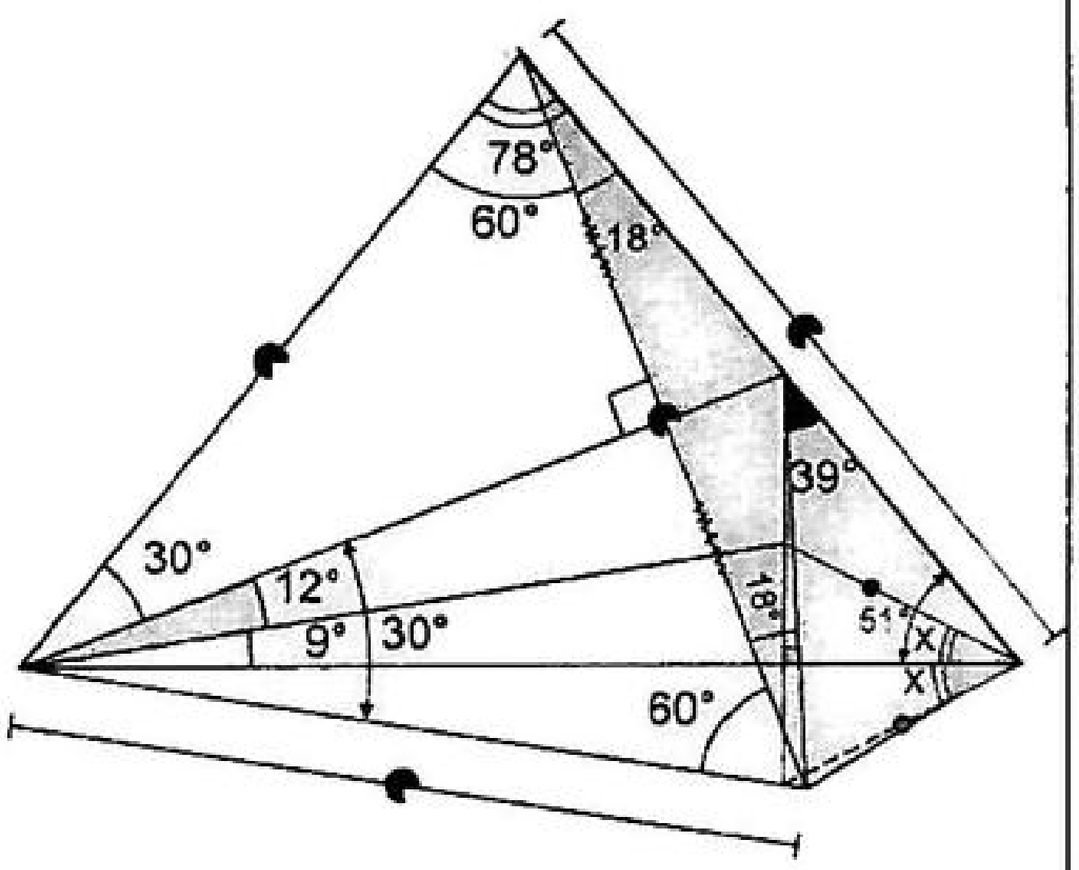
Paso N° 2. Ahora formamos un trapezoide simétrico en la figura, de la siguiente manera, para obtener un ángulo de 30° y con ello formar un triángulo equilátero.



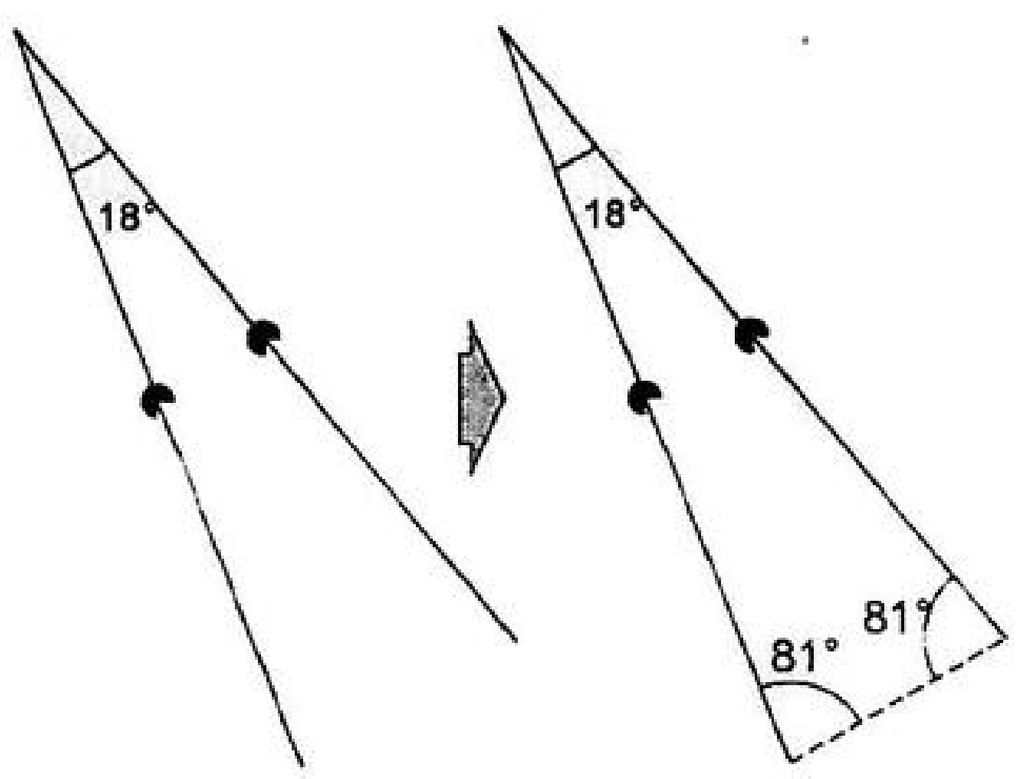
Paso N° 3. Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:.



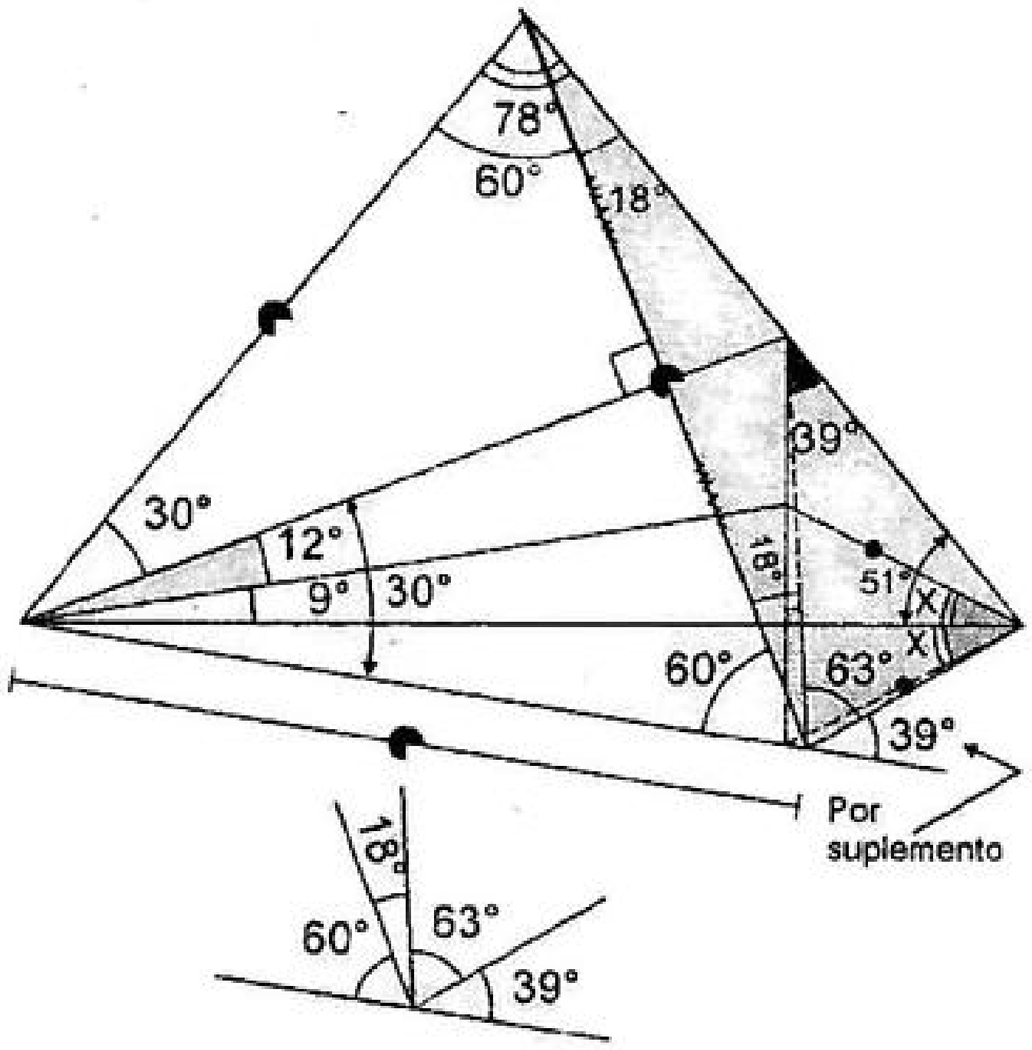
Paso N° 4. En el triángulo equilátero trazado, se observa la mediatriz, donde se cumple:



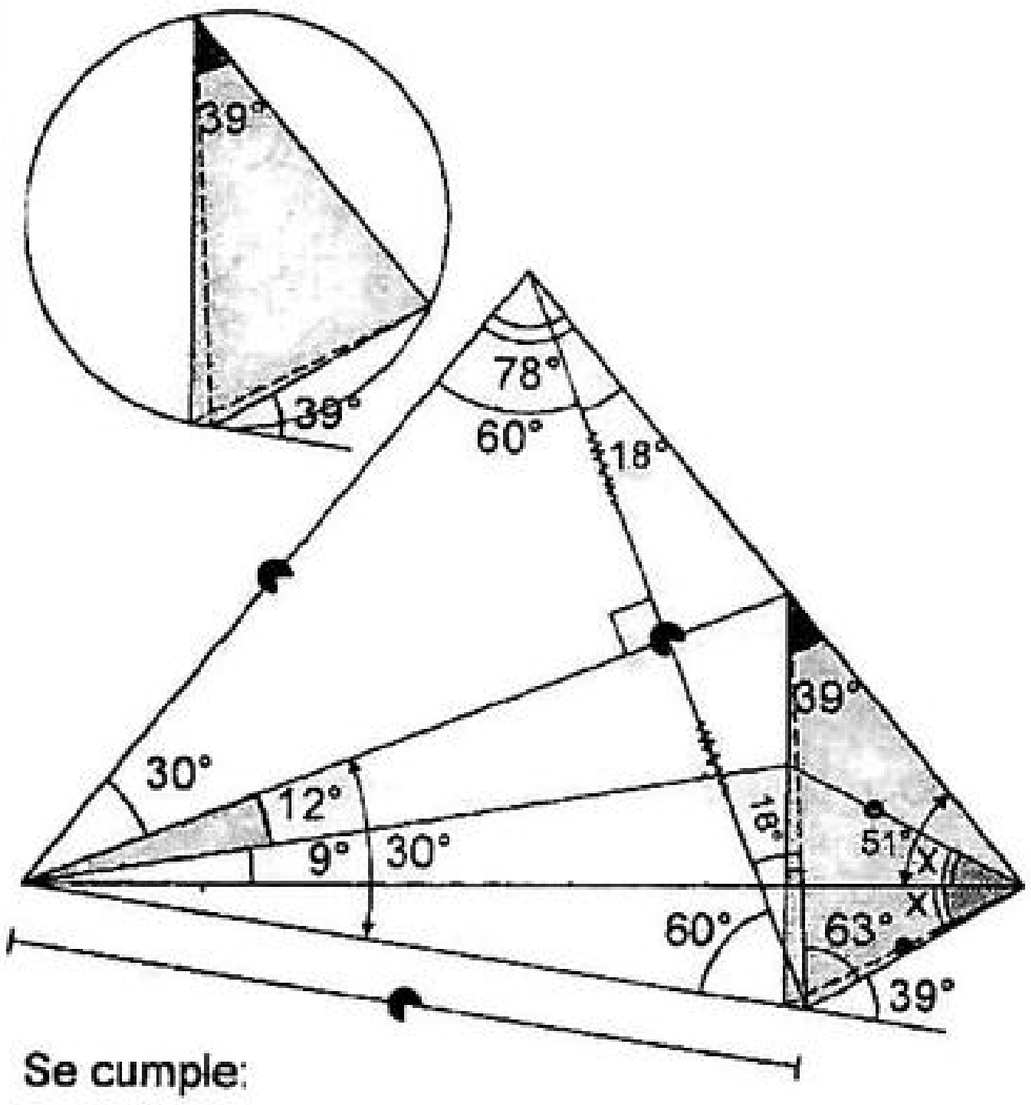
Paso N° 5. Se observa la siguiente figura:



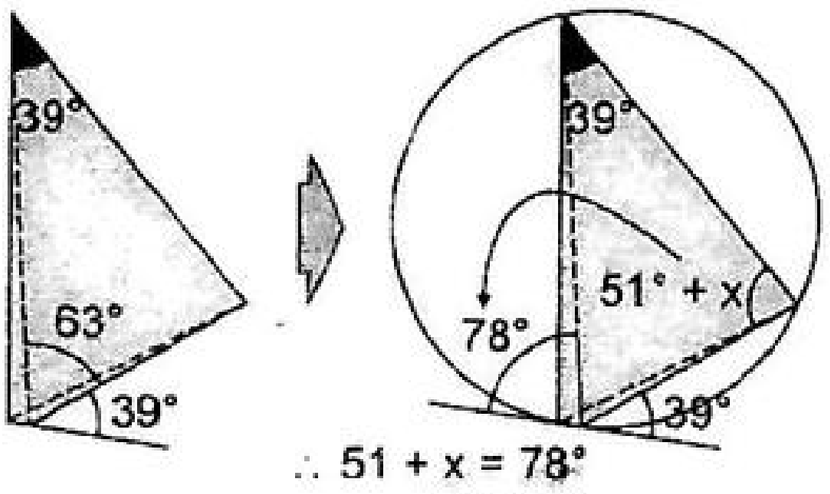
Scanned by CamScanner



Paso N° 6. Se obtiene un cuadrilátero donde se cumple la propiedad:



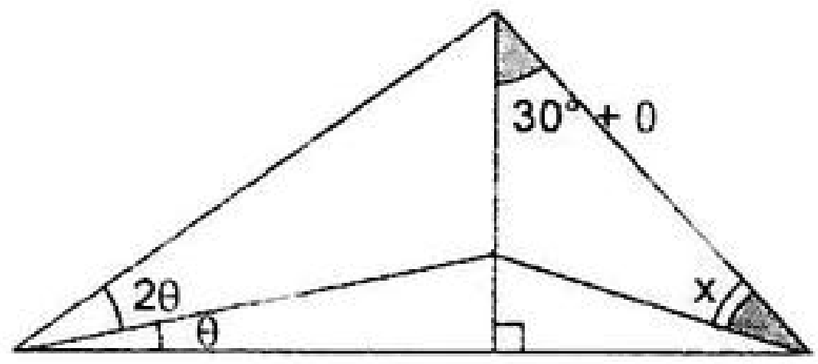
Se cumple:



$\therefore 51 + x = 78°$

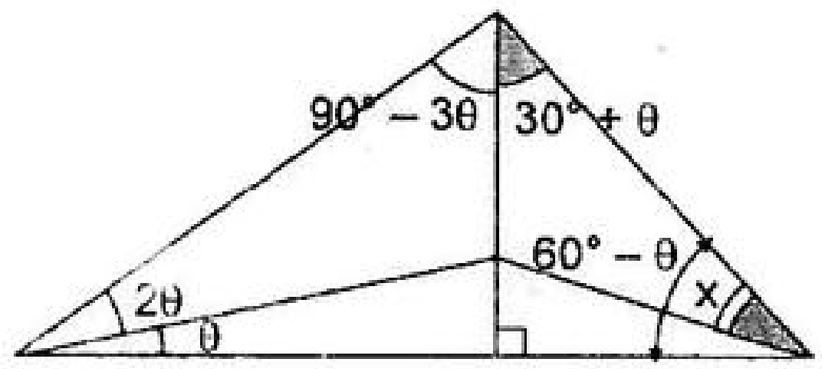
$x = 27°$

Problema 12. Calcular x.

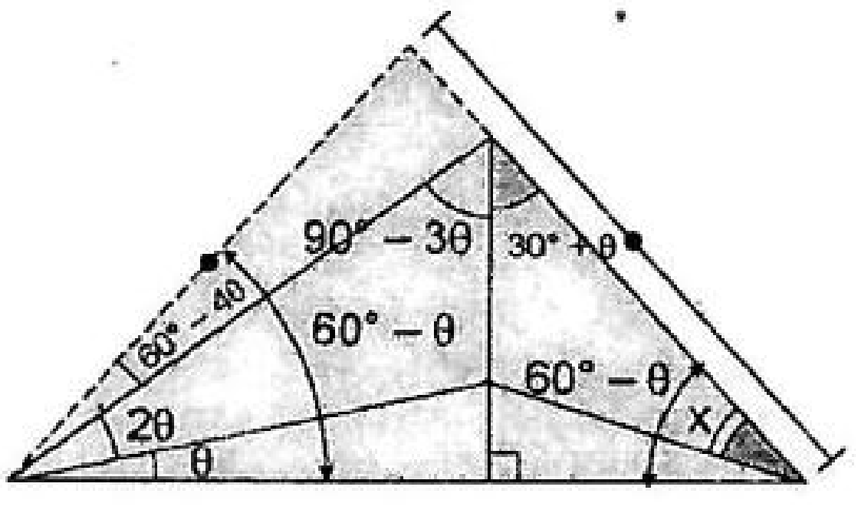


Resolución:

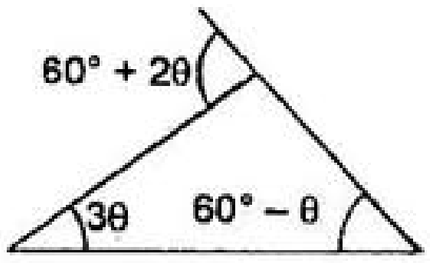
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:

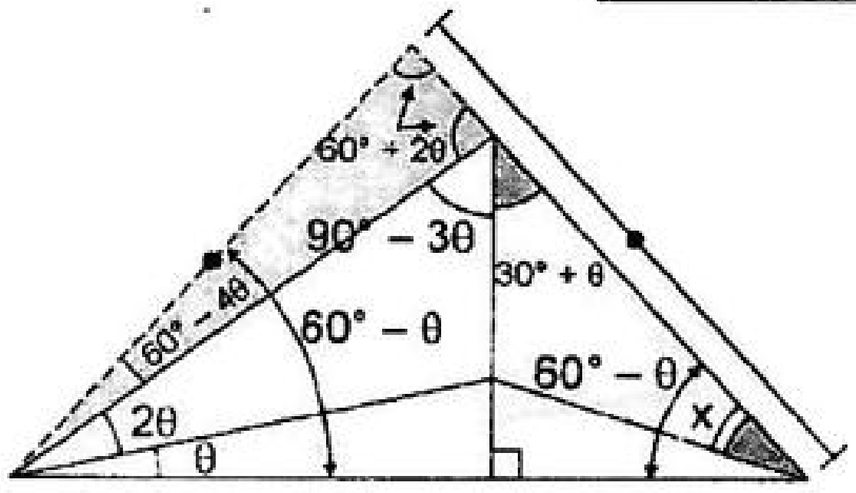


Paso N° 2. Formamos un triángulo isósceles exteriormente de la siguiente manera:



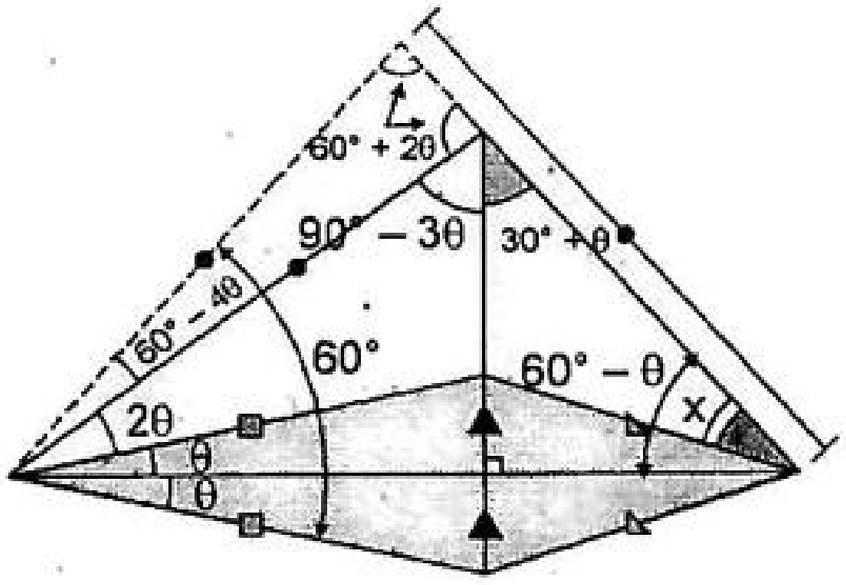
También observamos:



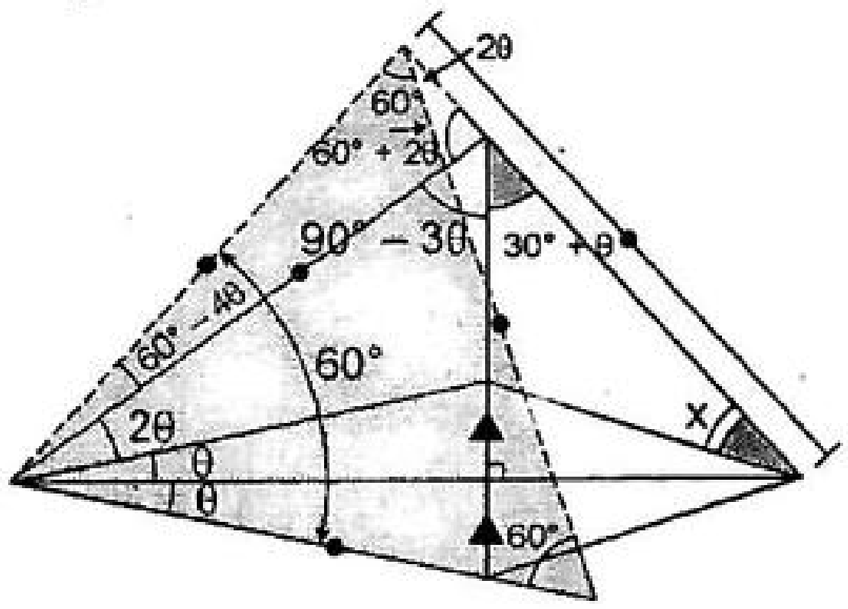


Scanned by CamScanner

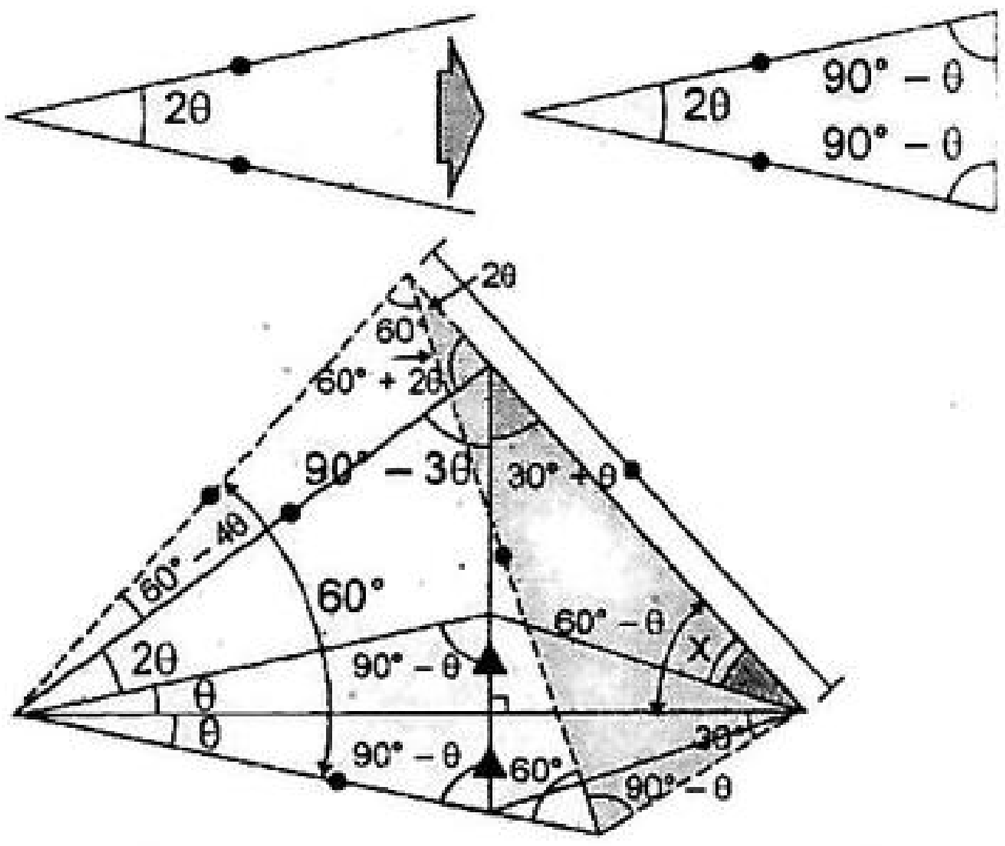
Paso N° 3. Construimos en la base del triángulo, un trapezoide simétrico, para así obtener en la figura anterior un triángulo equilátero:



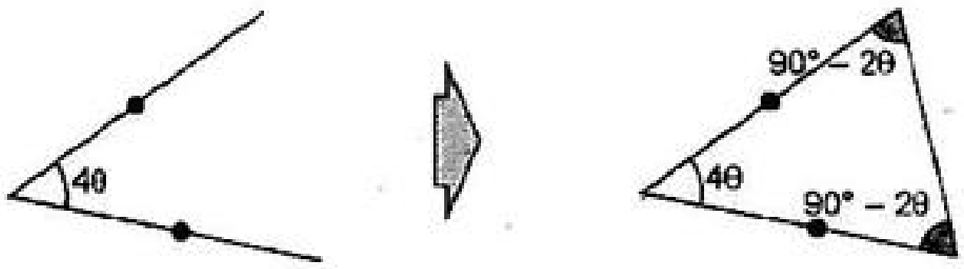
Paso N° 4. Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:



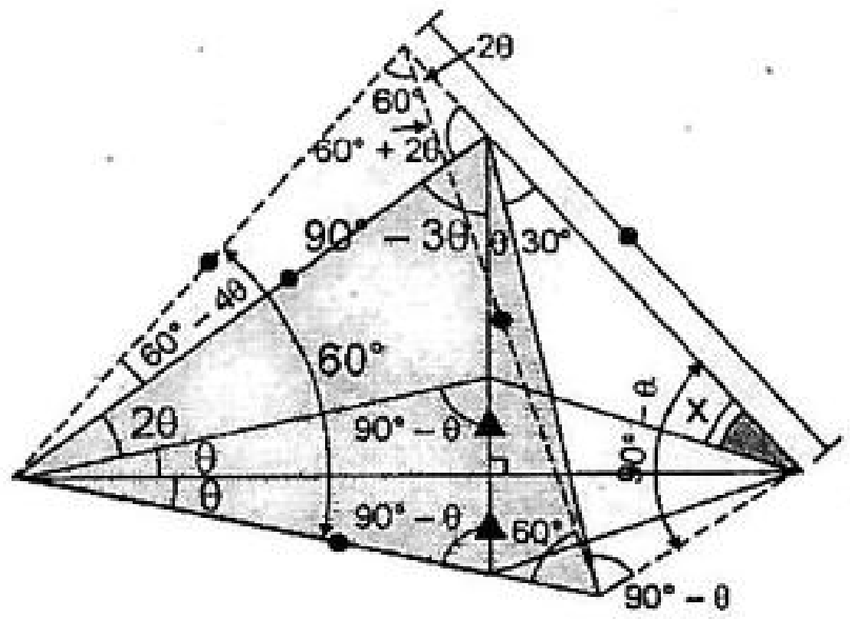
Paso N° 5. Se observa la siguiente figura:

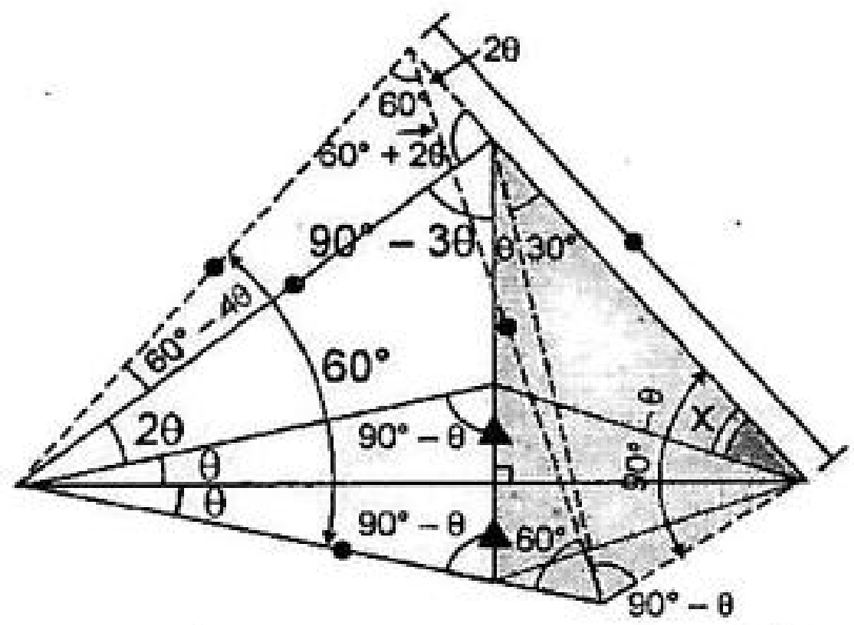


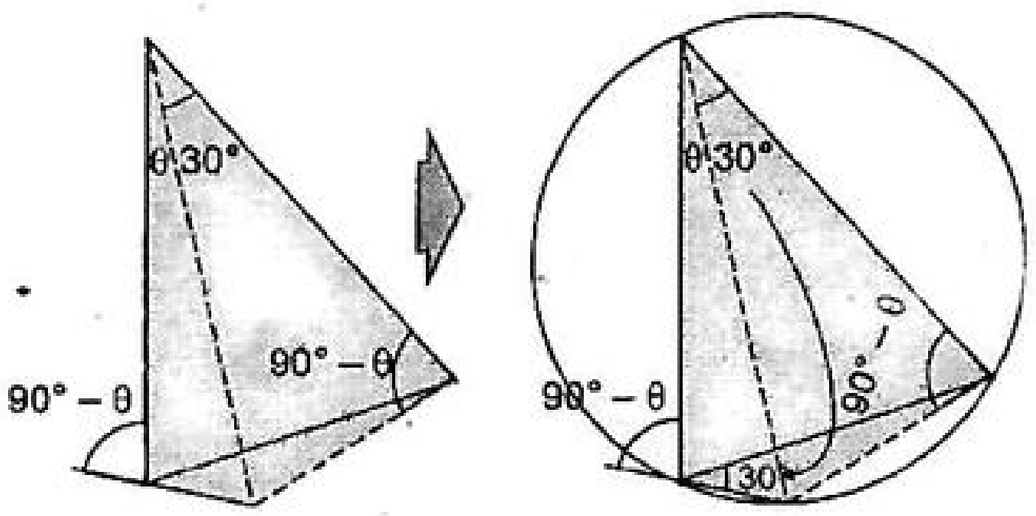
Paso N° 6. Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles:



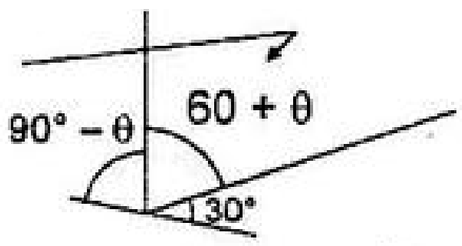
Paso N° 7.En la figura se tiene un cuadrilátero donde se cumple:



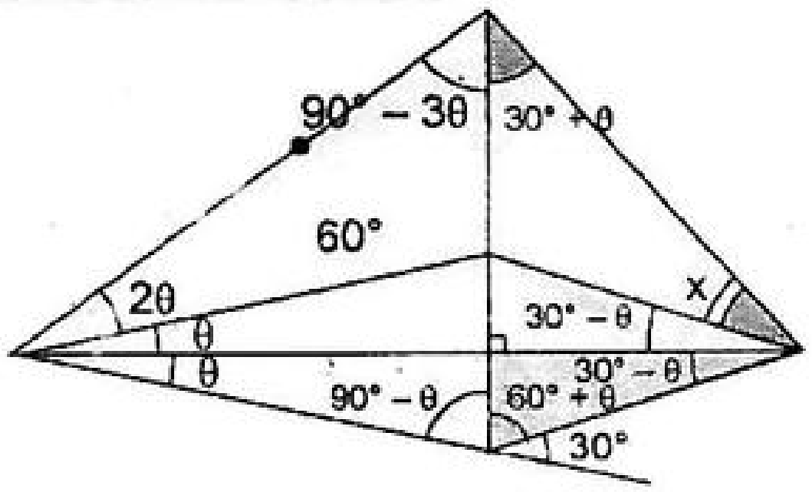




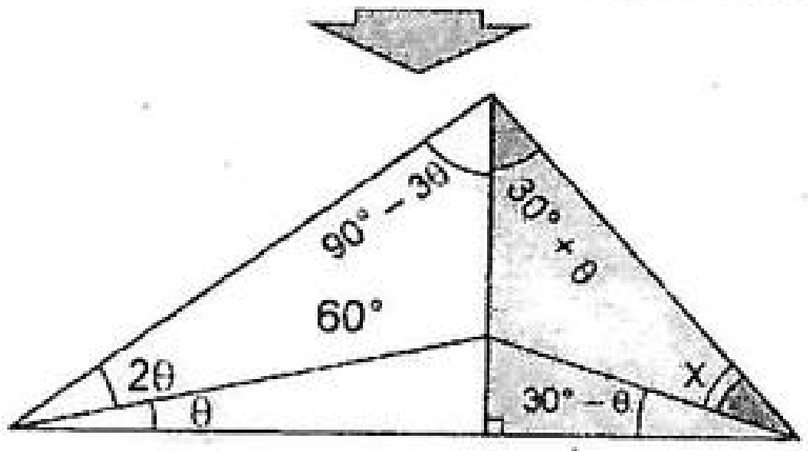
Hallando por suplemento:



Paso N° 8. Ahora observemos el trapezoide simétrico formado al inicio:



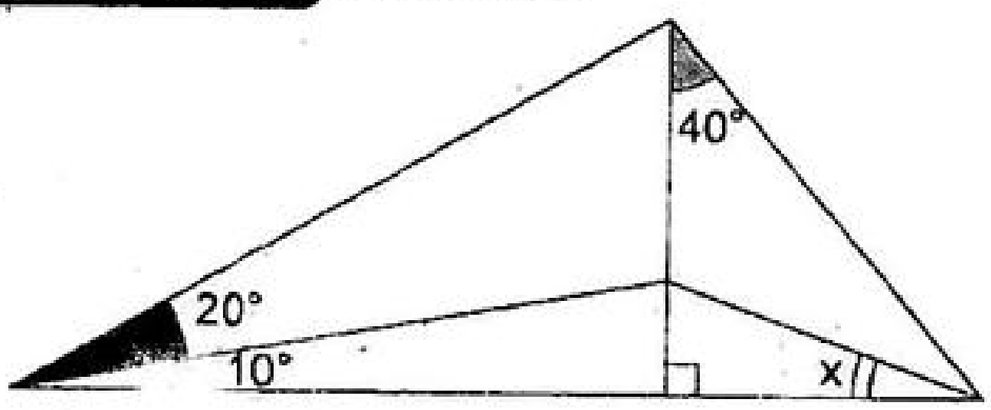
Scanned by CamScanner



Aquí se cumple:

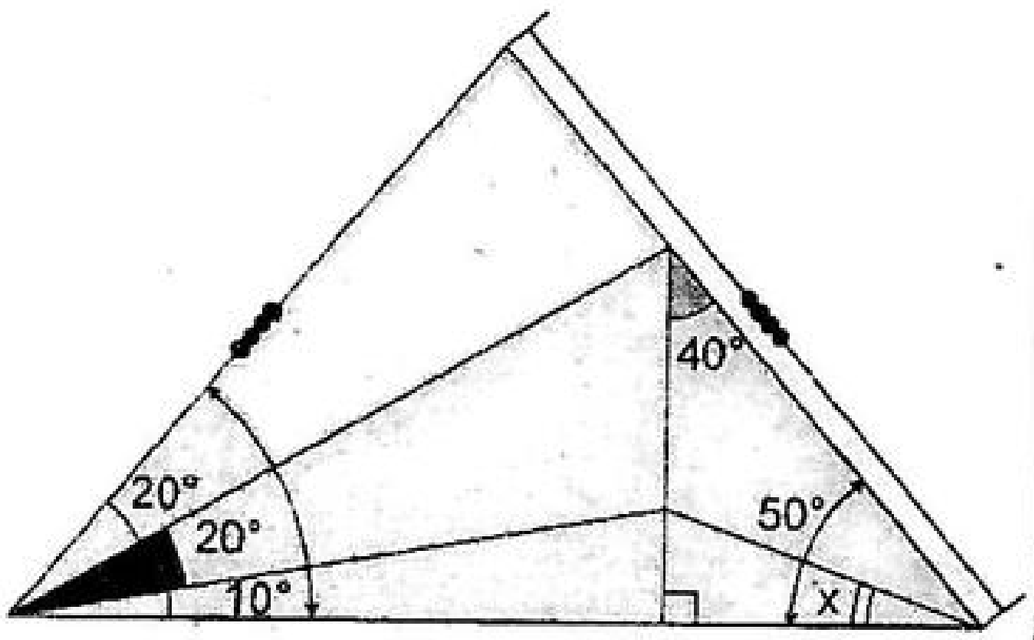
$$30° + 0 + x + 30° - \theta = 90°$$
$$60° + x = 90°$$
$$x = 30°$$

Problema 13. Calcular x.

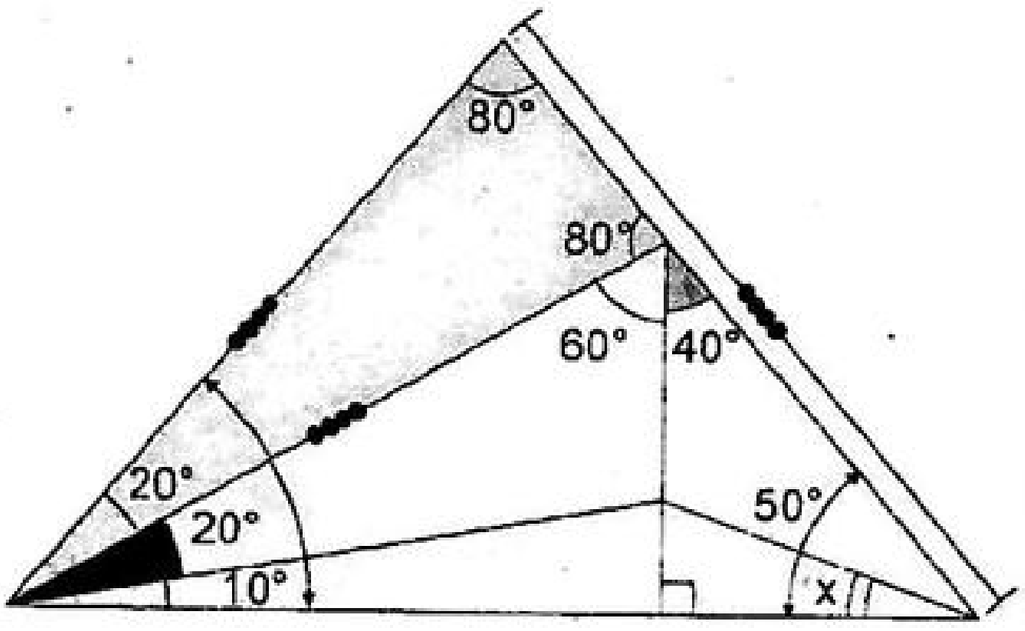


Resolución: Primer método:

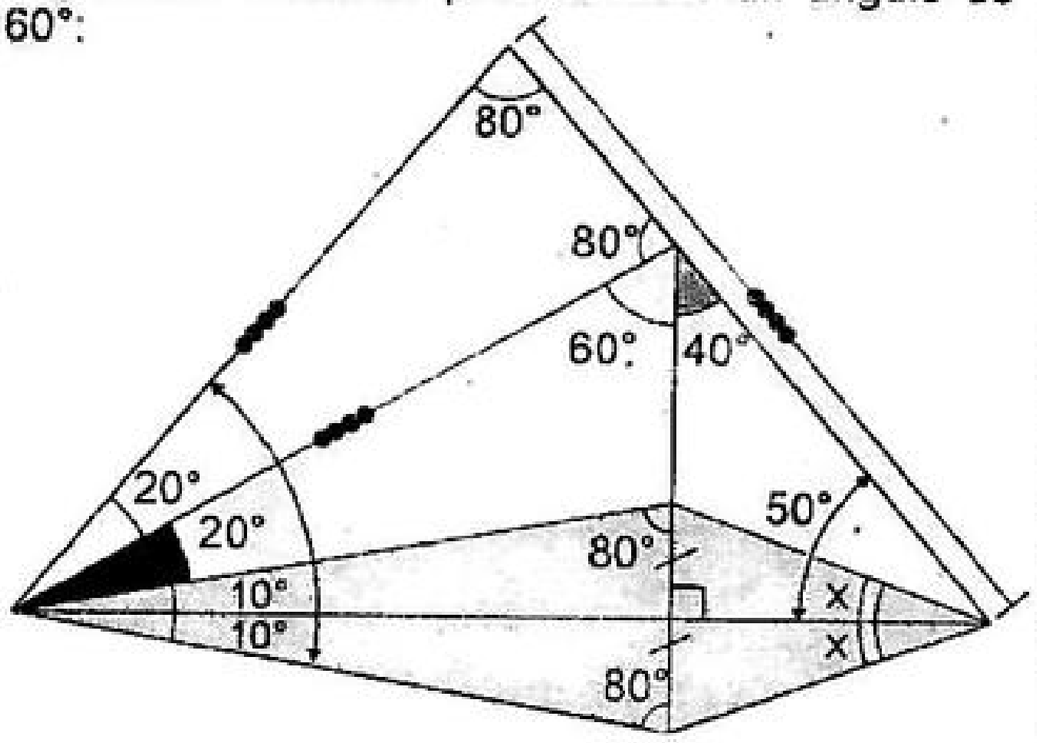
Paso N° 1. Construimos un triángulo isósceles de la siguiente manera:



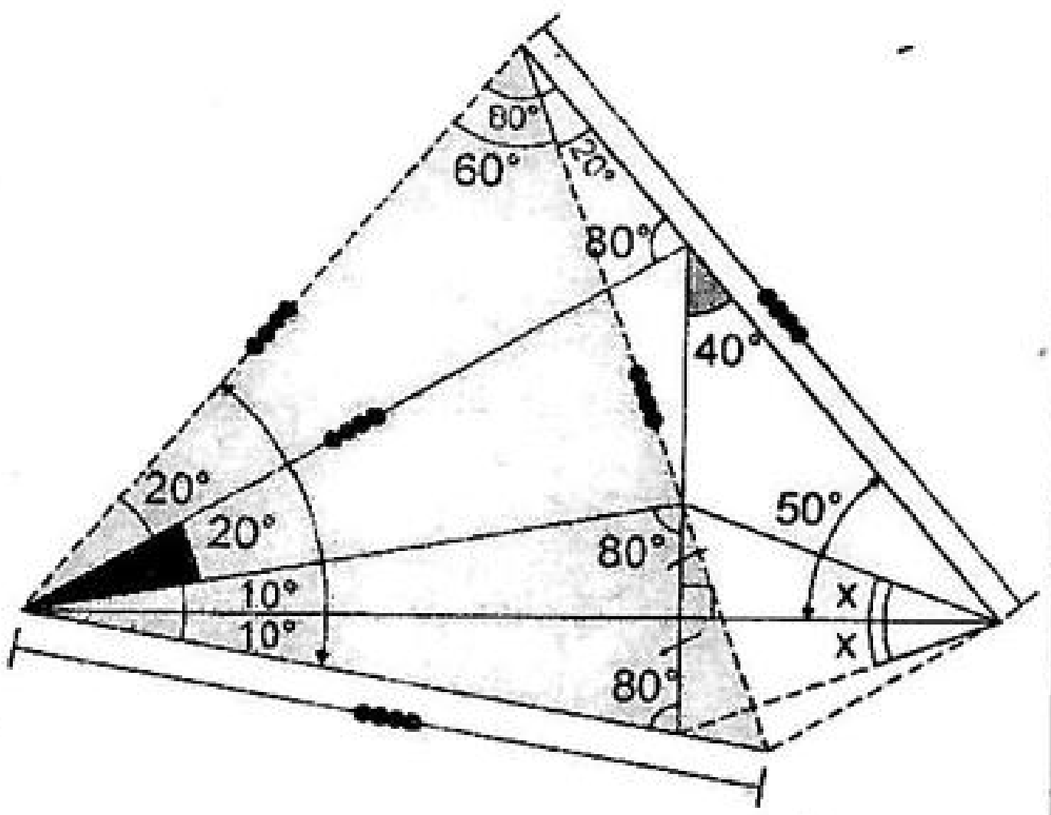
Paso N° 2. Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles:



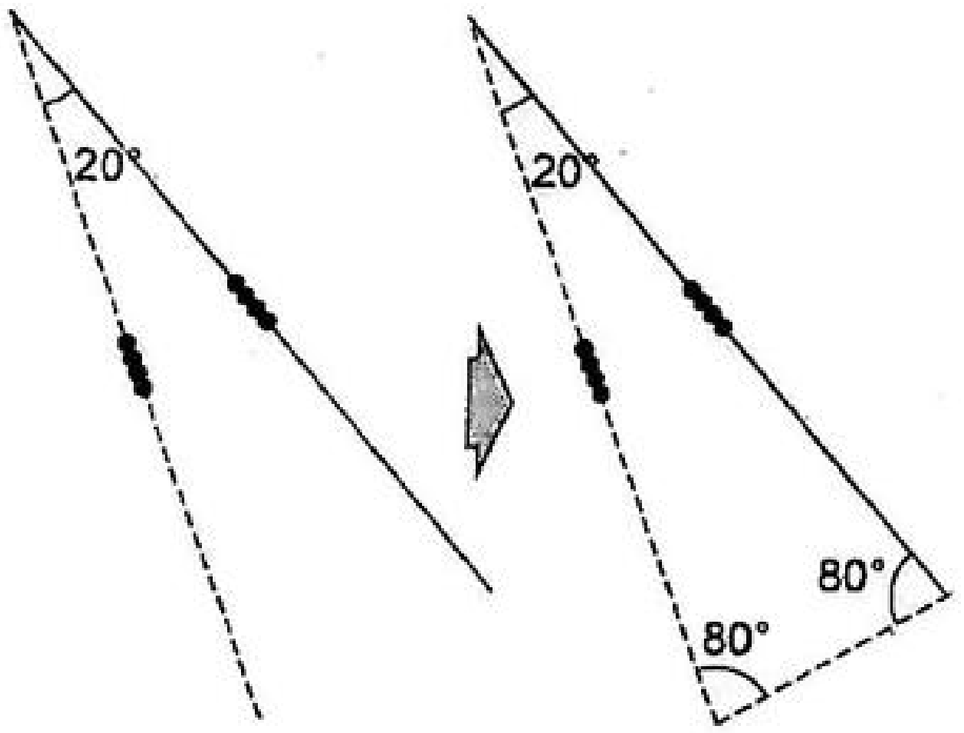
Paso N° 3. En la base del triángulo construimos un trapezoide simétrico para obtener un ángulo de 60°:



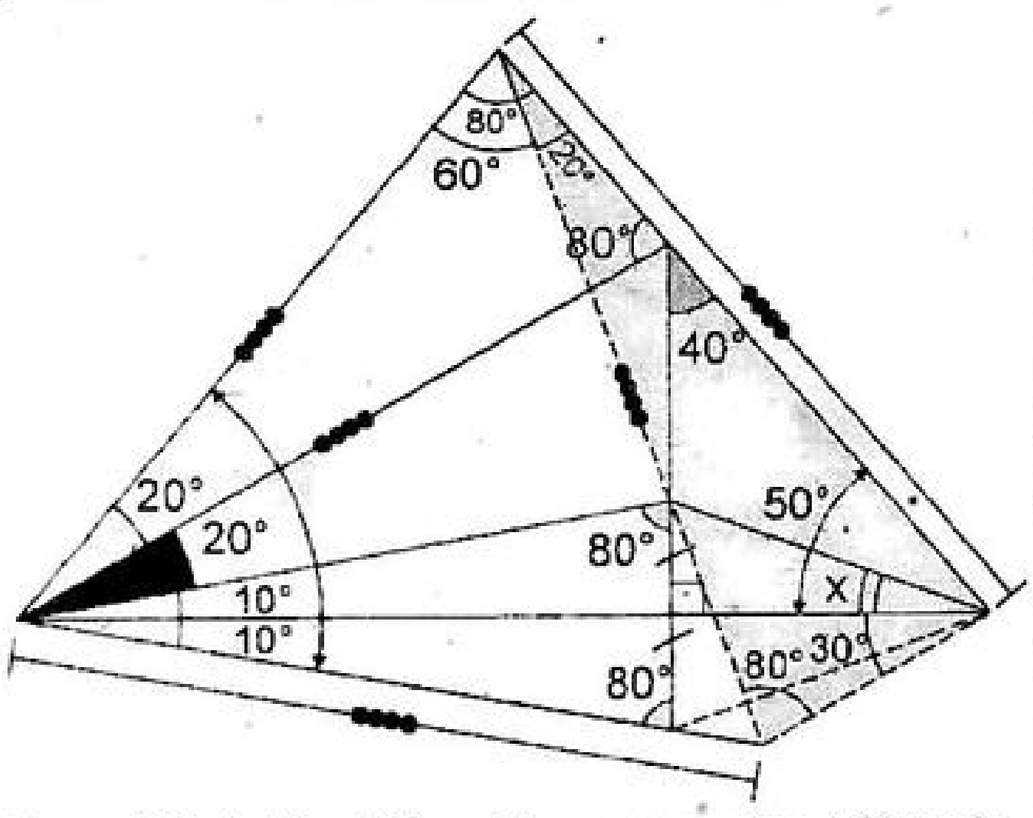
Paso N° 4. Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:



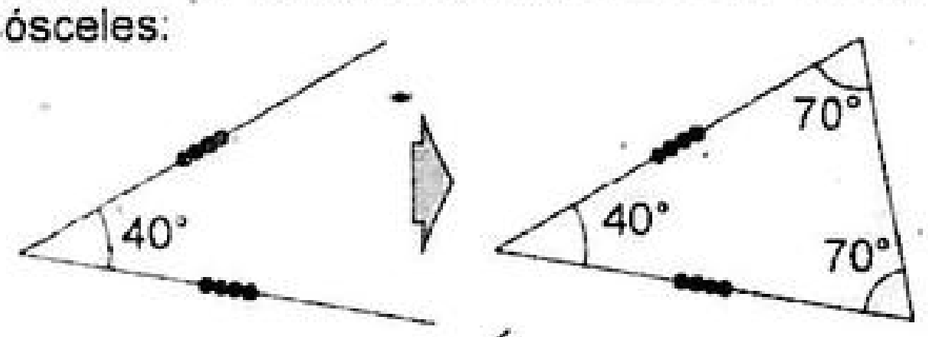
Paso N° 5. Se observa un nuevo triángulo isósceles: .

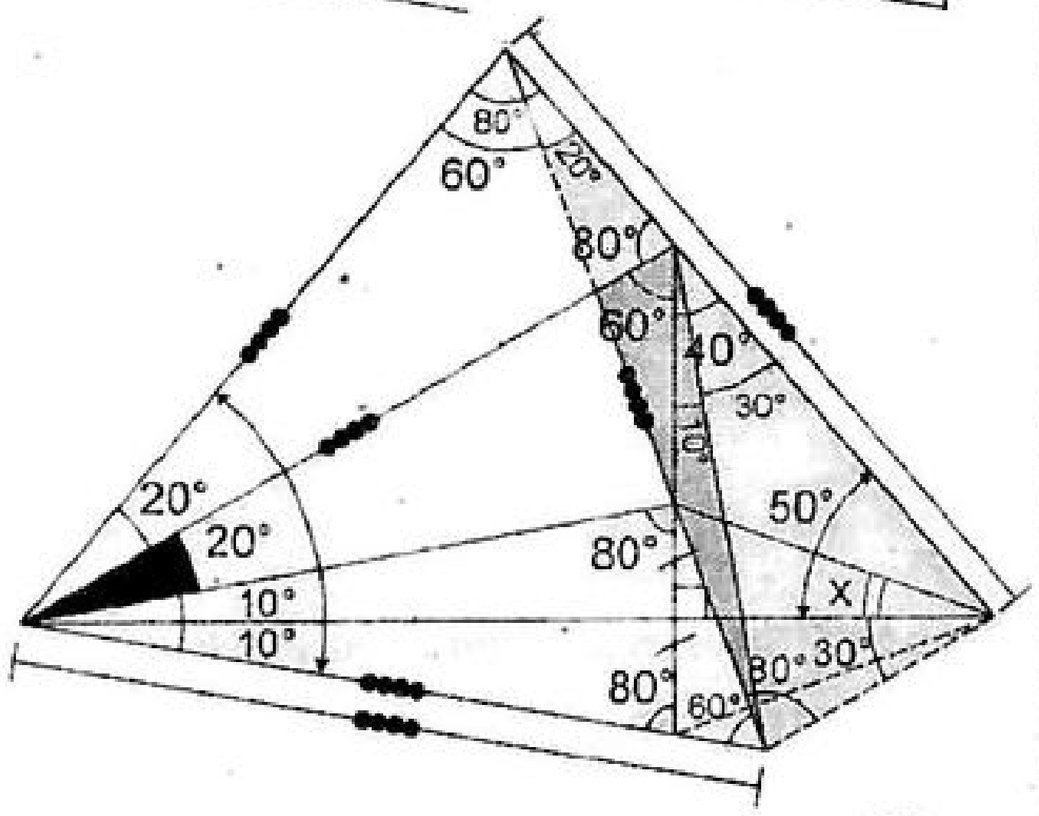


Scanned by CamScanner

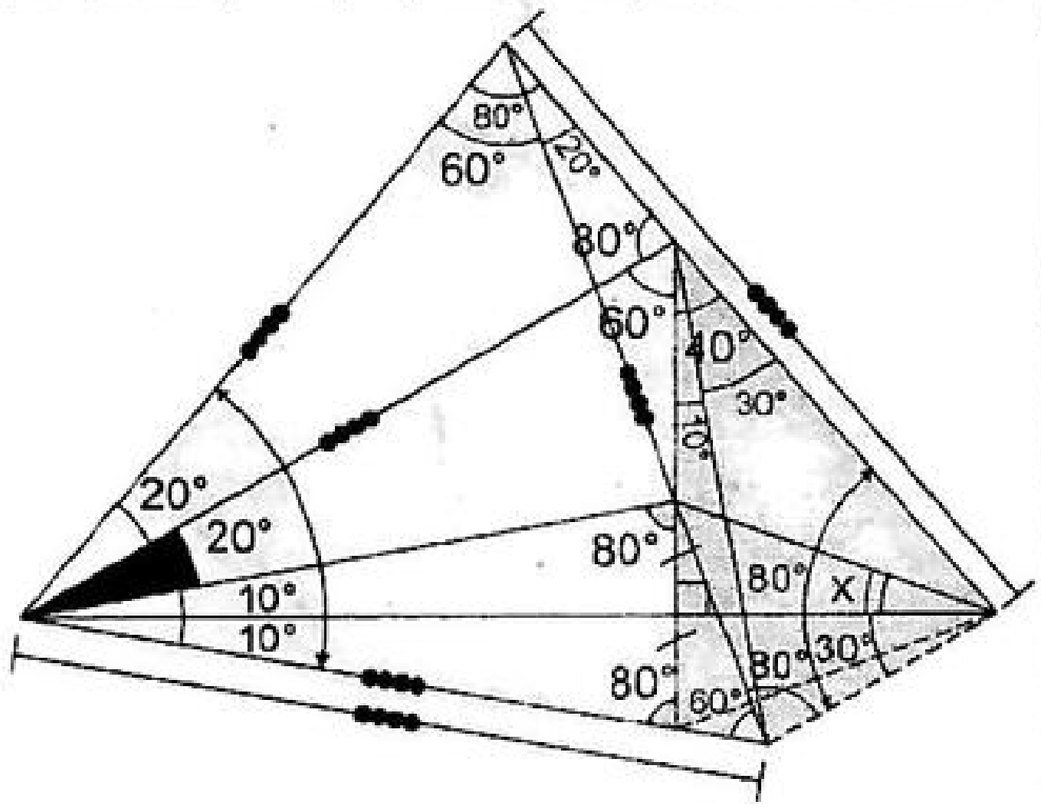


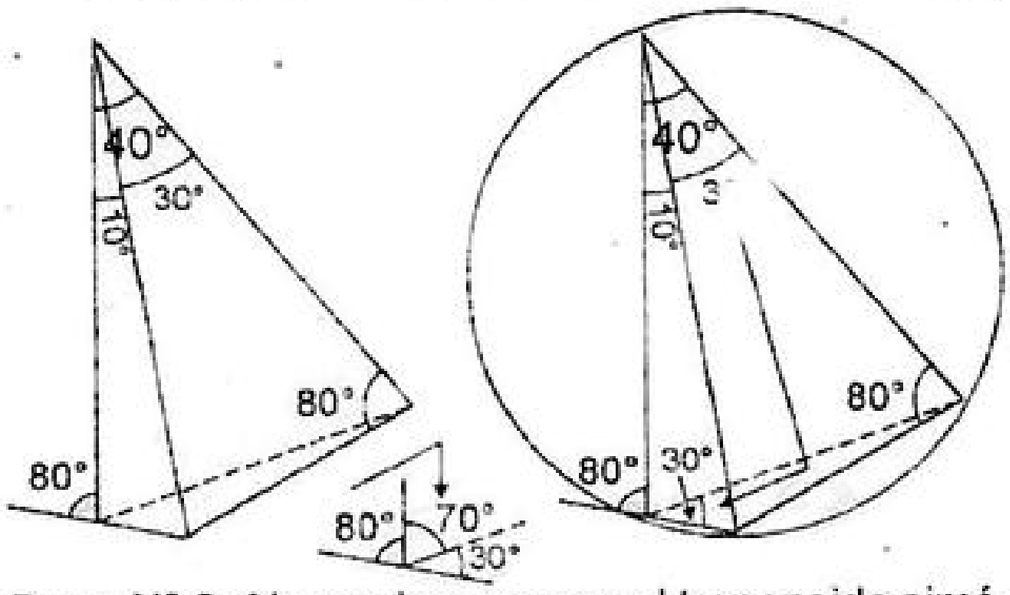
Paso N° 6. También obtenemos otro triángulo isósceles:



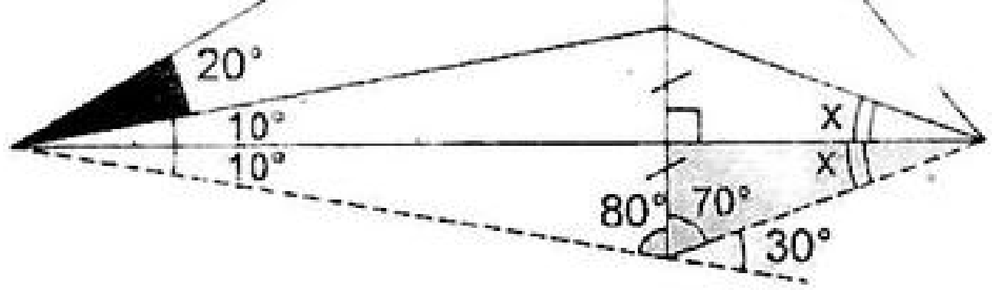


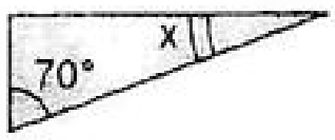
Paso N° 7. En la figura se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del "pantalón o rebote":





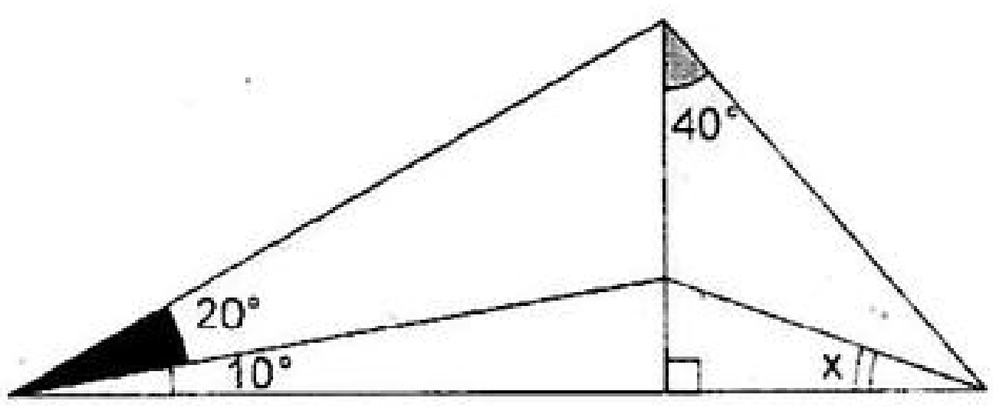
Paso N° 8. Abora observemos el trapezoide simétrico formado inicialmente:





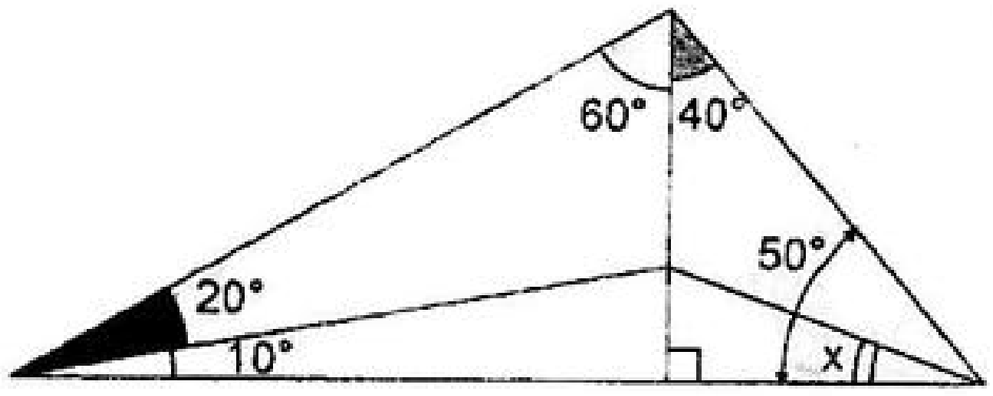
$\therefore\ x = 20°$

SEGUNDO MÉTODO:

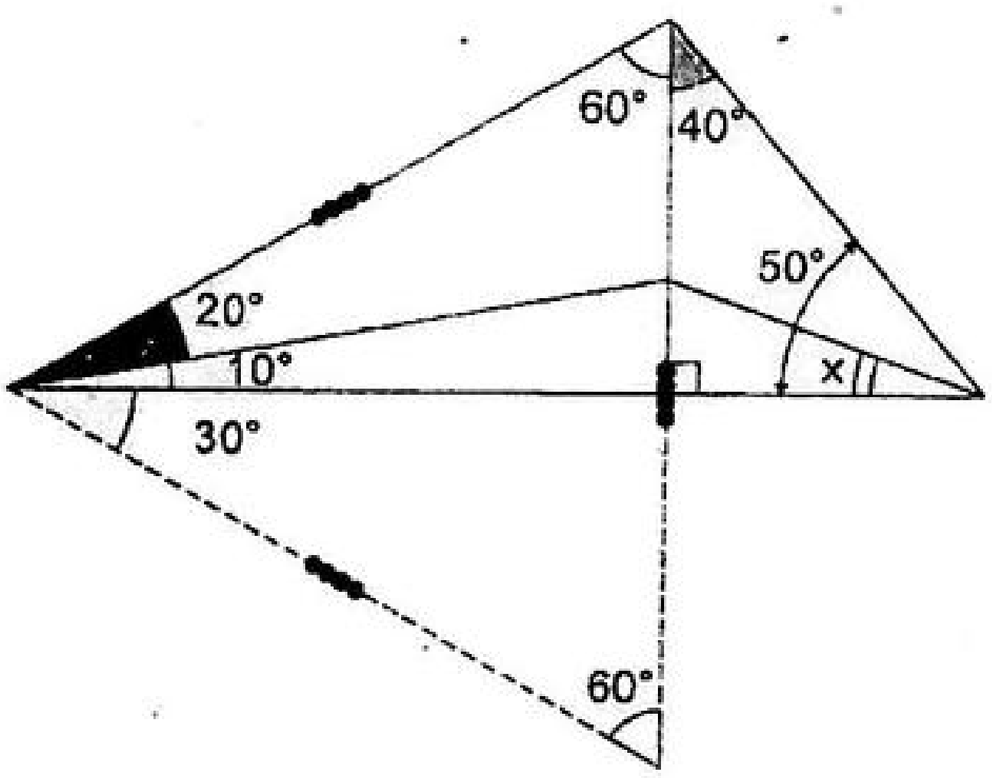


Scanned by CamScanner

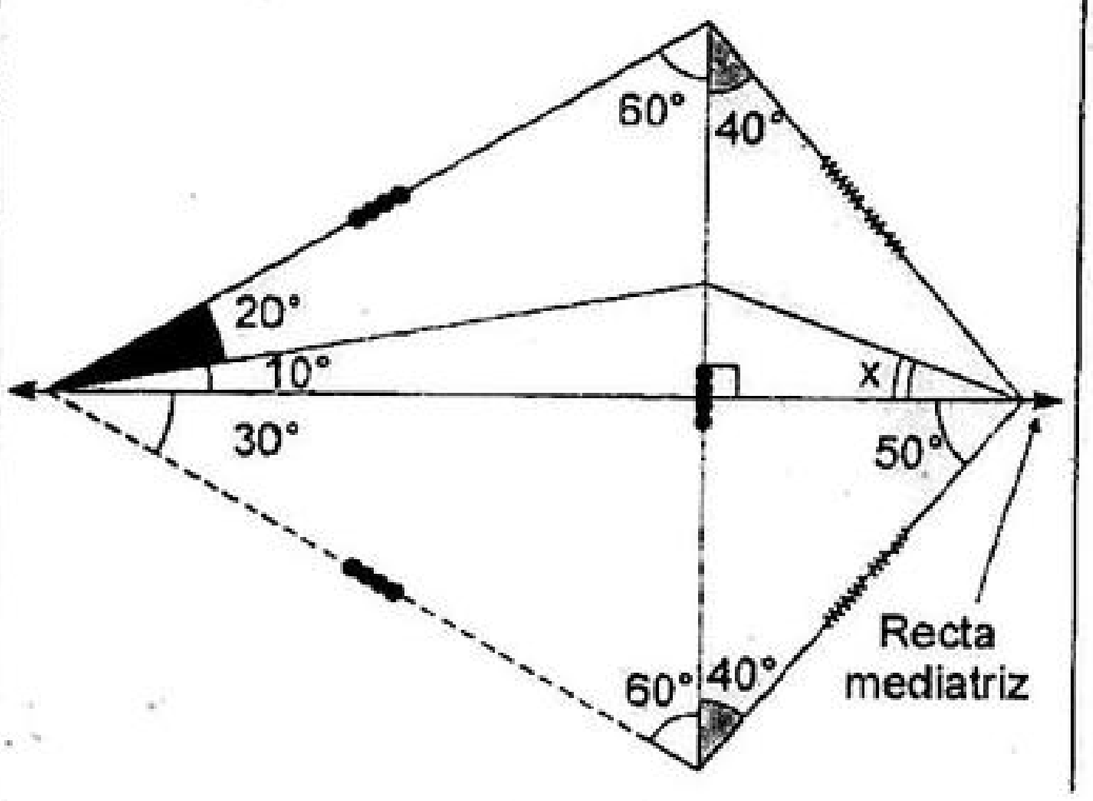
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:



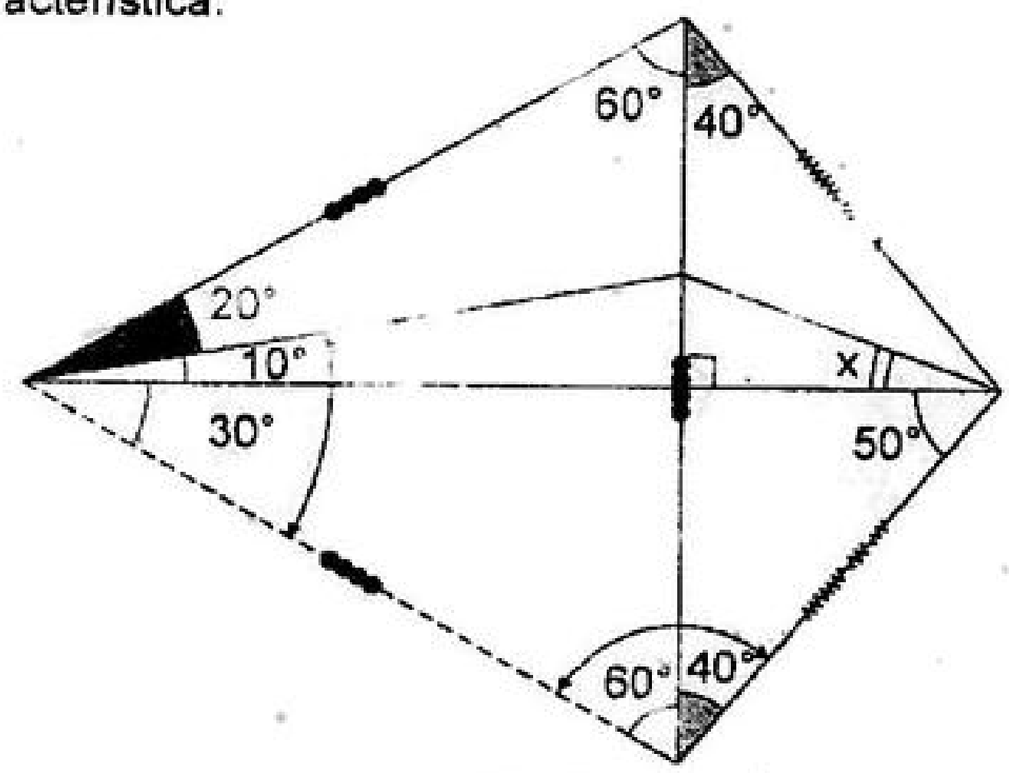
Paso N° 2. Se observa un ángulo de 30°, entonces completamos a un triángulo equilátero:



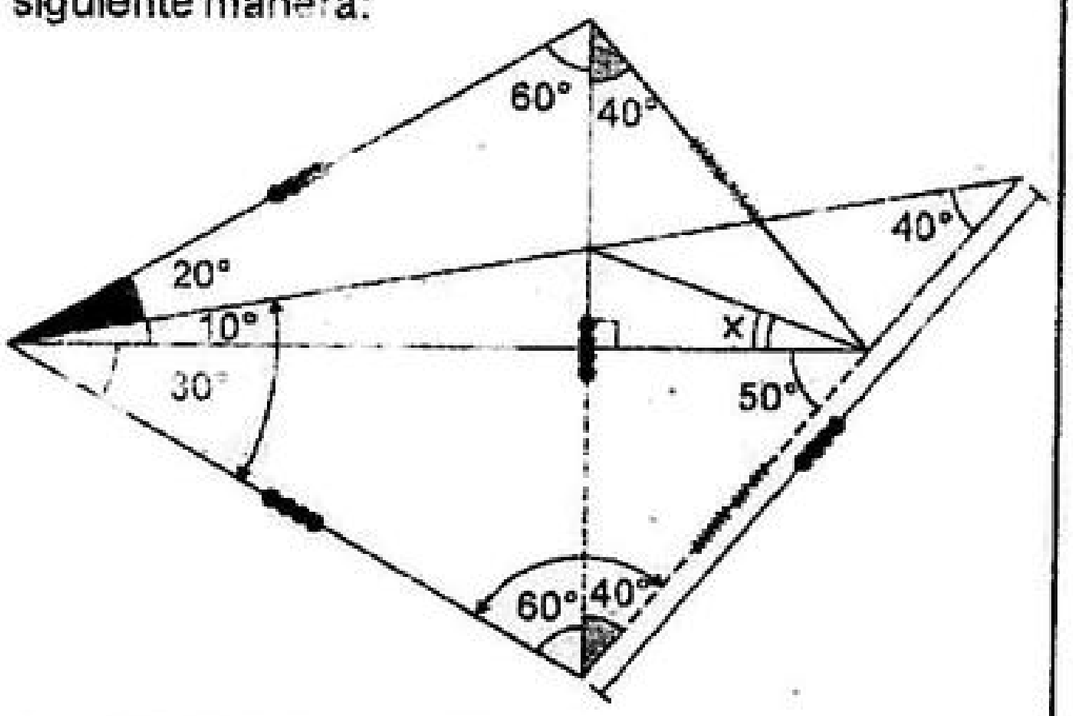
Paso N°3. Se observa también la recta mediatriz, donde se cumple:



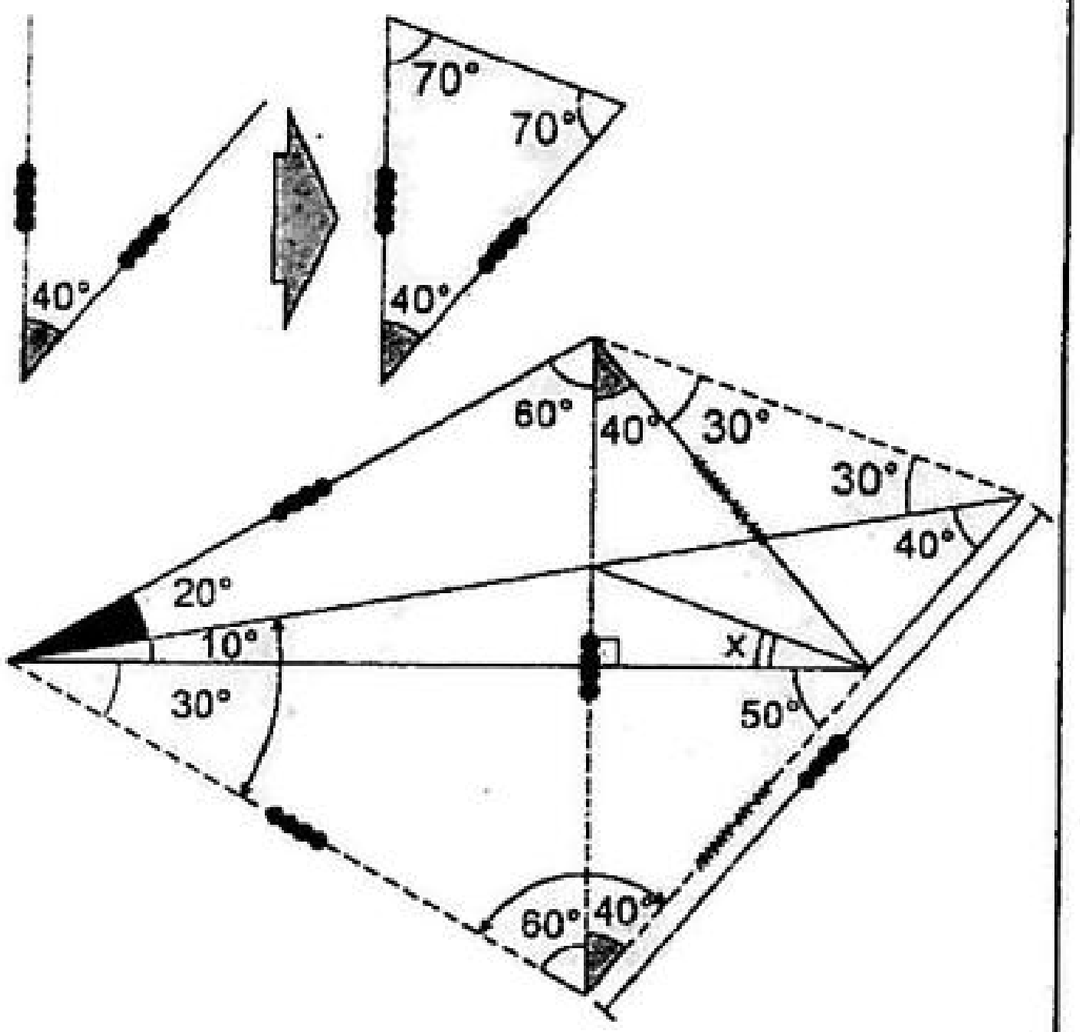
Paso N° 4. Observamos en la figura la siguiente característica:



Completamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:

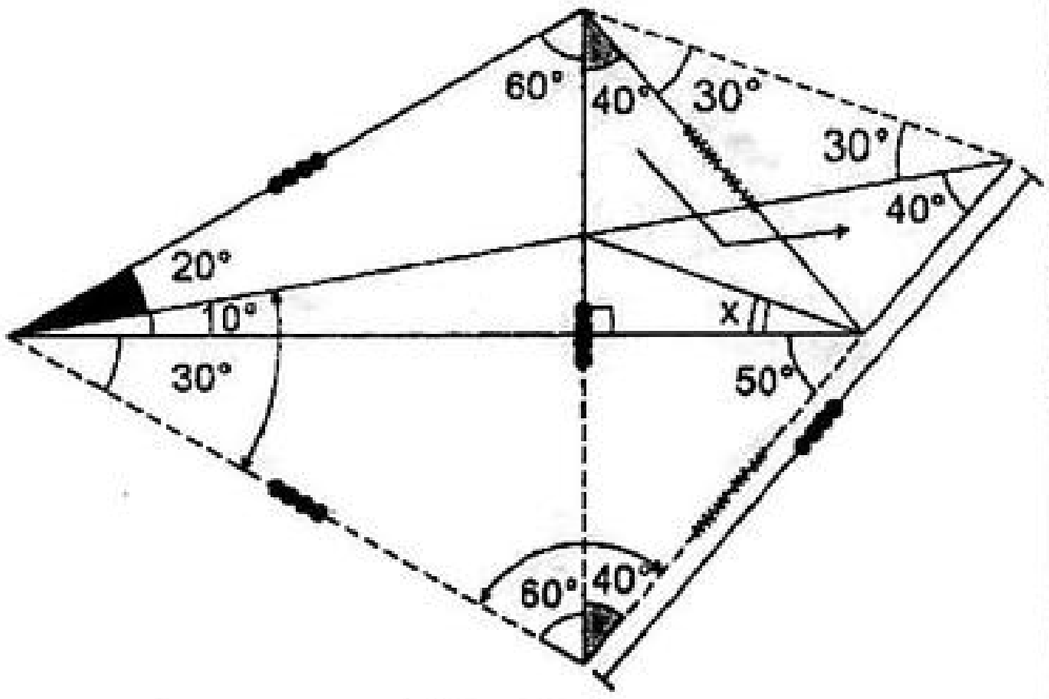


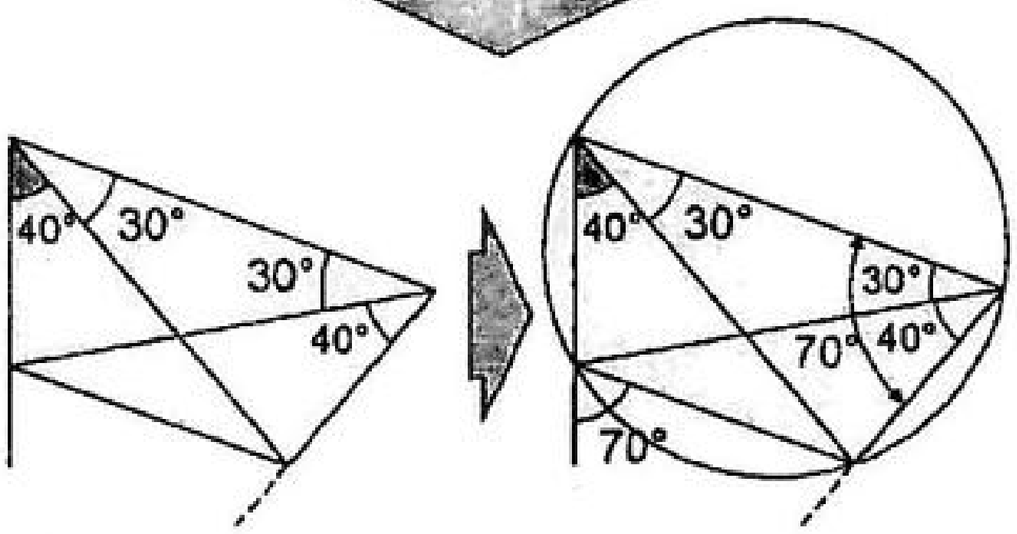
Paso N° 5. Se tiene un triángulo isósceles.



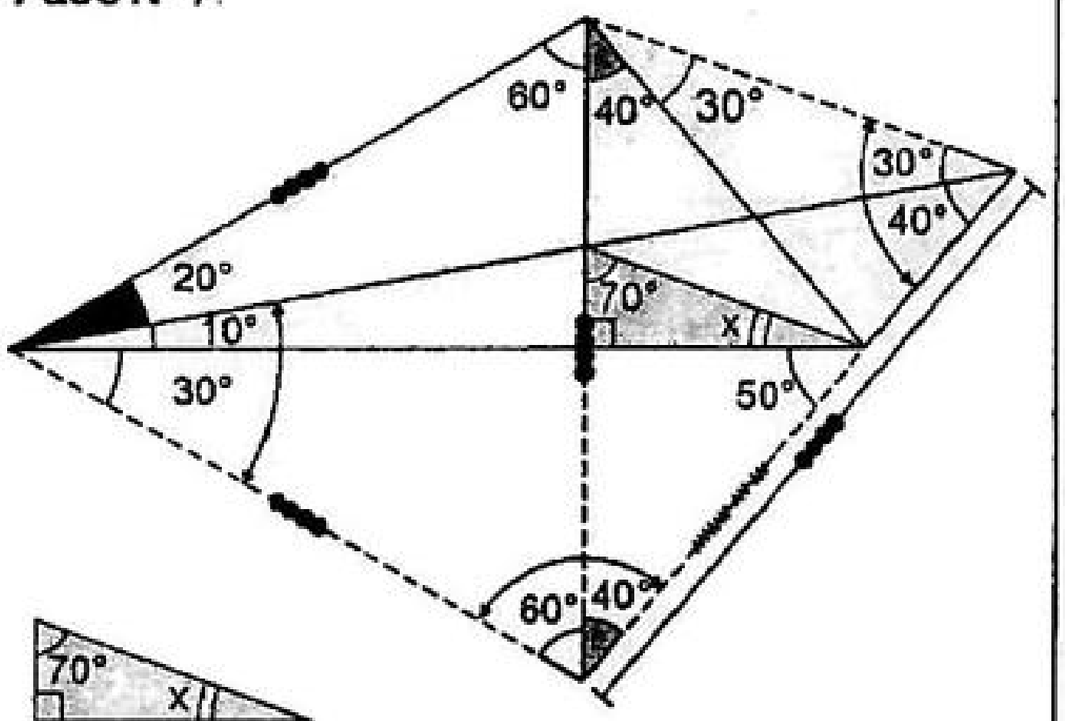
Scanned by CamScanner

Paso N° 6. Se obtiene un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del "pantalón o rebote":



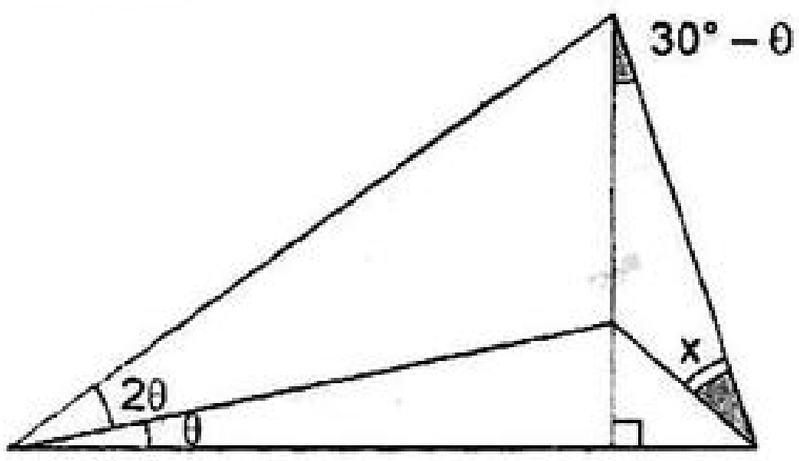


Paso N° 7.



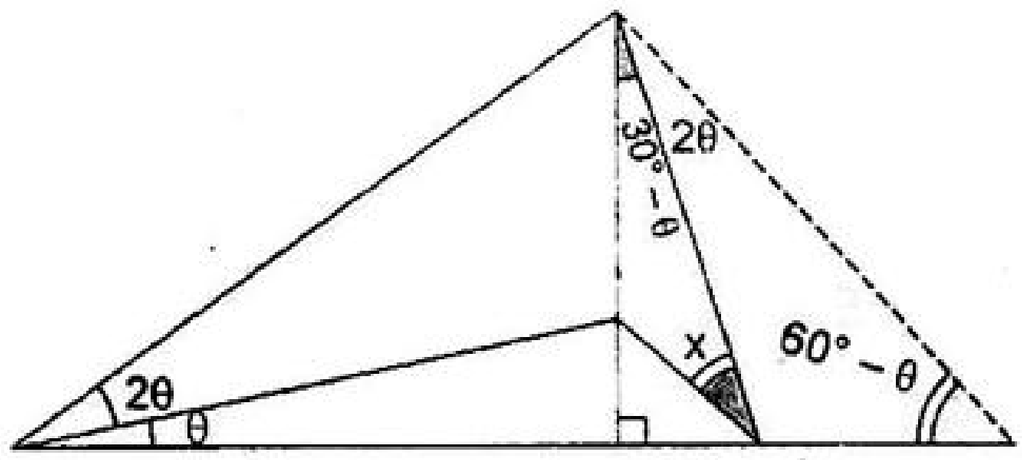
$\therefore x = 20°$

Problema 14. Calcular x.

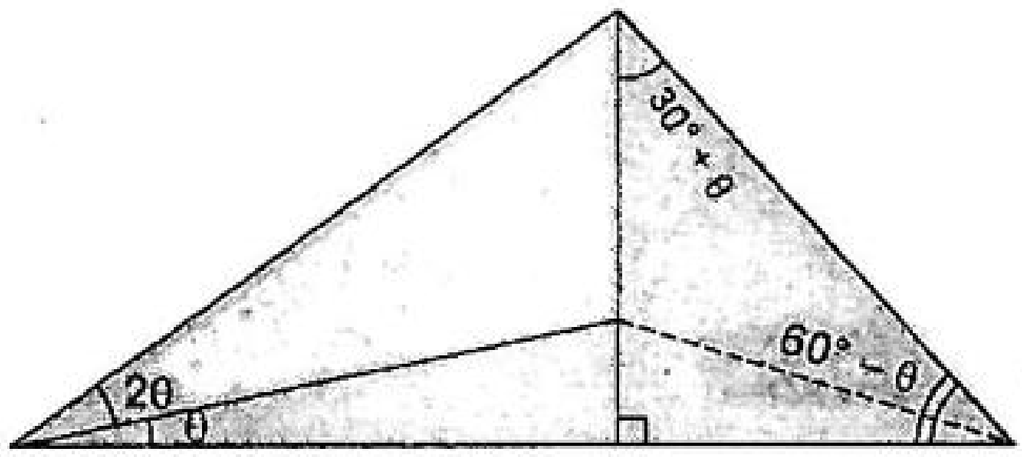


Resolución:

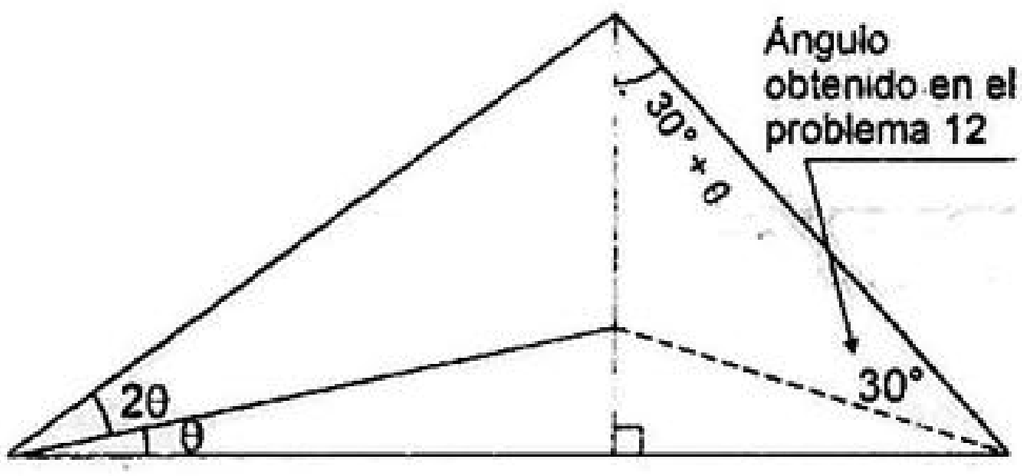
Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo:



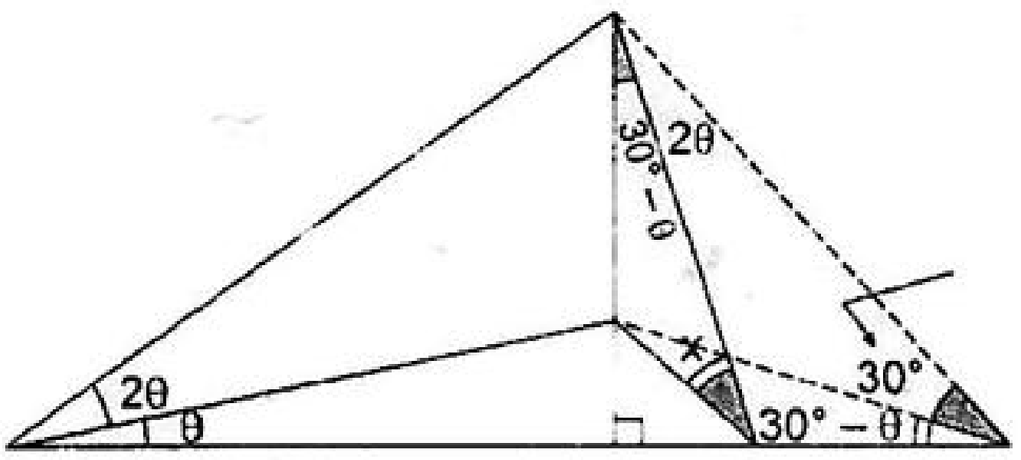
Se obtiene la siguiente figura:



Aquí se obtiene la figura del problema N°12, donde se cumple lo siguiente:

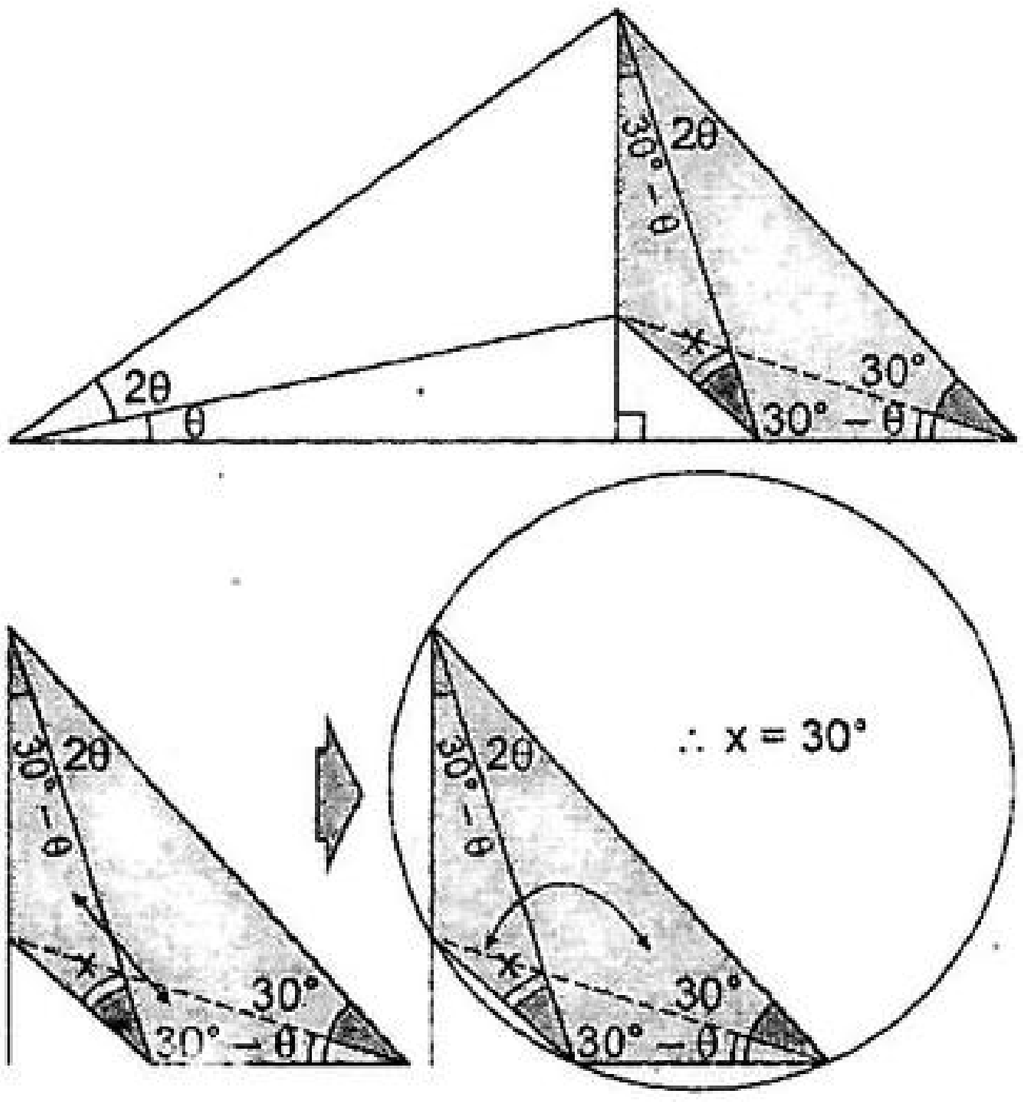


Paso N° 2. Ahora tenemos en la figura:

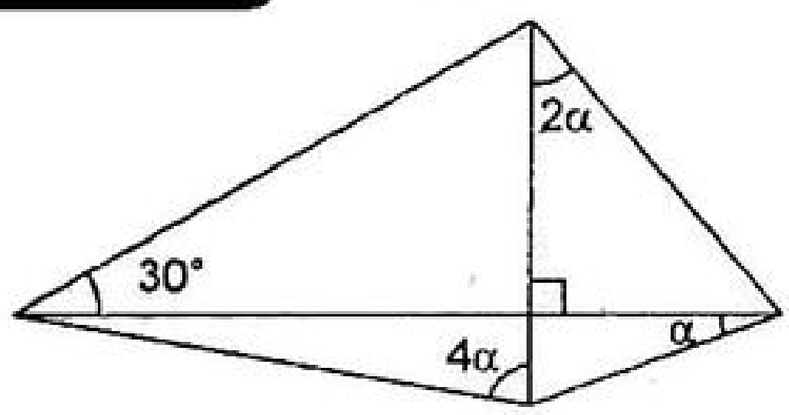


Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del "pantalón o rebote":

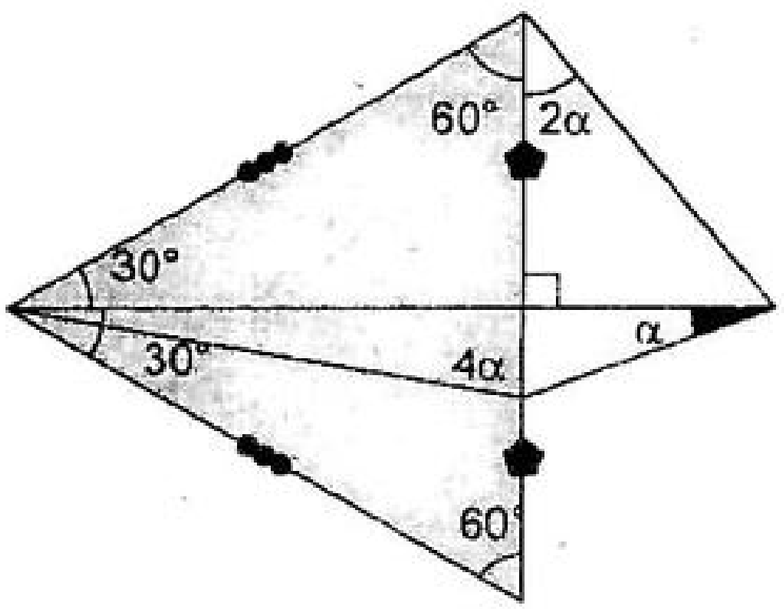


Problema 15. Calcular α.

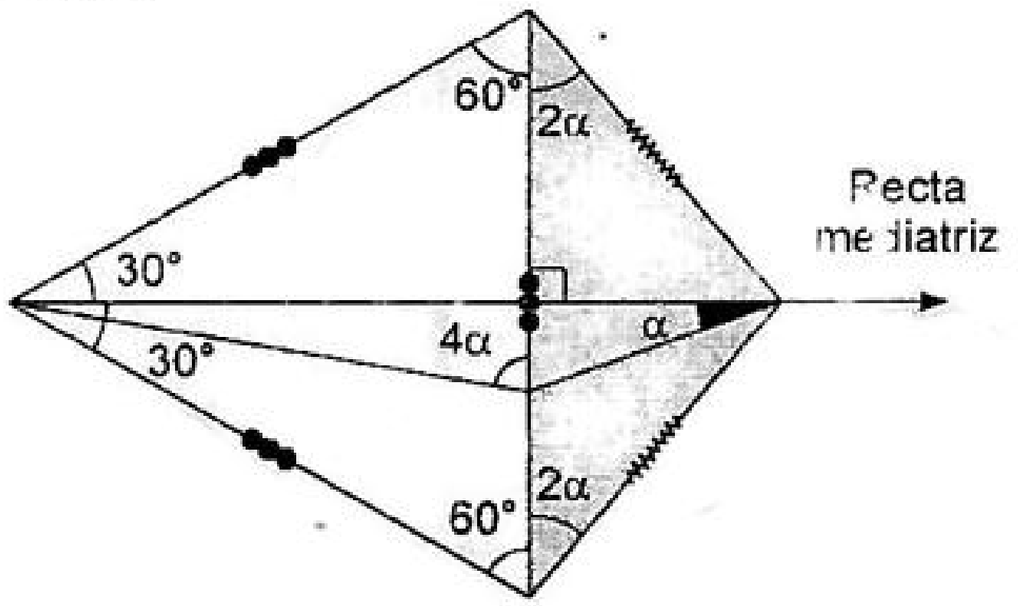


Resolución:

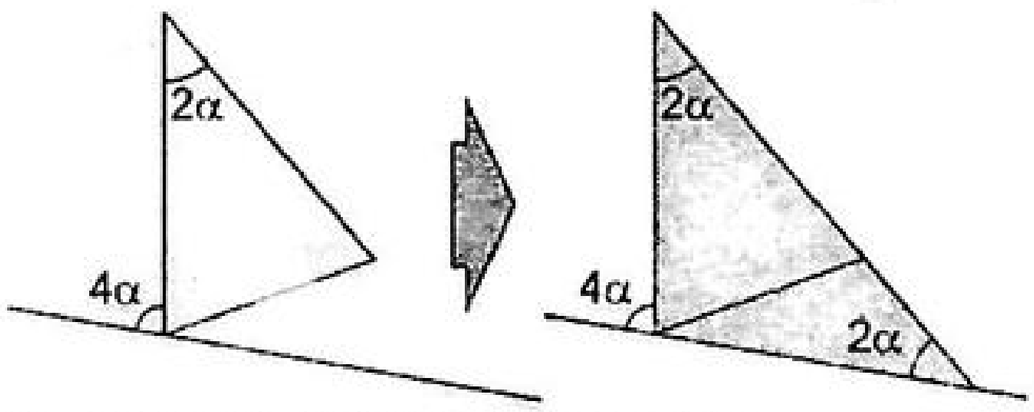
Paso N° 1. Se observa un ángulo de 30° entonces formamos exteriormente un triángulo equilátero de la siguiente manera:



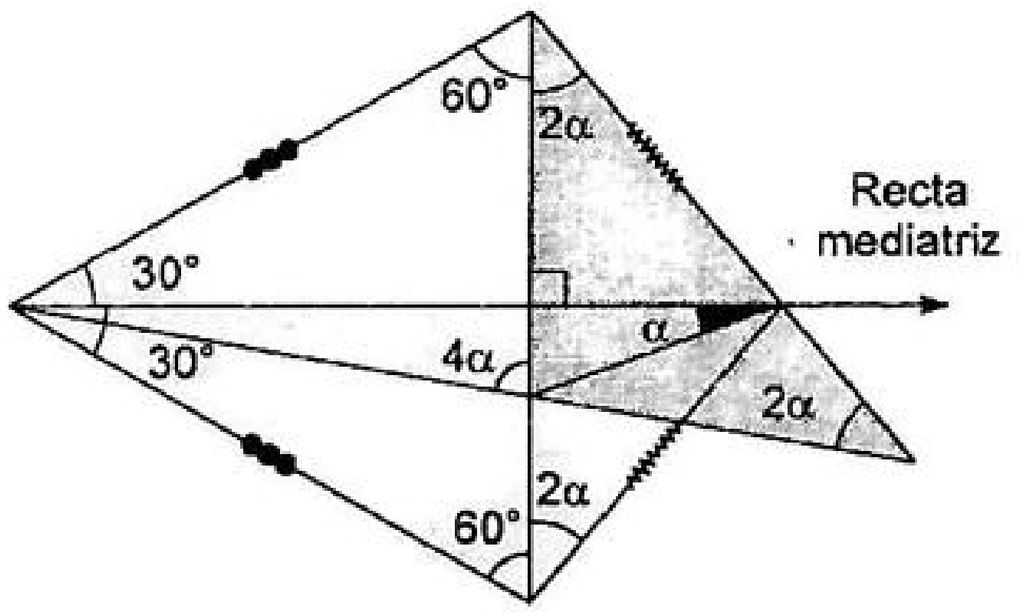
Paso N° 2. Se tiene una recta mediatriz donde se cumple:



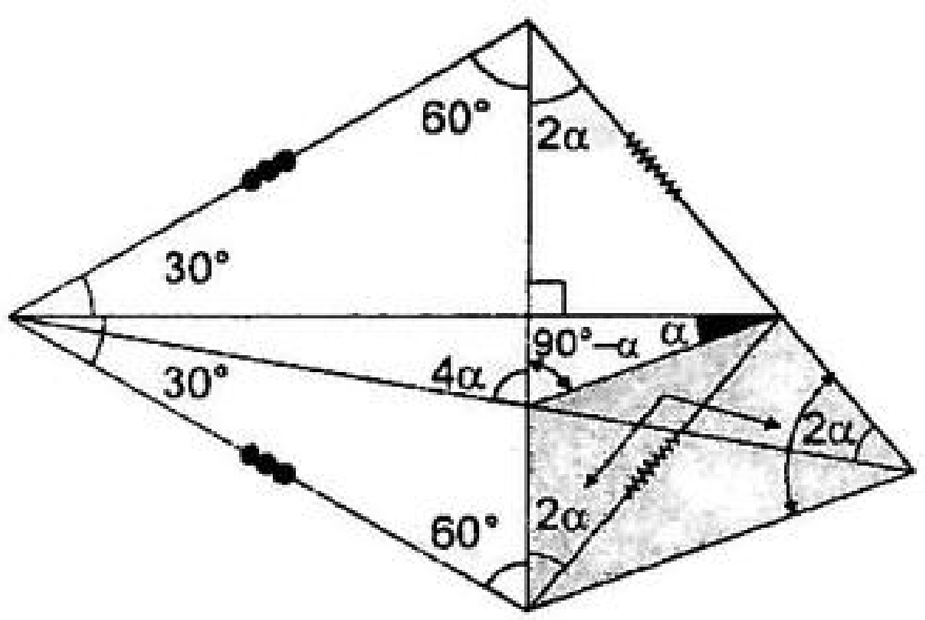
Paso N° 3. Se observa:



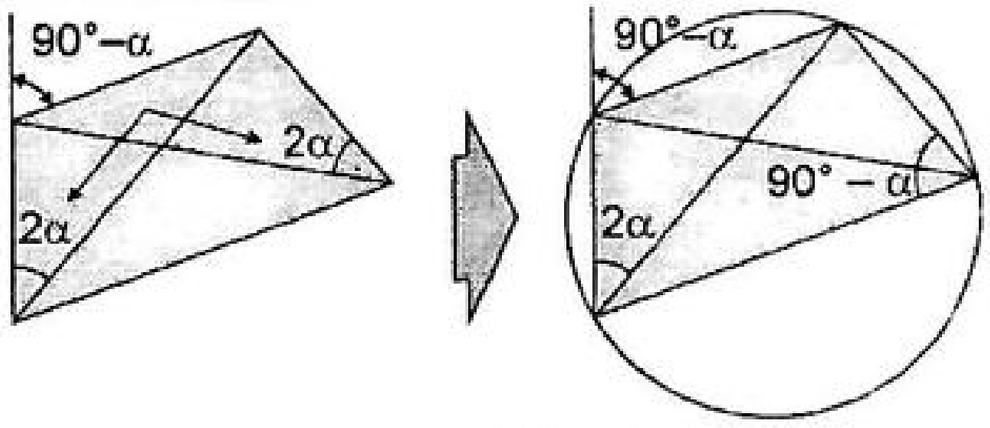
Se construye un triángulo isósceles:



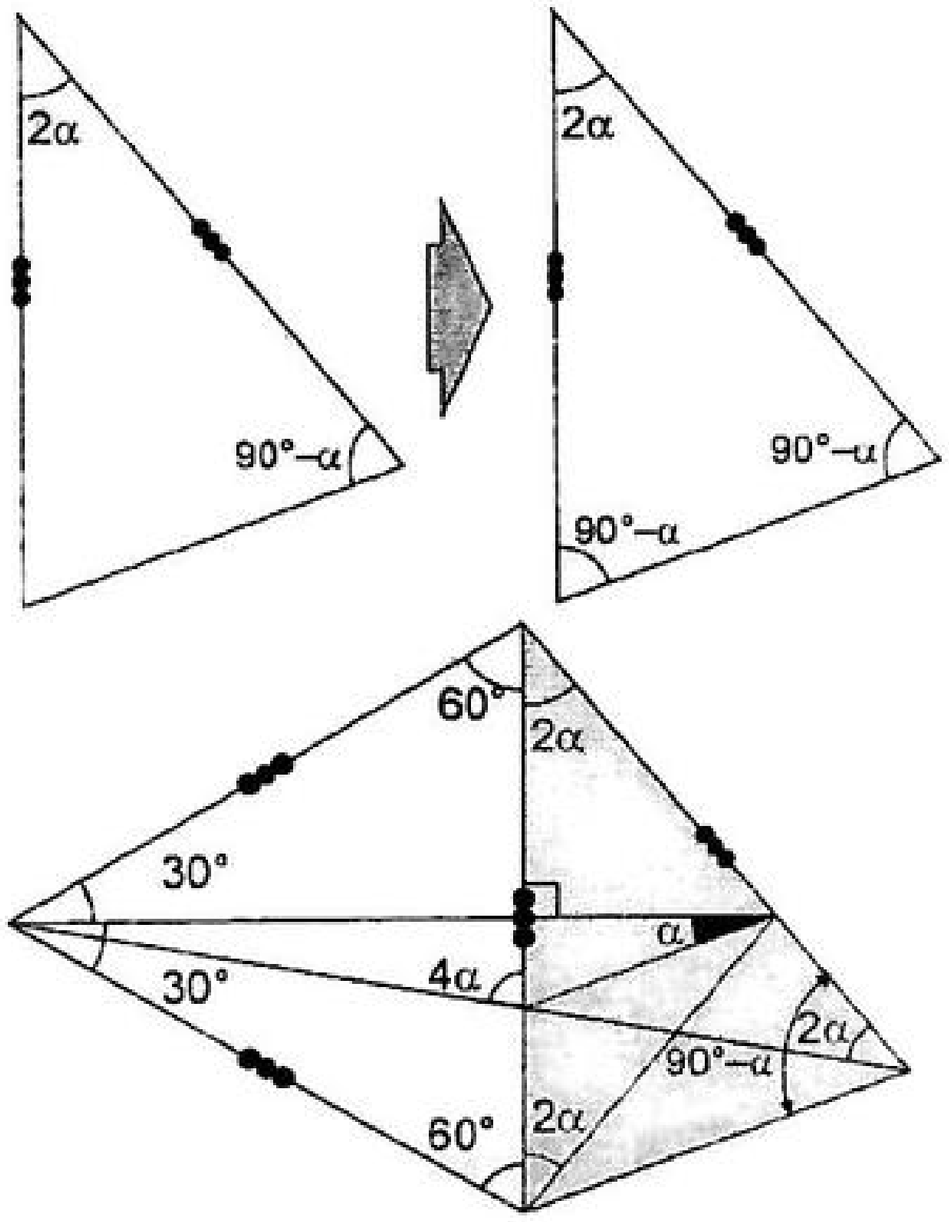
Paso N° 3. Se obtiene un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o del rebote:



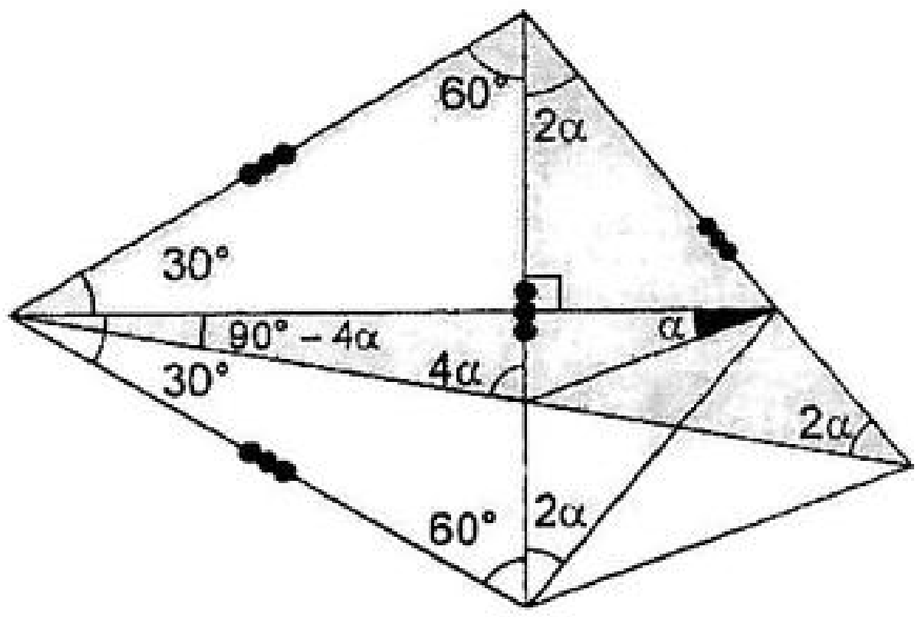
Scanned by CamScanner

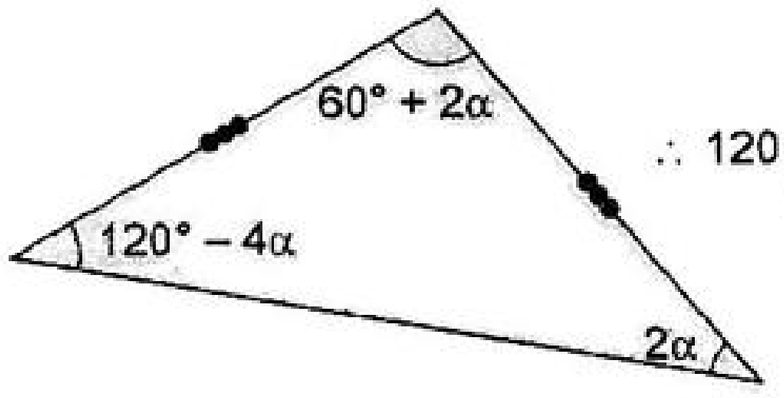


Paso N° 5. Se observa un triángulo isósceles:



Paso N° 6. Finalmente obtenemos un triángulo isósceles donde se cumple:



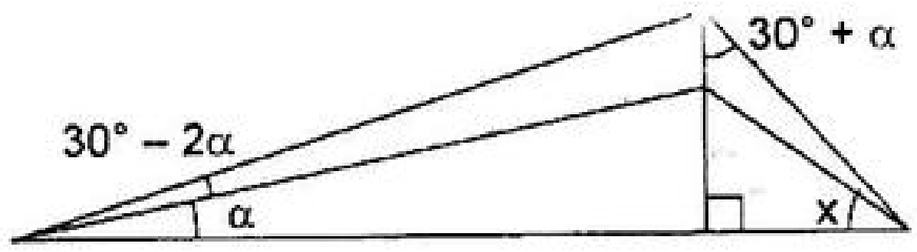


$\therefore\ 120 - 4\alpha = 2\alpha$

$120° = 6\alpha$

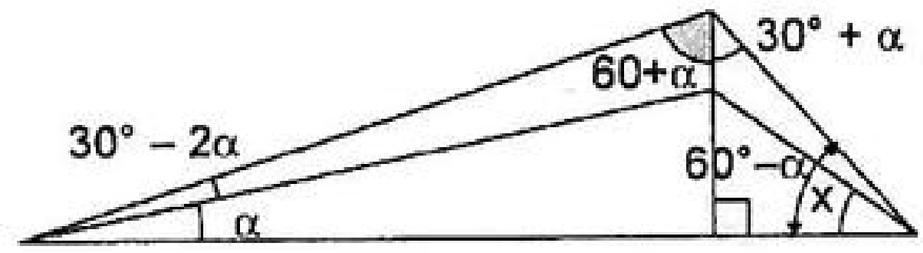
$20° = \alpha$

Problema 16. Caso general. Calcular x.

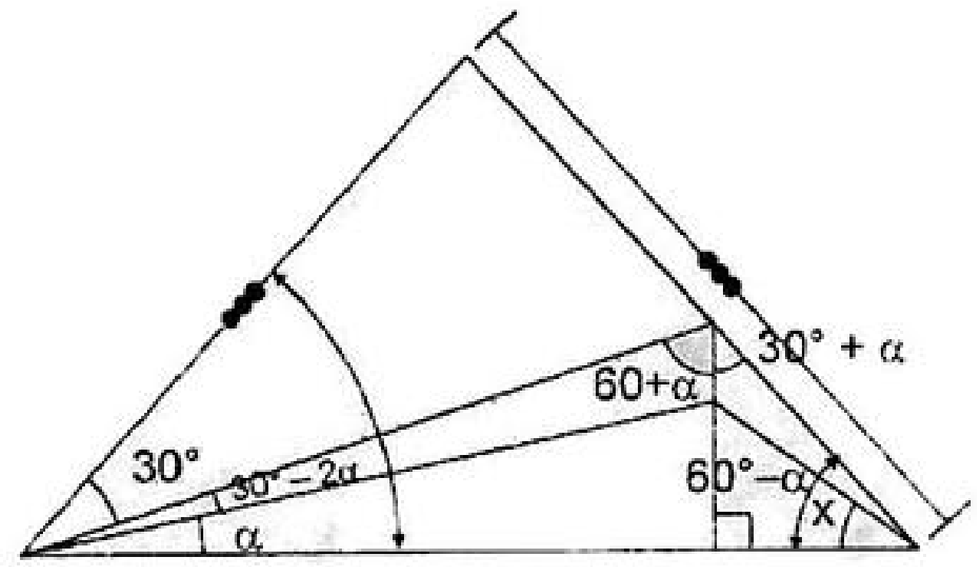


Resolución:

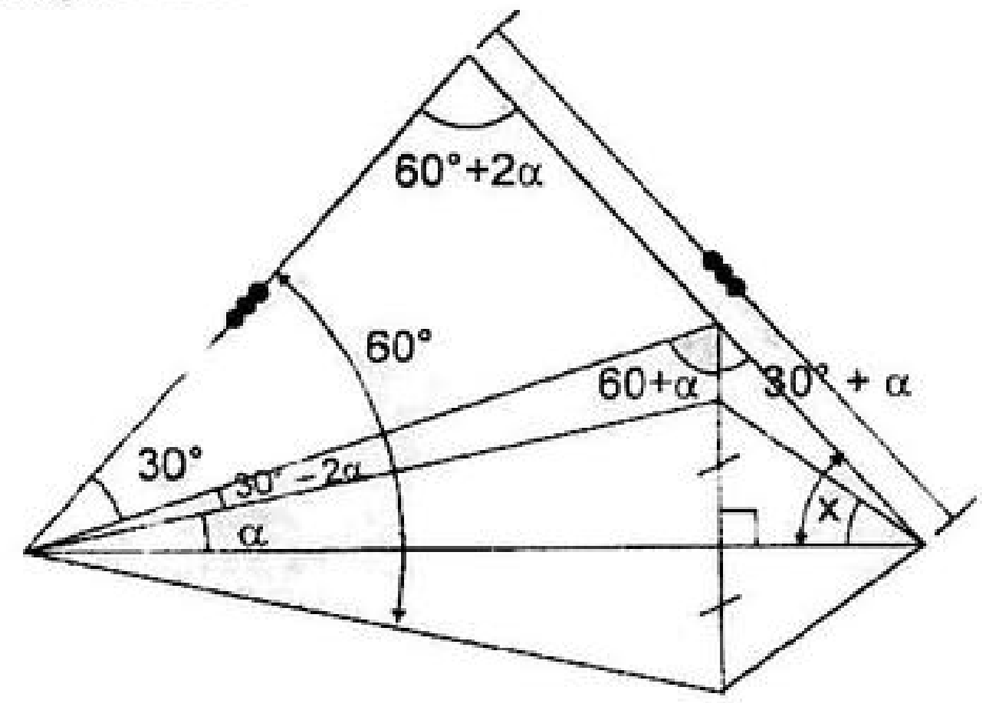
Paso N° 1. Completamos los ángulos interiores de la figura:



Paso N° 2. Construimos un triángulo isósceles externamente:

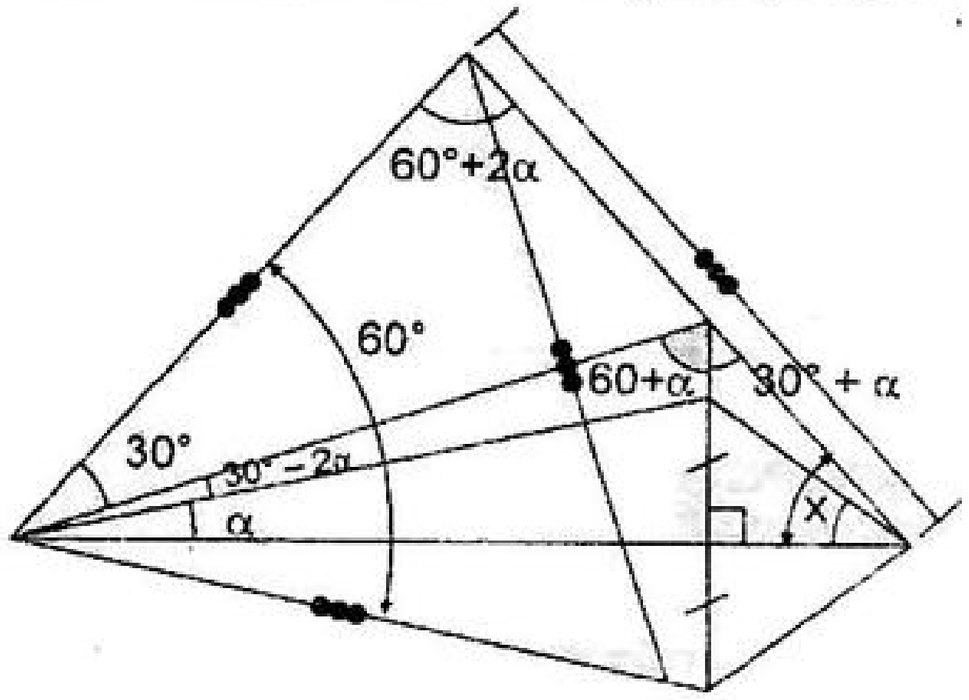


Paso N° 3. Construimos en la base de la figura dada, un trapezoide, simétrico, para obtener un ángulo de 60°.

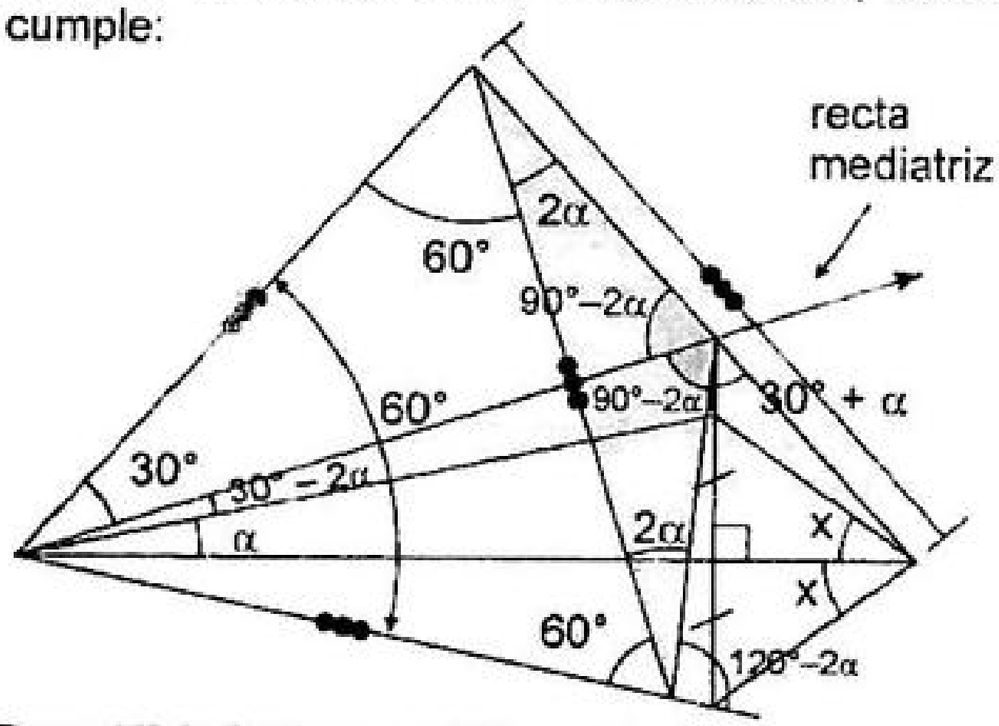


Scanned by CamScanner

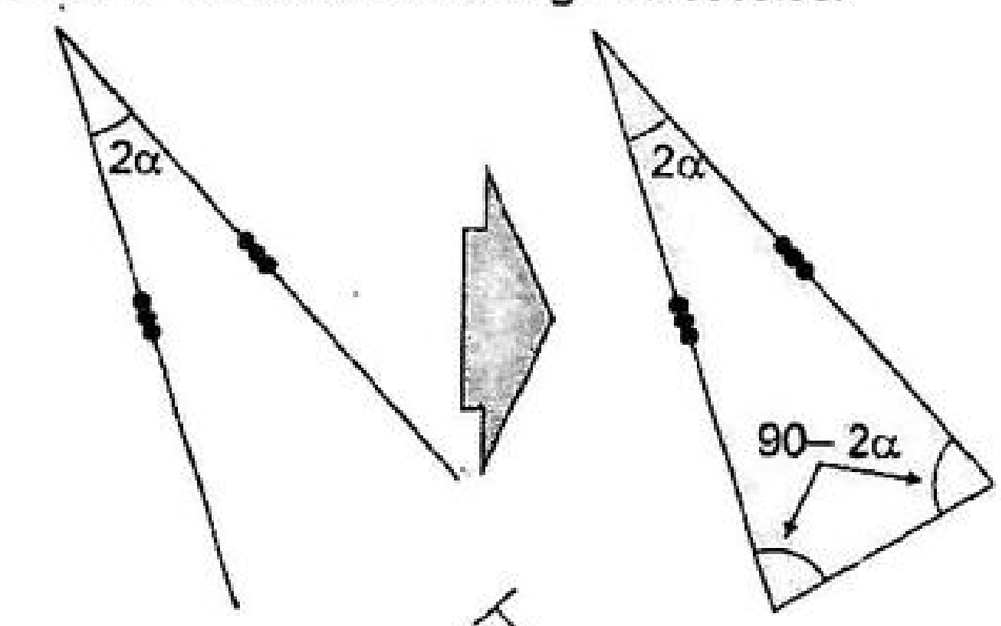
Paso N° 4. Construimos un triángulo equilátero:

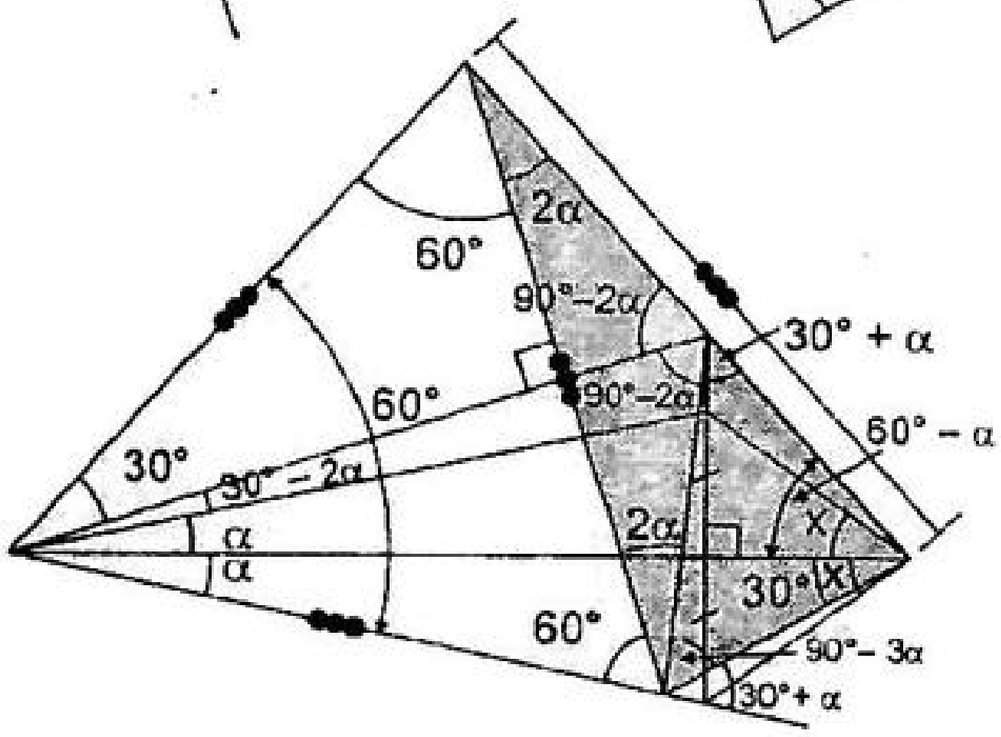


Paso N° 5. Se tiene una recta mediatriz, donde cumple:

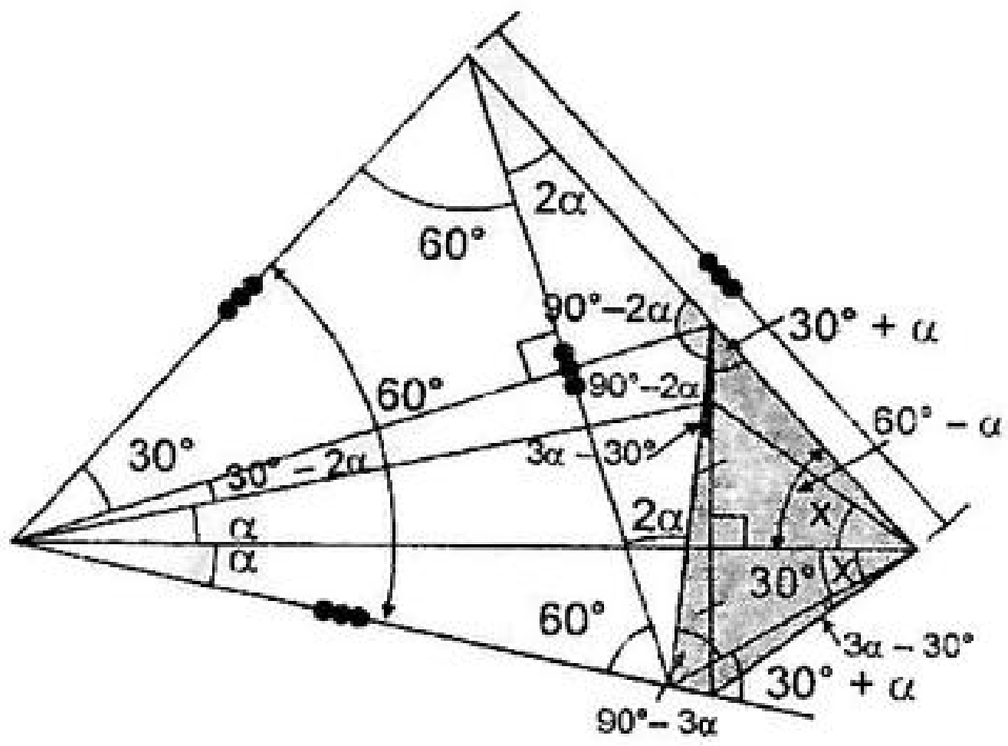


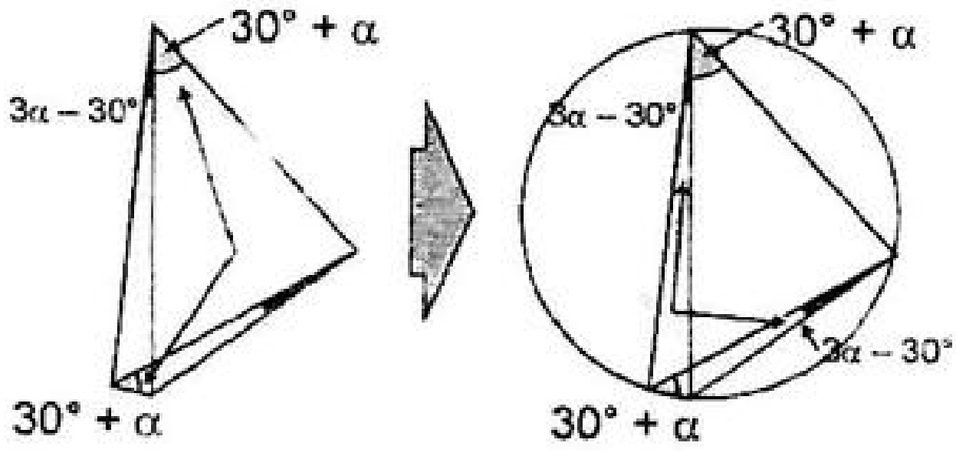
Paso N° 6. Se tiene un triángulo isósceles:





Paso N° 7. Se observa un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o rebote:

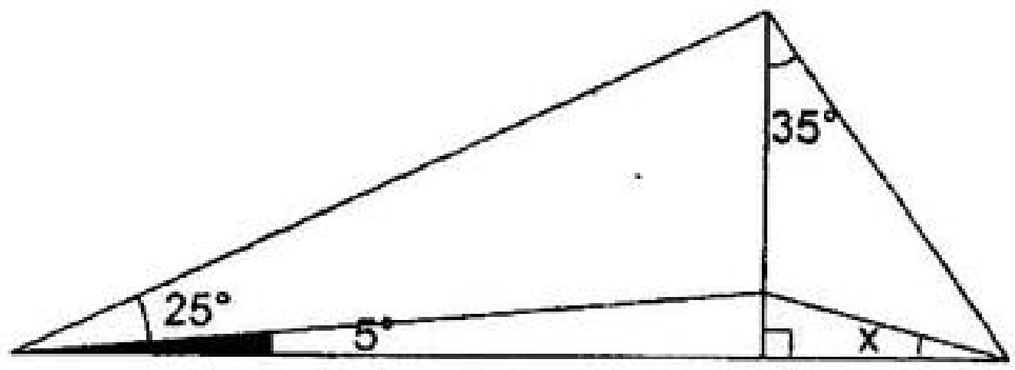




$\therefore x = 30° + 3\alpha - 30°$

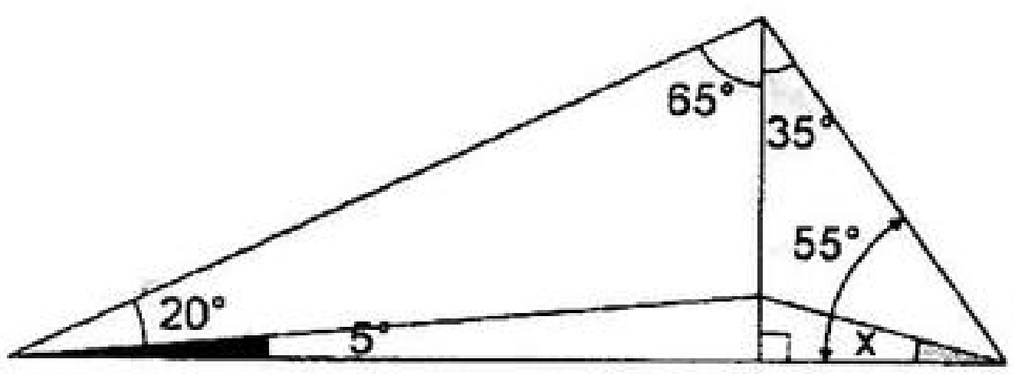
$x = 3\alpha$

Problema 17. Caso particular. Calcular x.



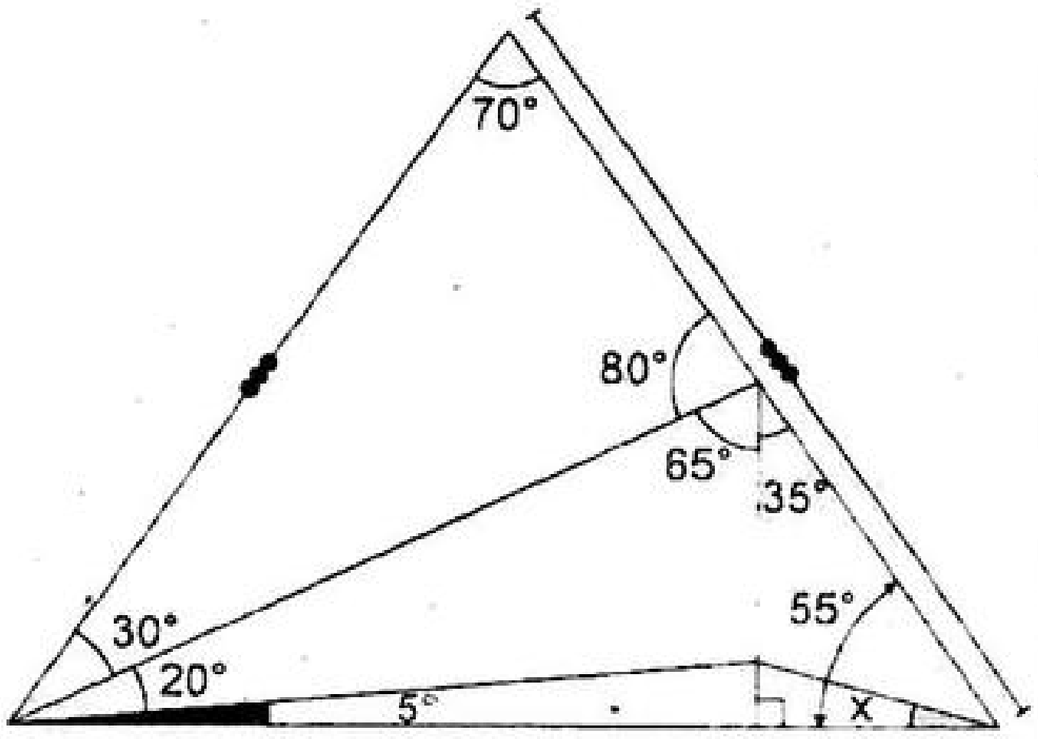
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos interiores del triángulo:

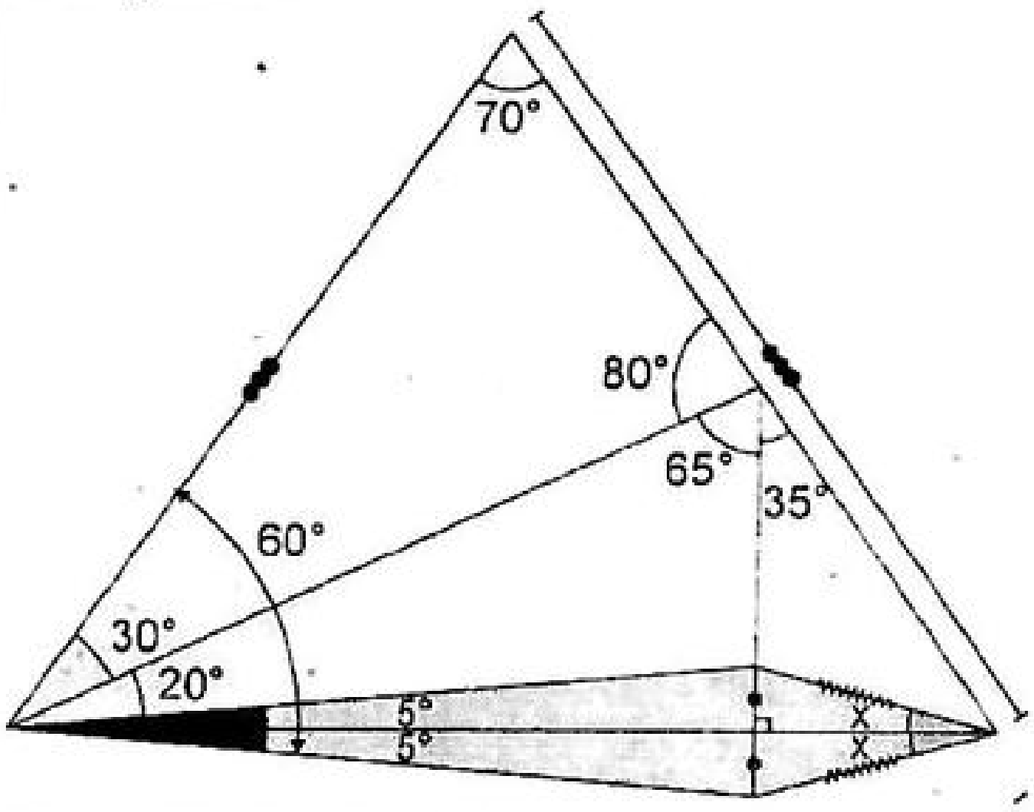


Scanned by CamScanner

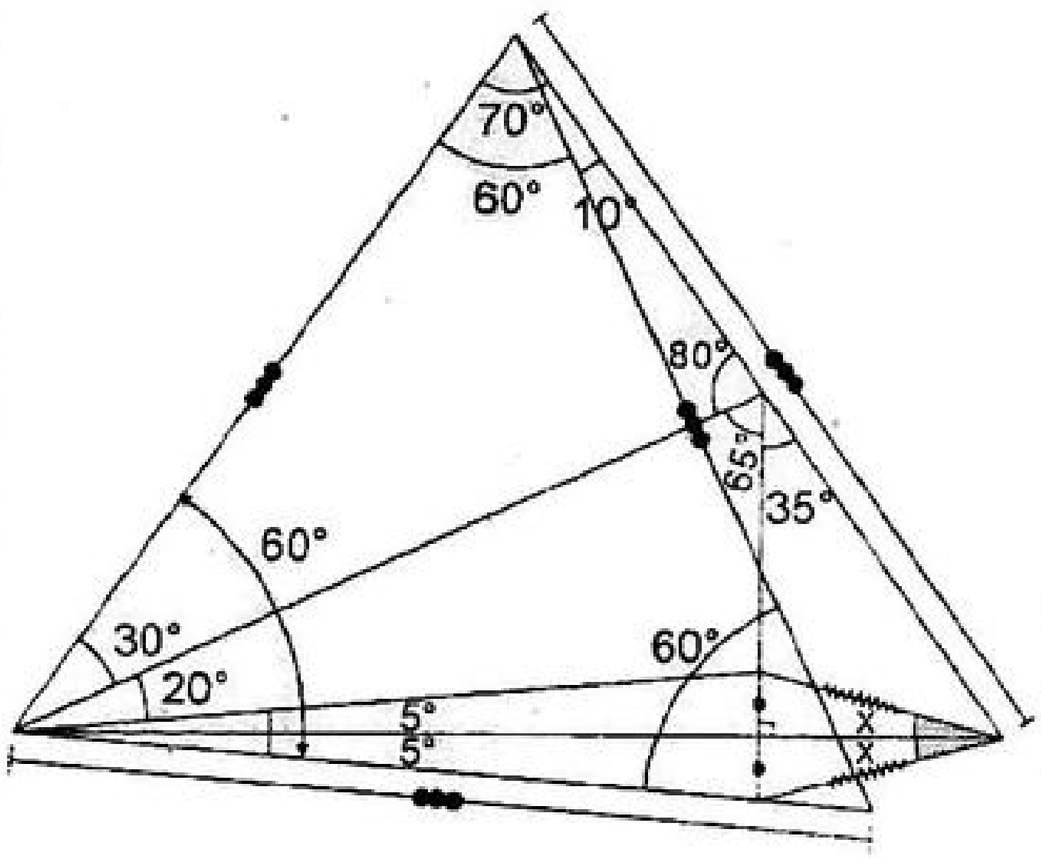
Paso N° 2. Construimos un triángulo isósceles externamente para conseguir un ángulo de 30°:



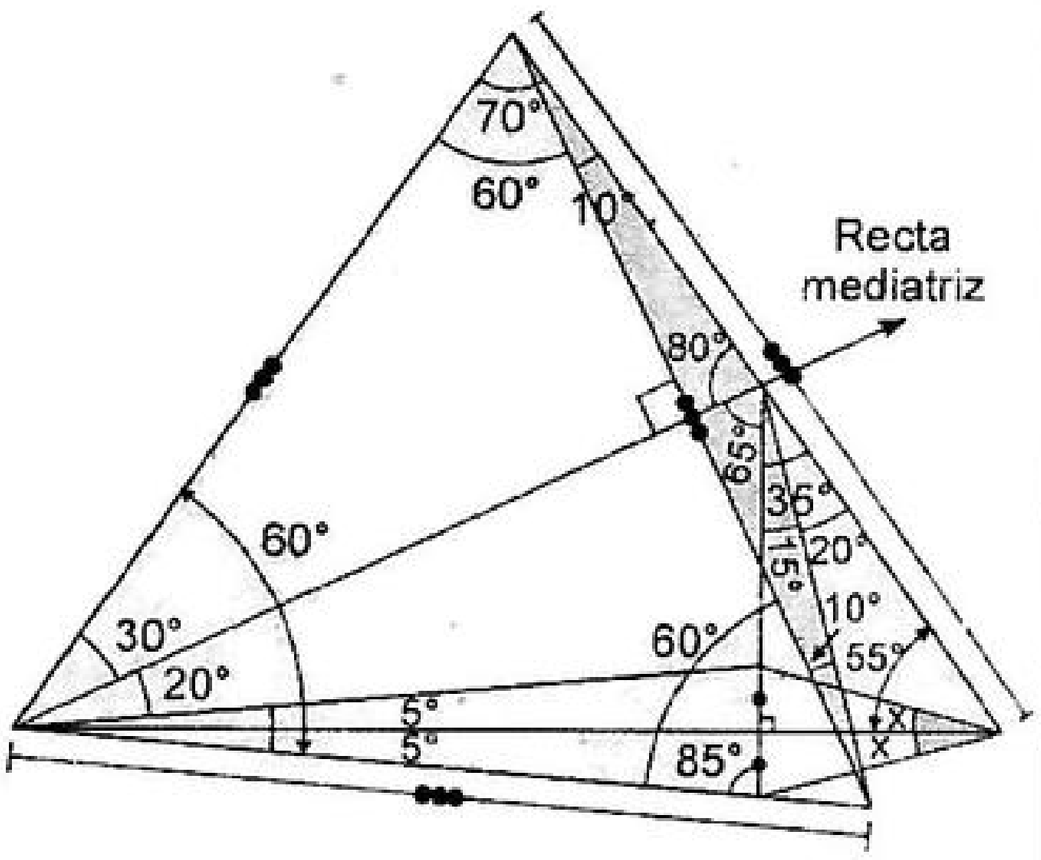
Paso N° 3. Ahora construimos un trapezoide simétrico en la base del triángulo para así obtener un ángulo de 60°:



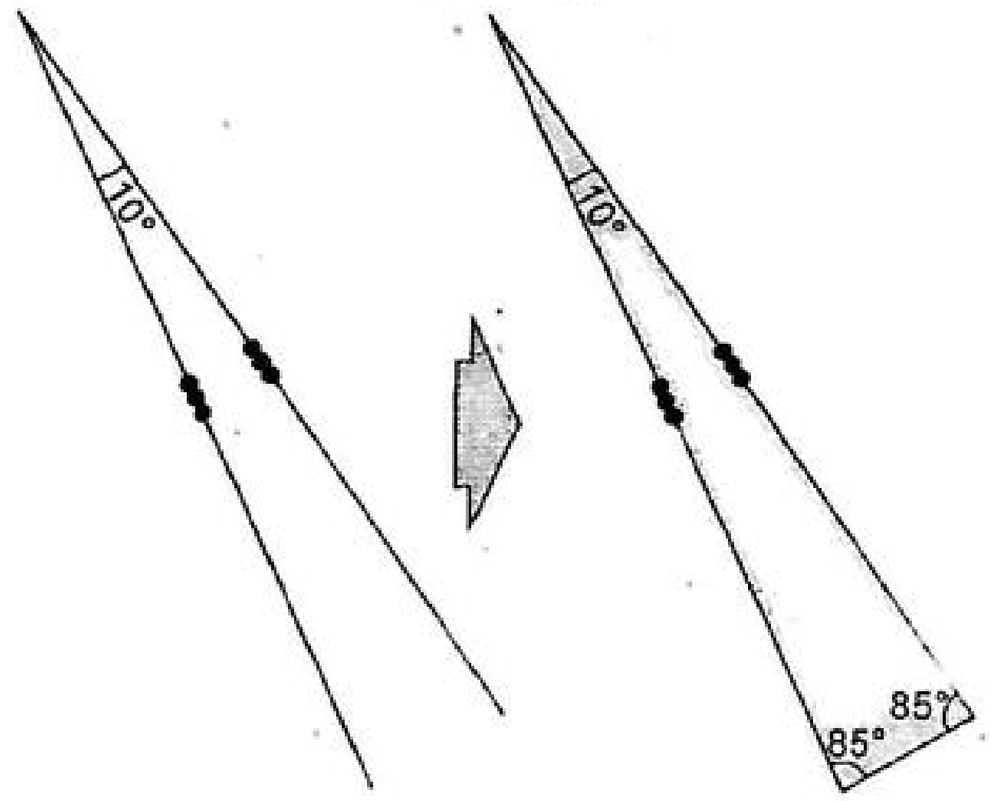
Paso N° 4. Construimos externamente un triángulo equilátero de la siguiente manera:

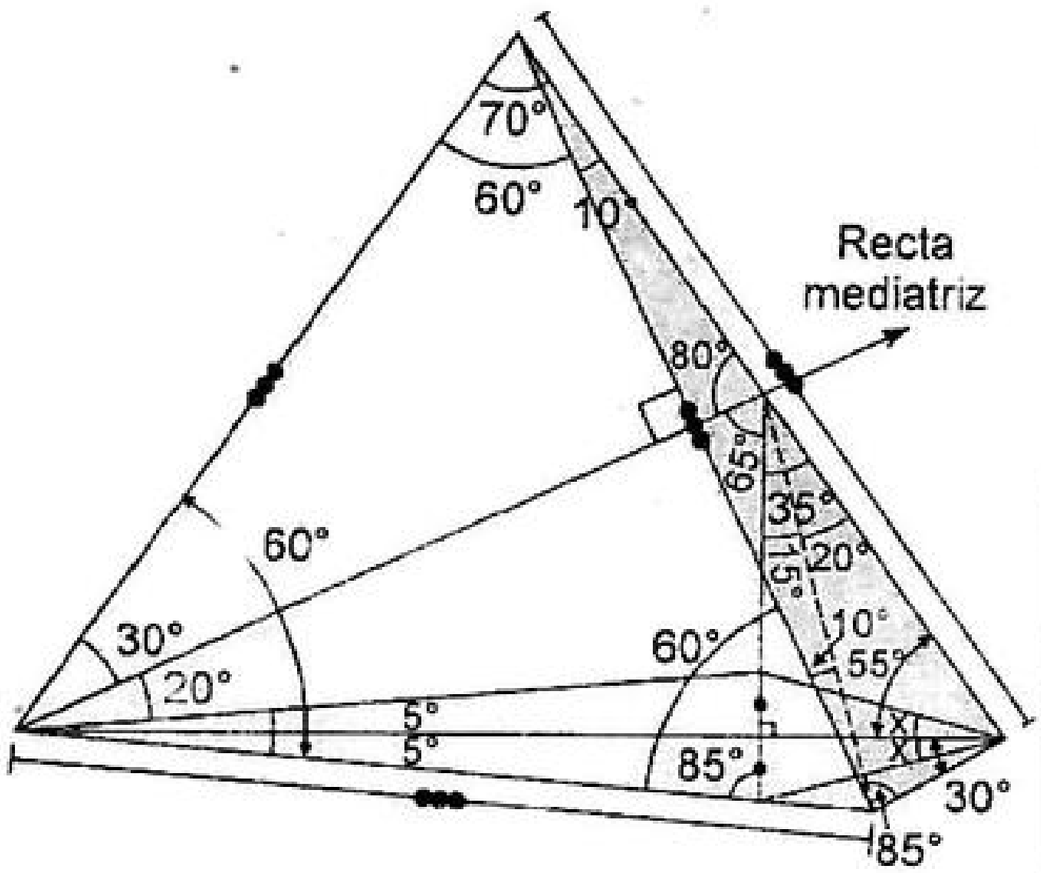


Paso N° 5. Se tiene una recta mediatriz en el triángulo equilátero donde se cumple



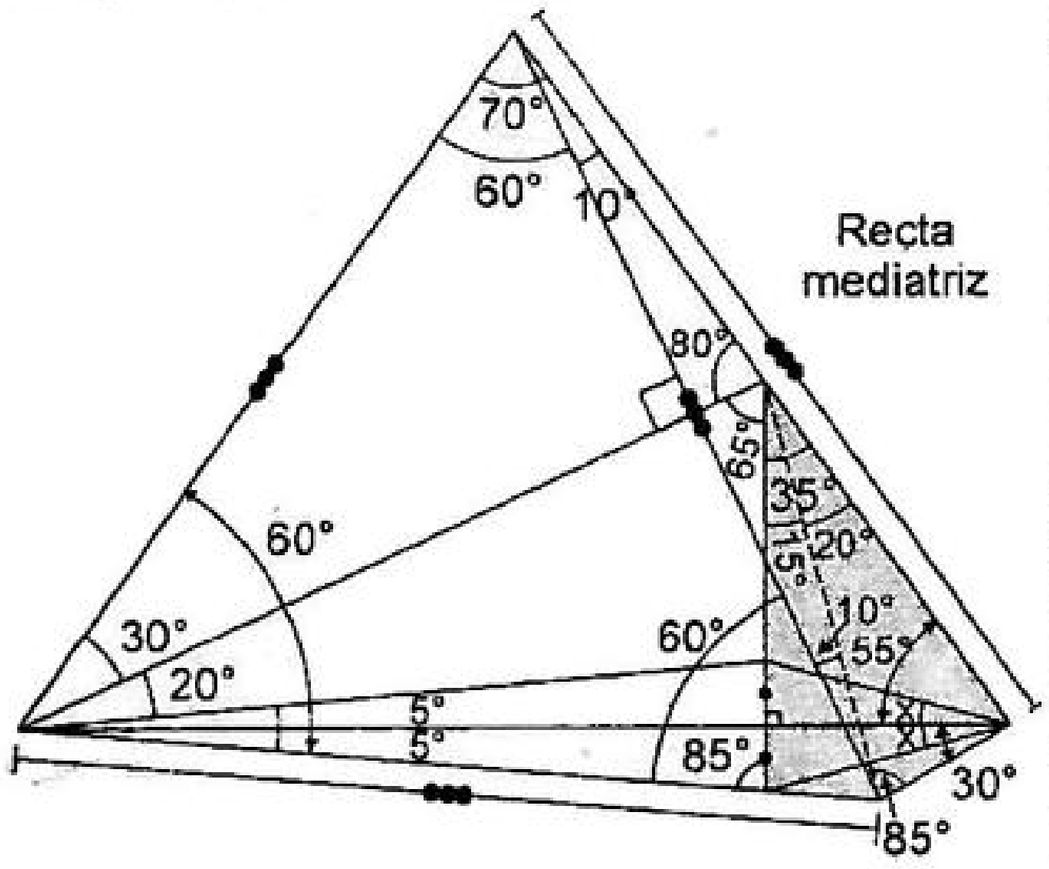
Paso N° 6. Se forma un triángulo isósceles:

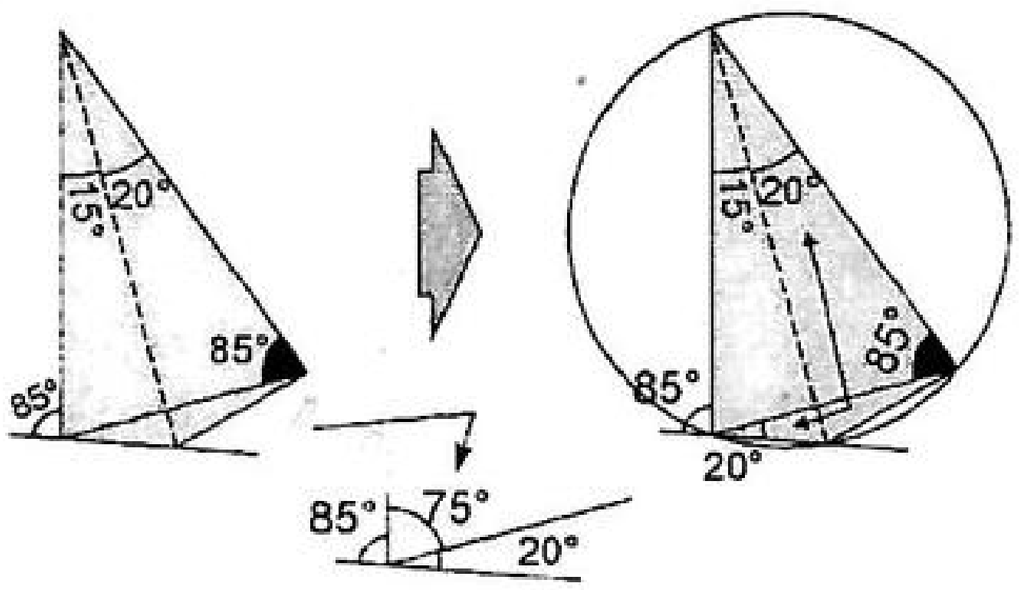




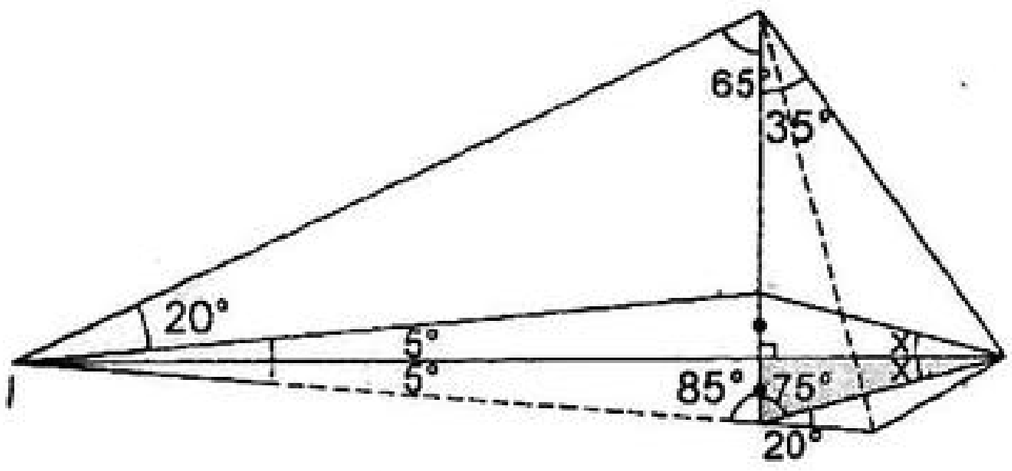
Scanned by CamScanner

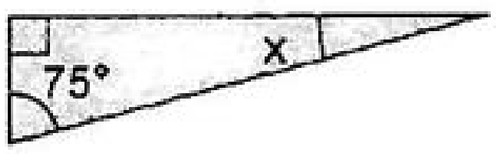
Paso N° 7. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:





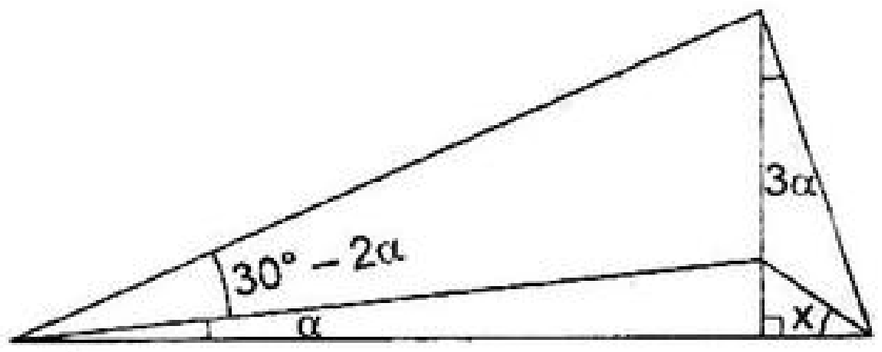
Paso N° 8. Finalmente observamos en la figura que se tiene:





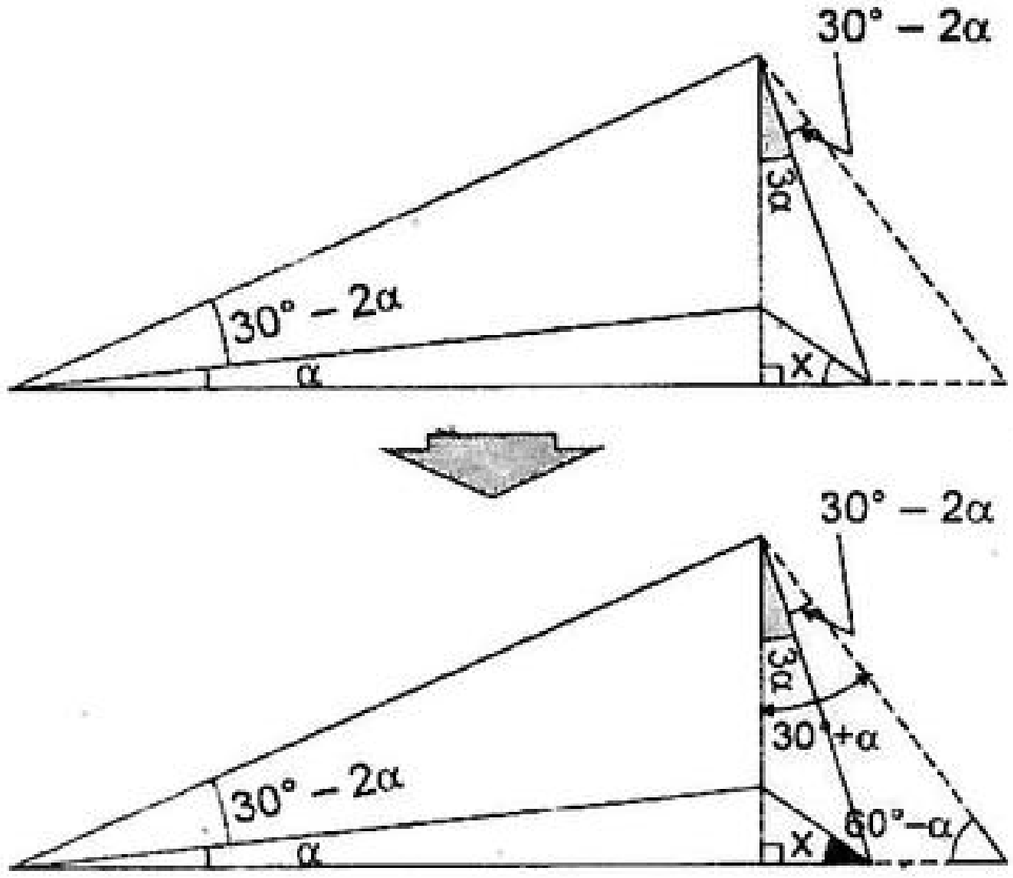
$\therefore x = 15°$

Problema 18. Caso general. Calcular x.

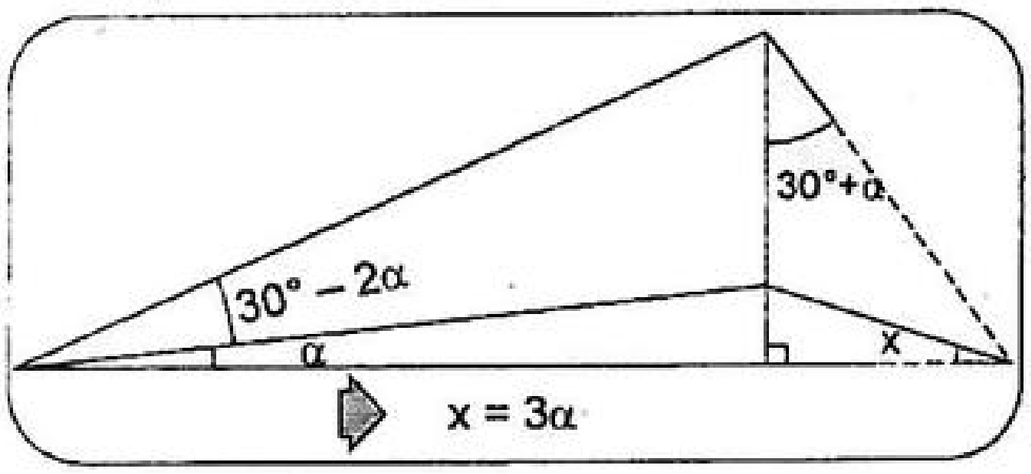


Resolución:

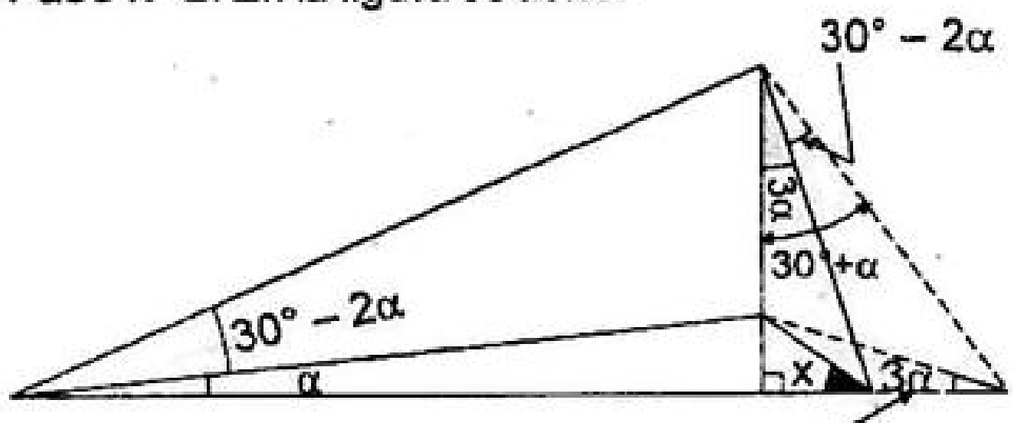
Paso N° 1 Realizamos el siguiente trazo:



La nueva figura adquiere las mismas características del problema 16, donde se obtuvo:

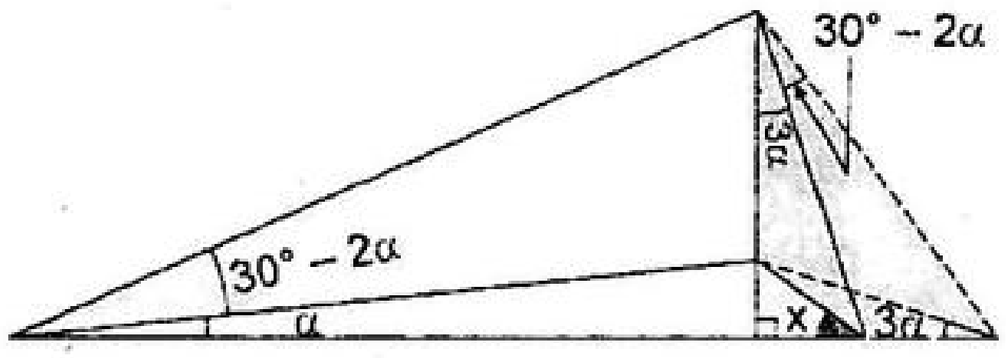


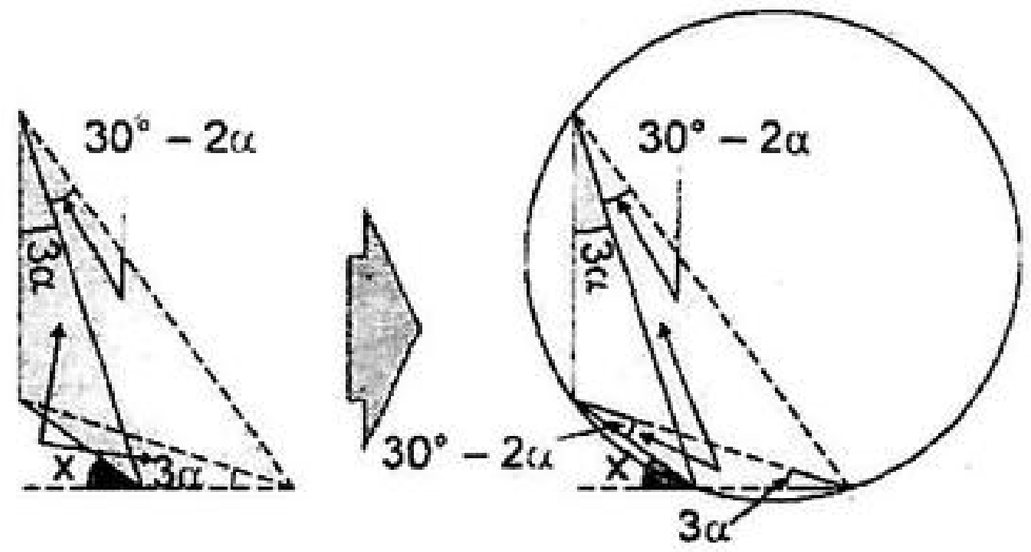
Paso N° 2. En la figura se tiene:

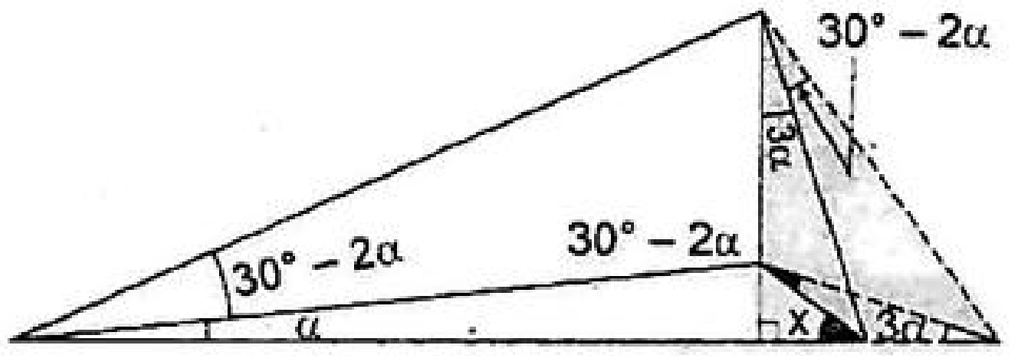


Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Se obtiene en la nueva figura un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

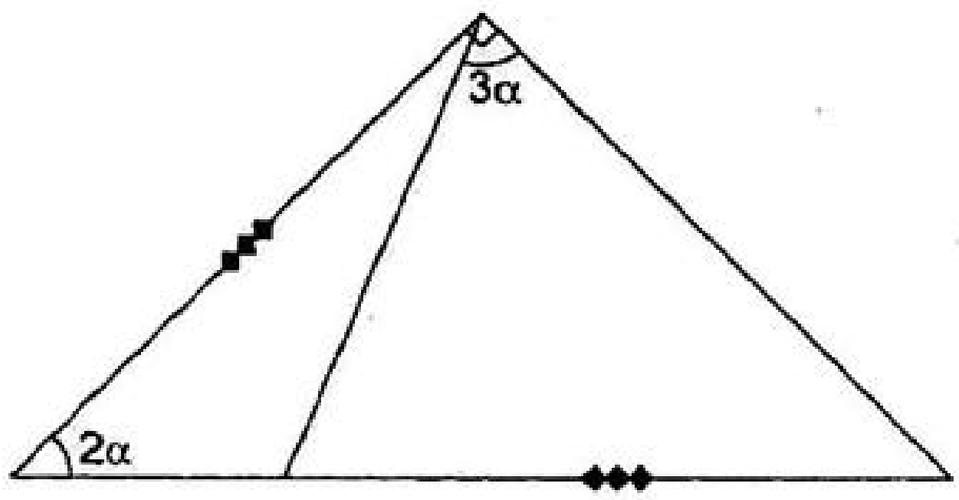






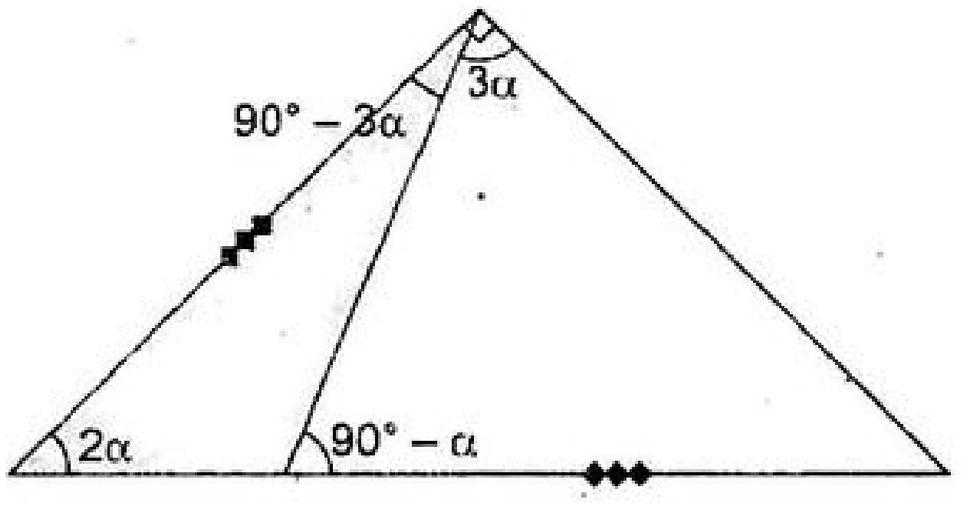
Aquí se cumple:
$x = 30° - 2\alpha + 3\alpha$
$x = 30° + \alpha$

Problema 19. Calcular α.

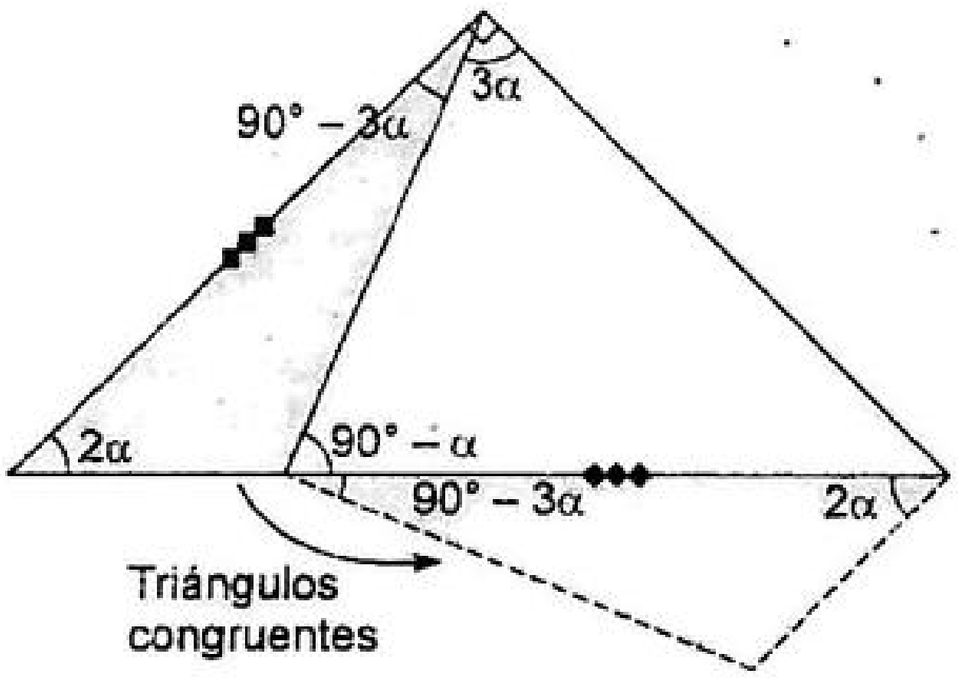


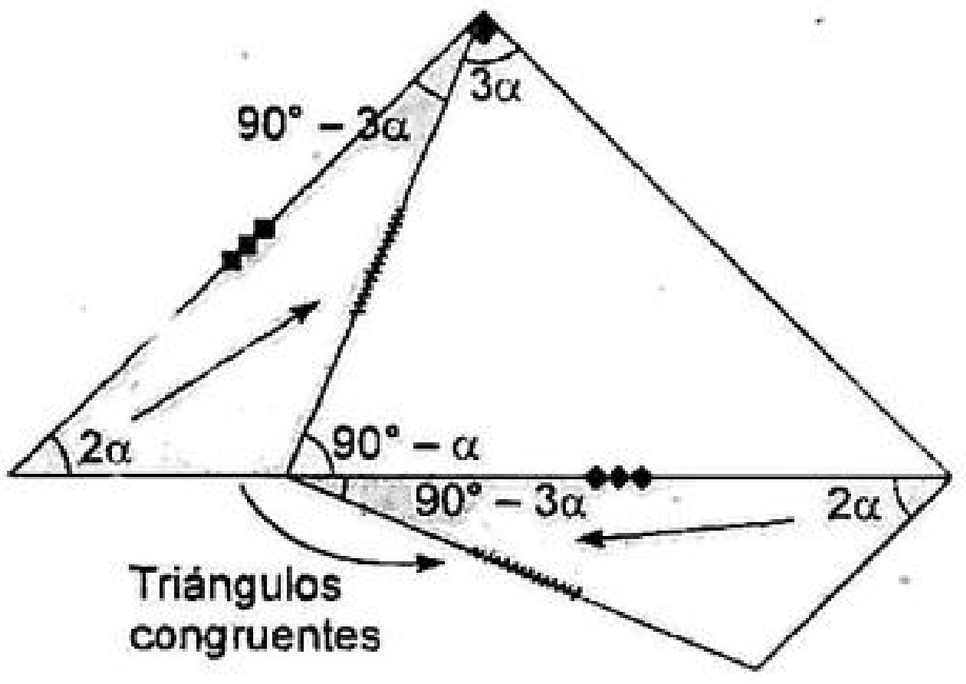
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:



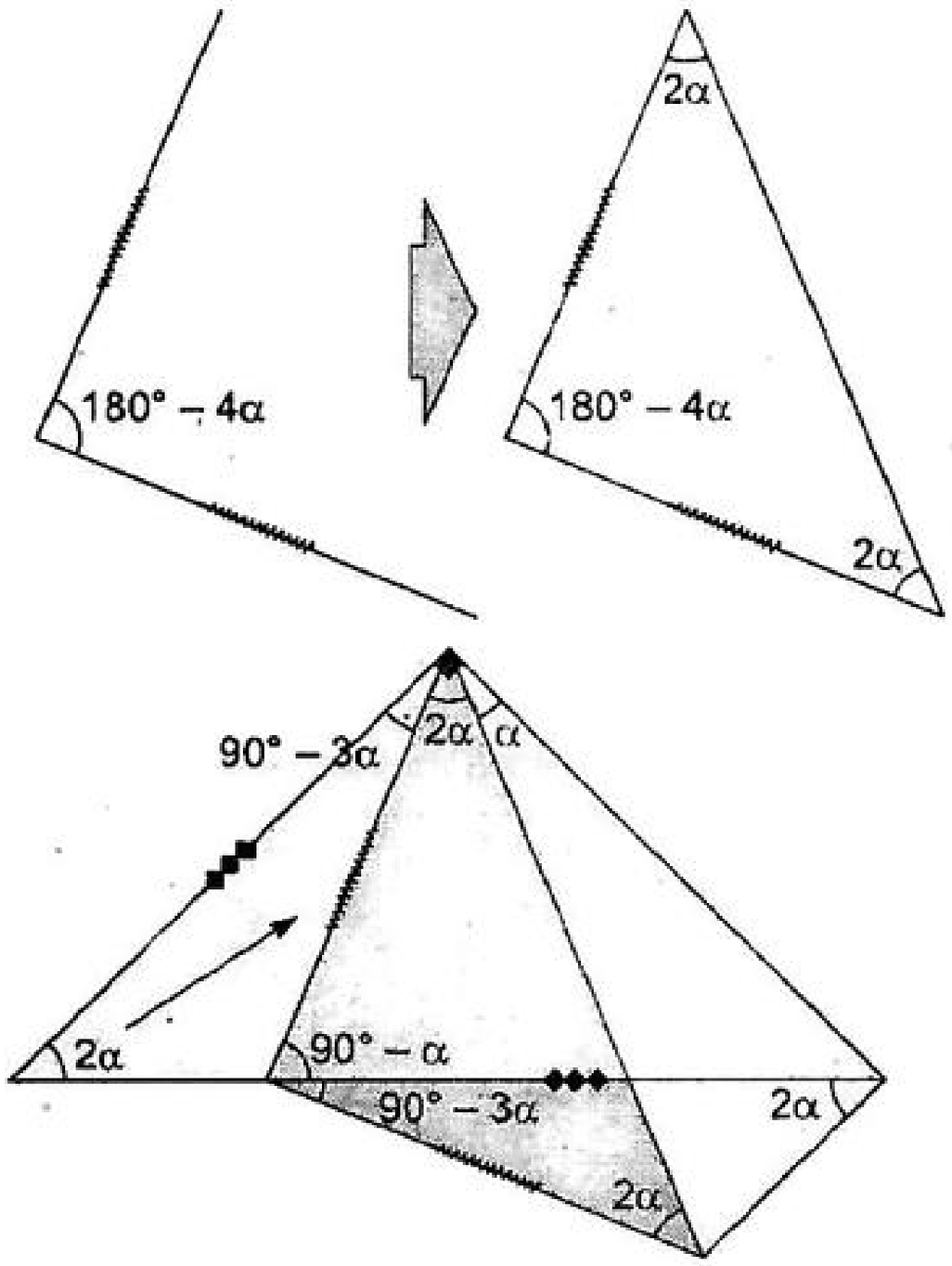
Paso N° 2. Construimos un triángulo congruente de la siguiente manera:



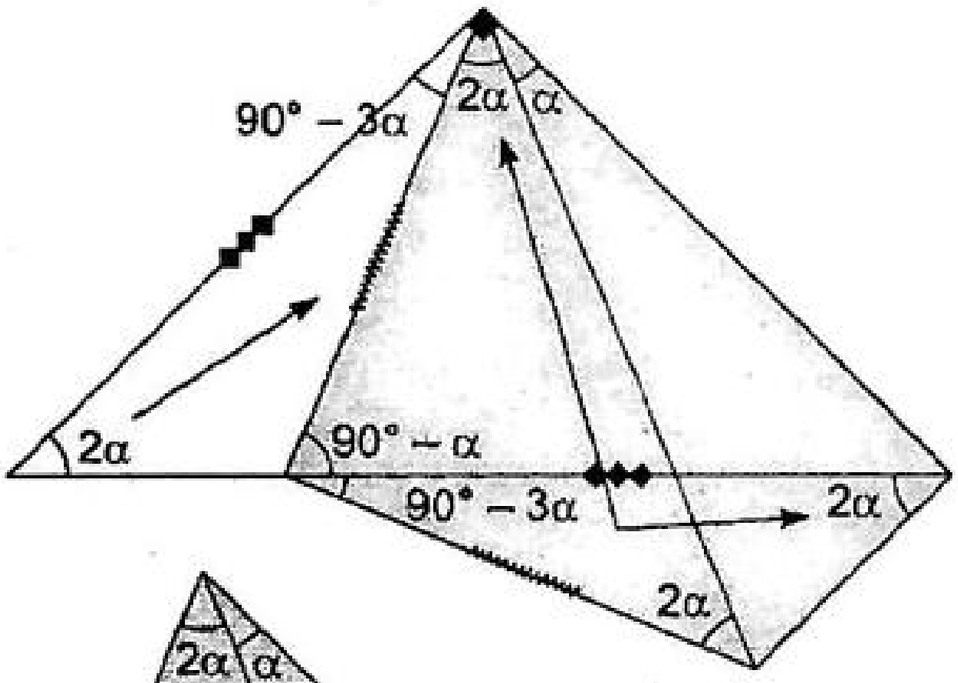


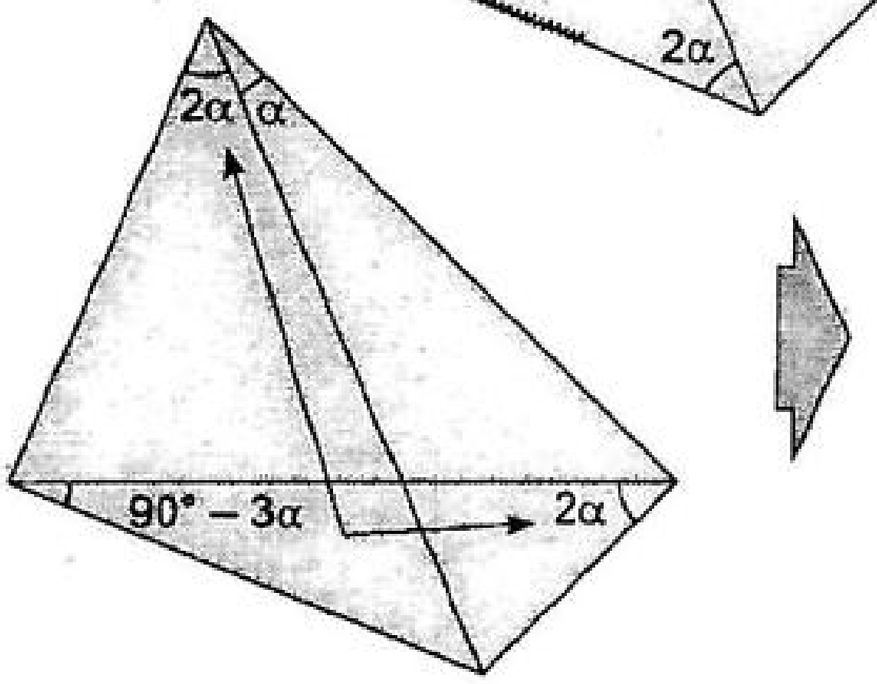
Scanned by CamScanner

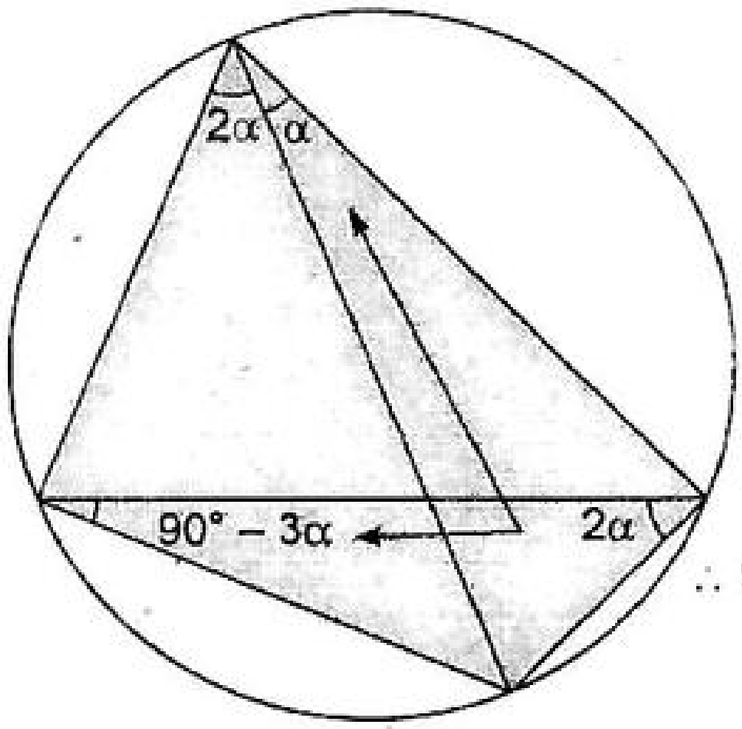
Paso N° 3. Se obtiene un triángulo isósceles:



Paso N° 4. Ahora se tiene un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o rebote:





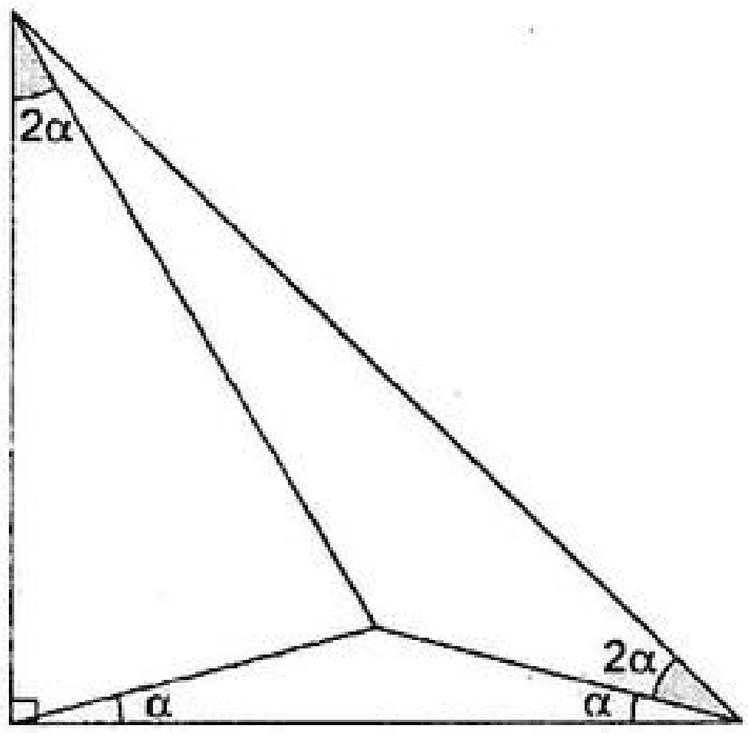


$\therefore\ 90° - 3\alpha = \alpha$

$90° = 4\alpha$

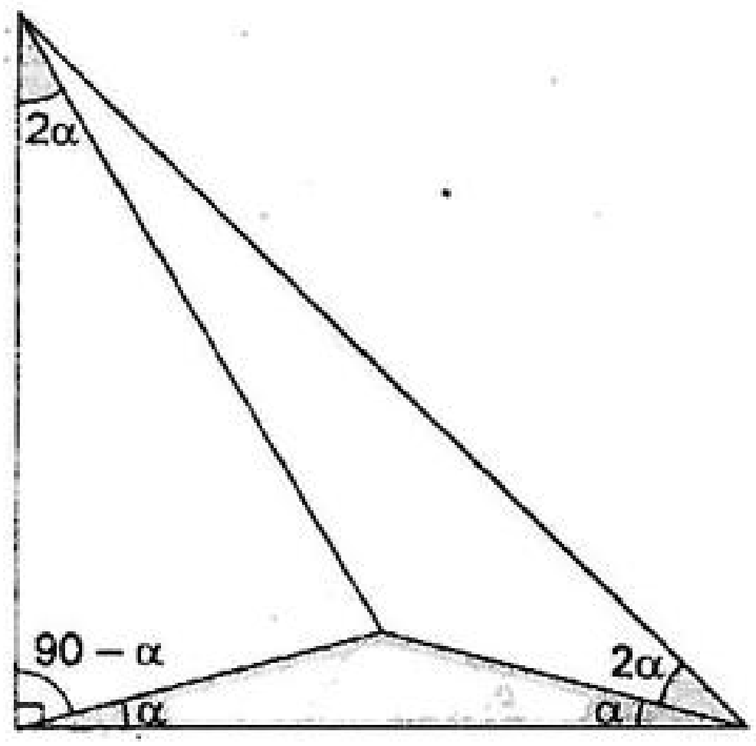
$22°30' = \alpha$

Problema 20. Calcular α.

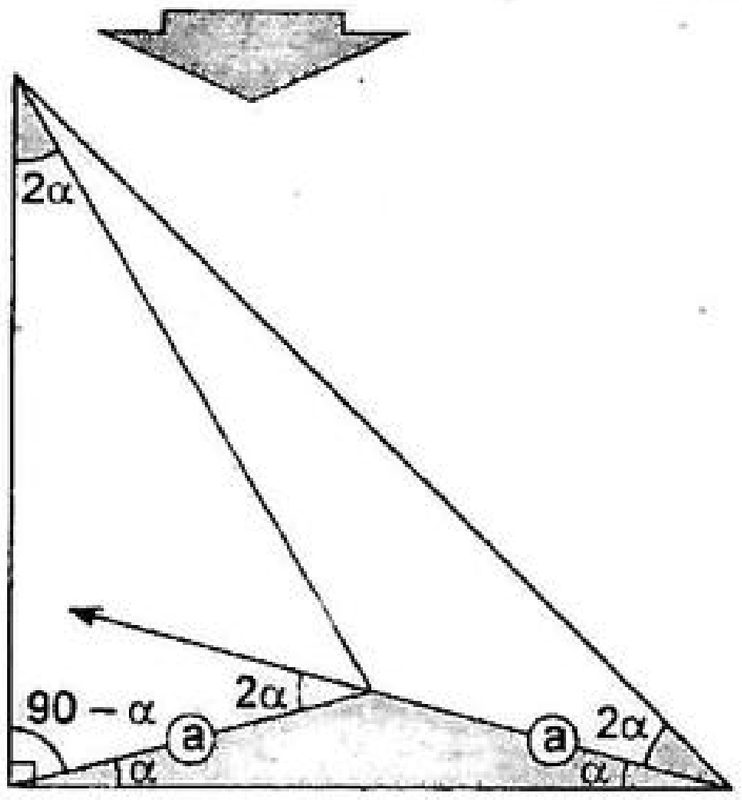


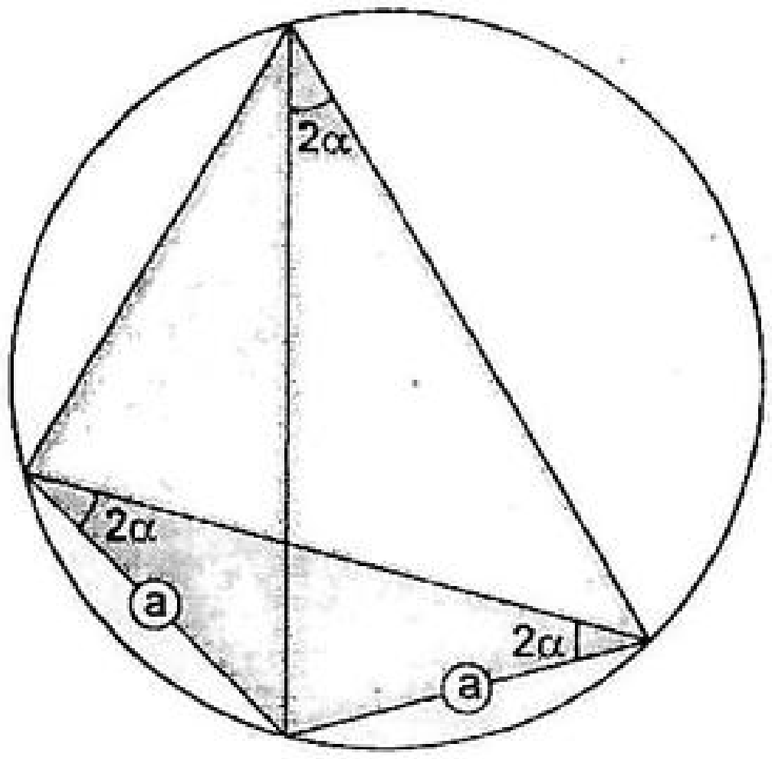
Resolución:

Paso N° 1. Observando los ángulos internos del triángulo dado:

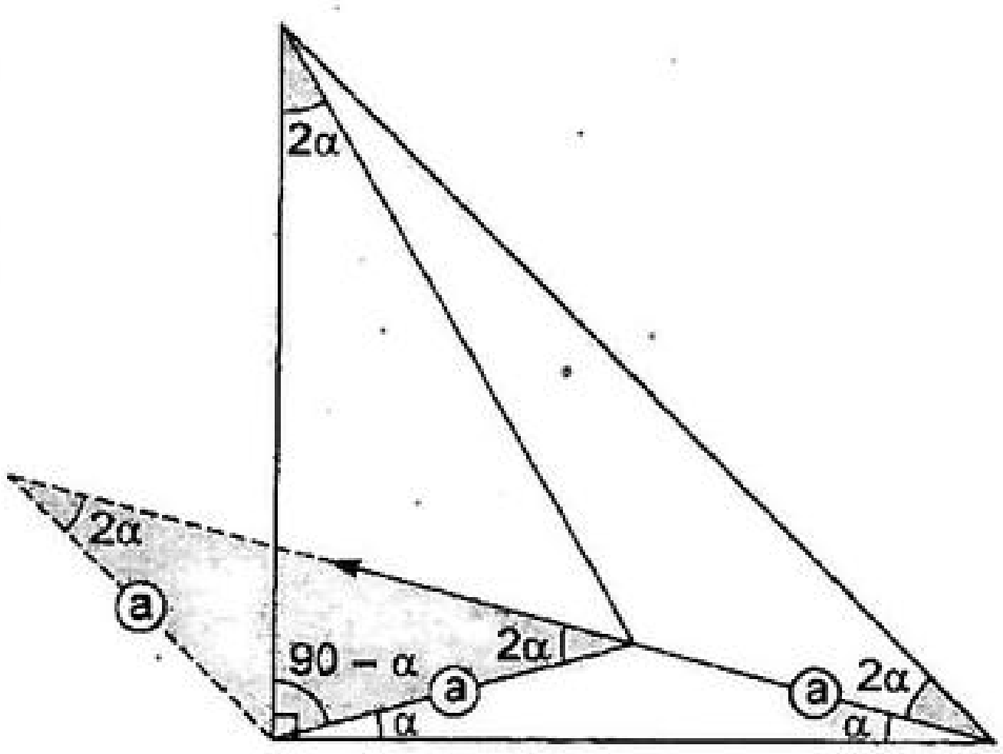


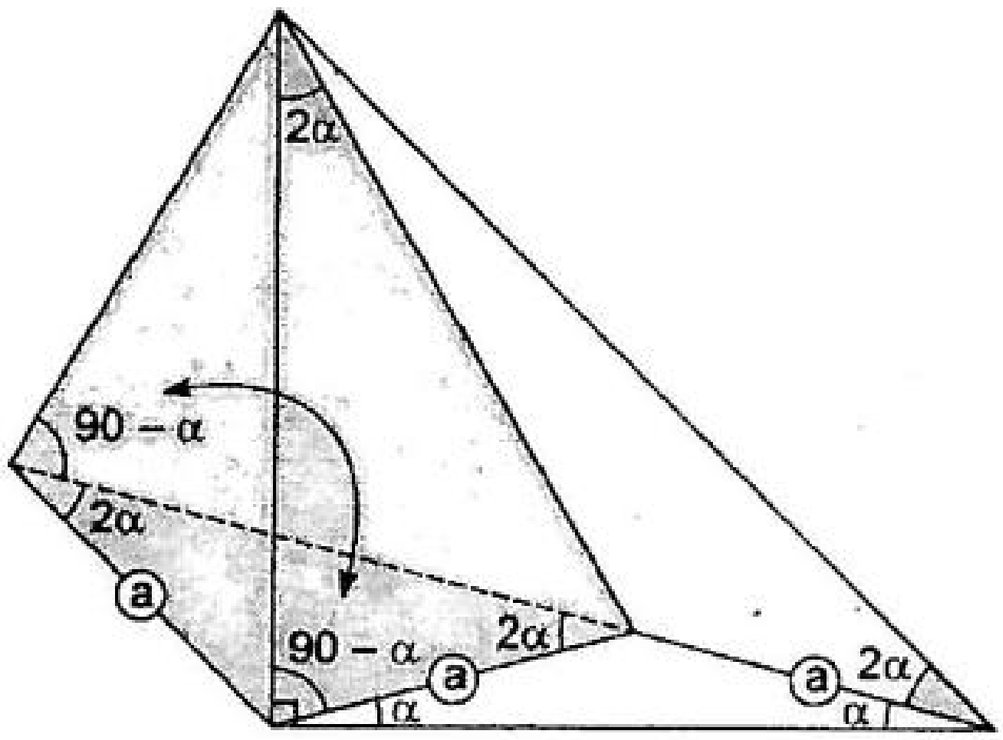
Scanned by CamScanner



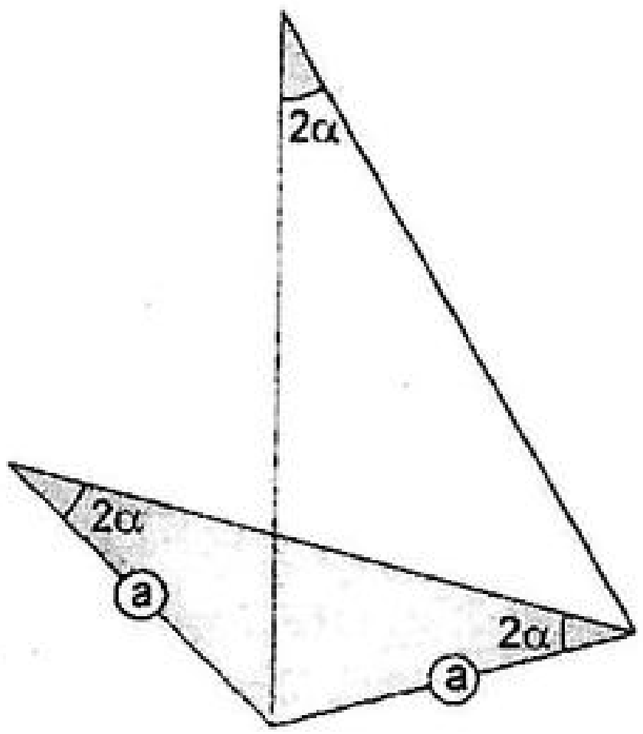


Paso N° 2. Formamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:

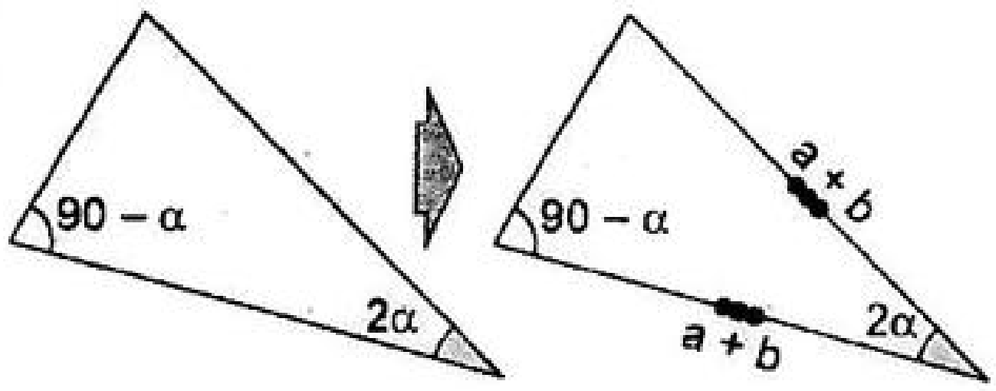


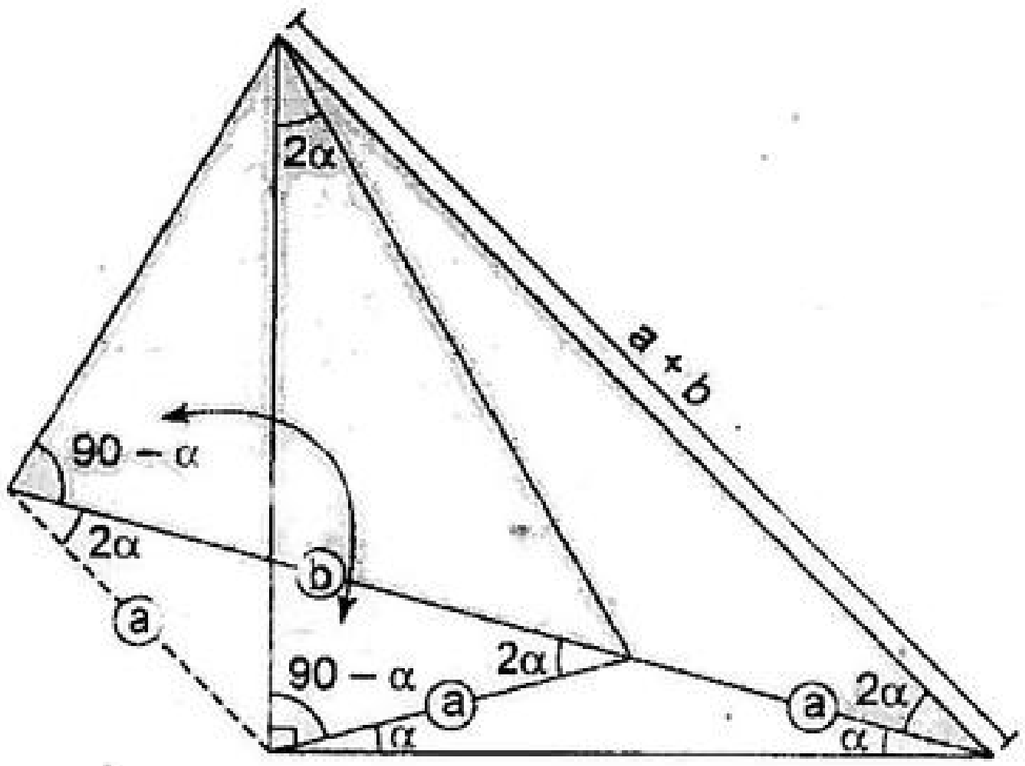


Paso N° 3. Se tiene un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o rebote:



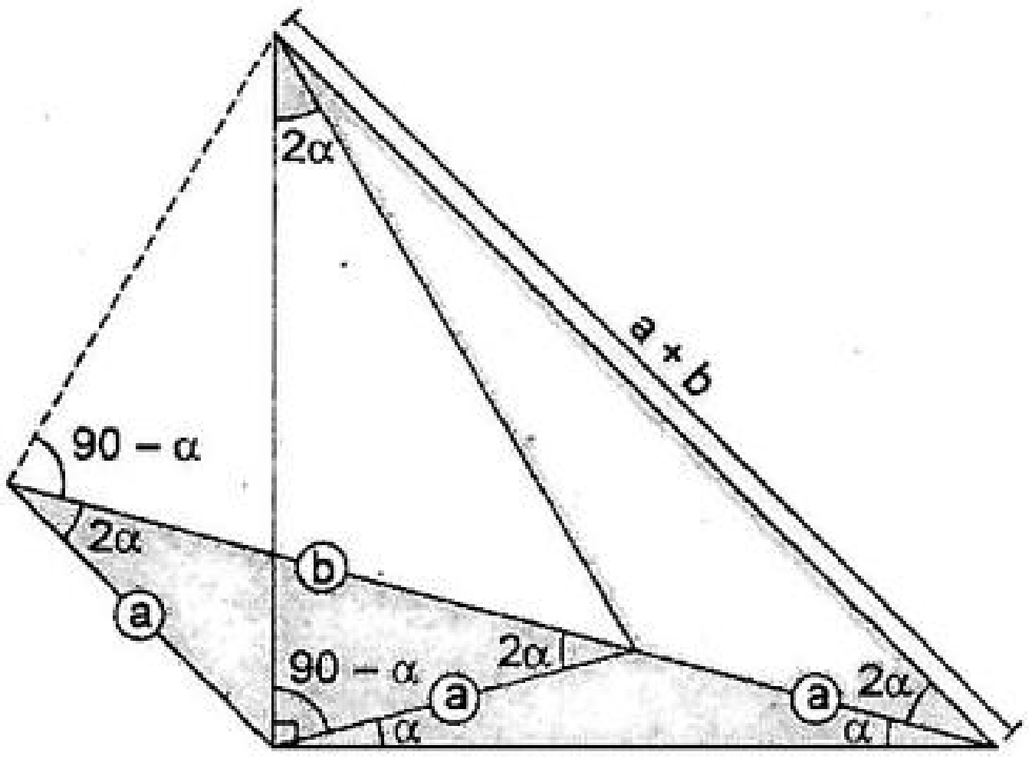
Paso N° 4. Se tiene un nuevo triángulo isósceles:

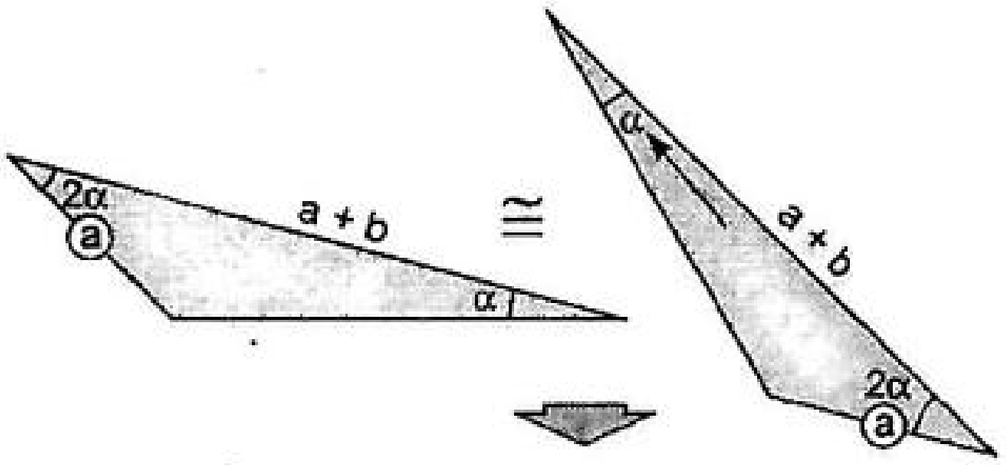


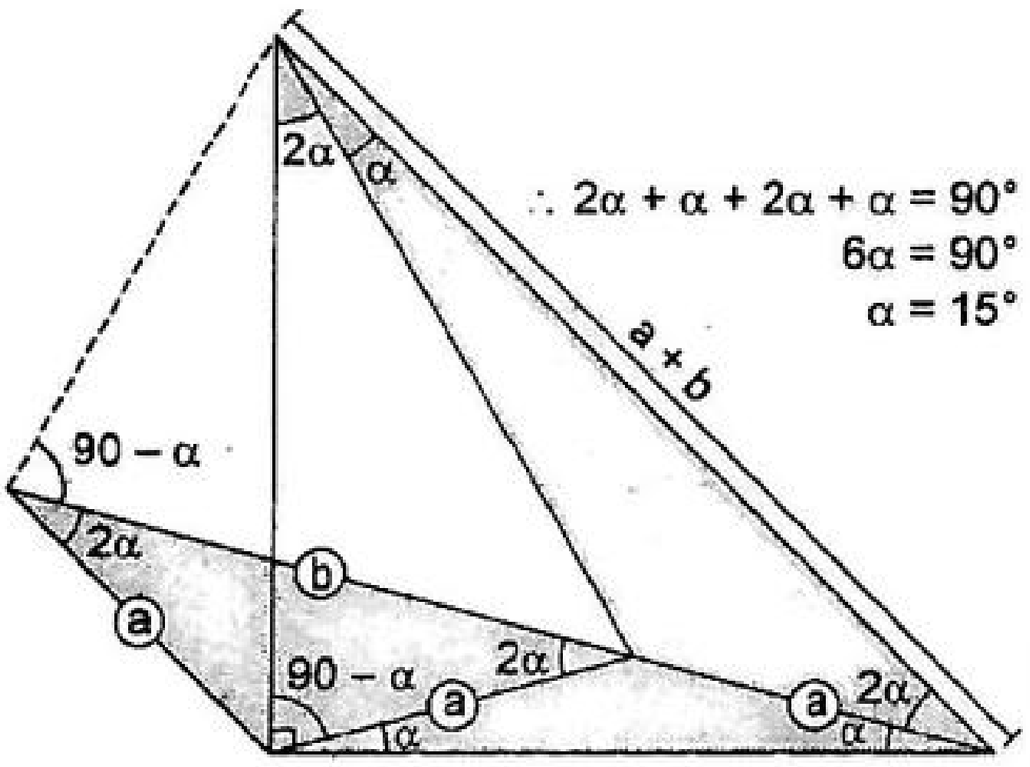


Scanned by CamScanner

Paso N° 5. Ahora se tiene dos triángulos congruentes. Caso (L.A.L.)





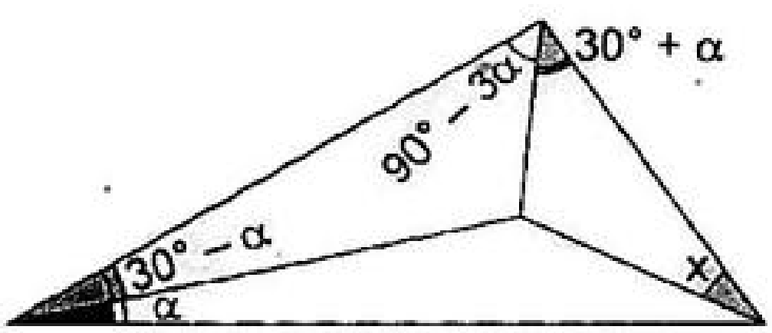


$\therefore 2\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha = 90°$

$6\alpha = 90°$

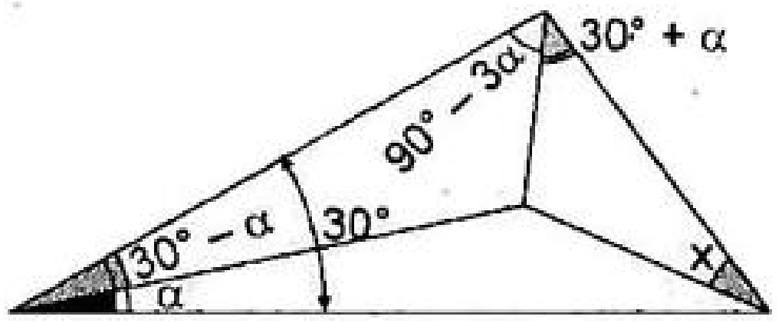
$\alpha = 15°$

Problema 21. Calcular x.

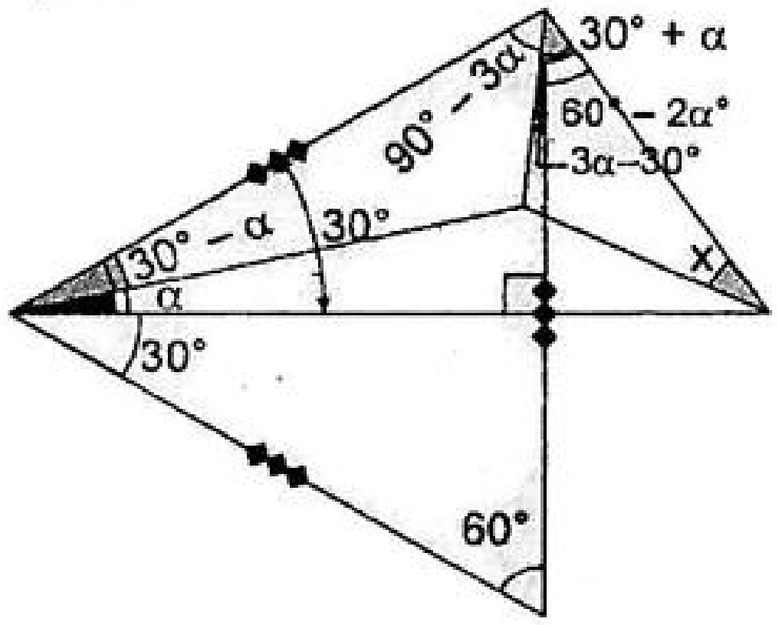


Resolución:

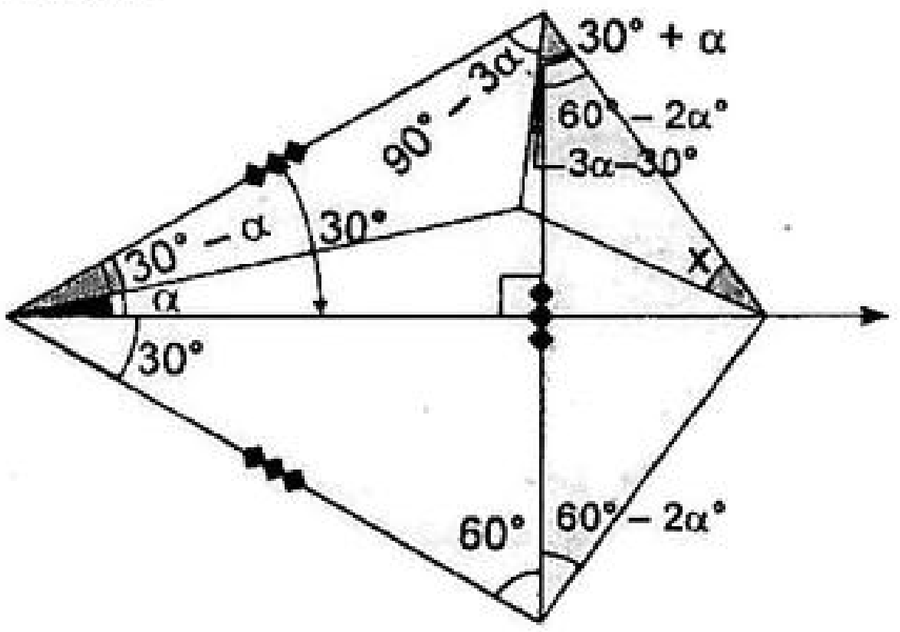
Paso N° 1. Se observa un ángulo de 30° en la figura:



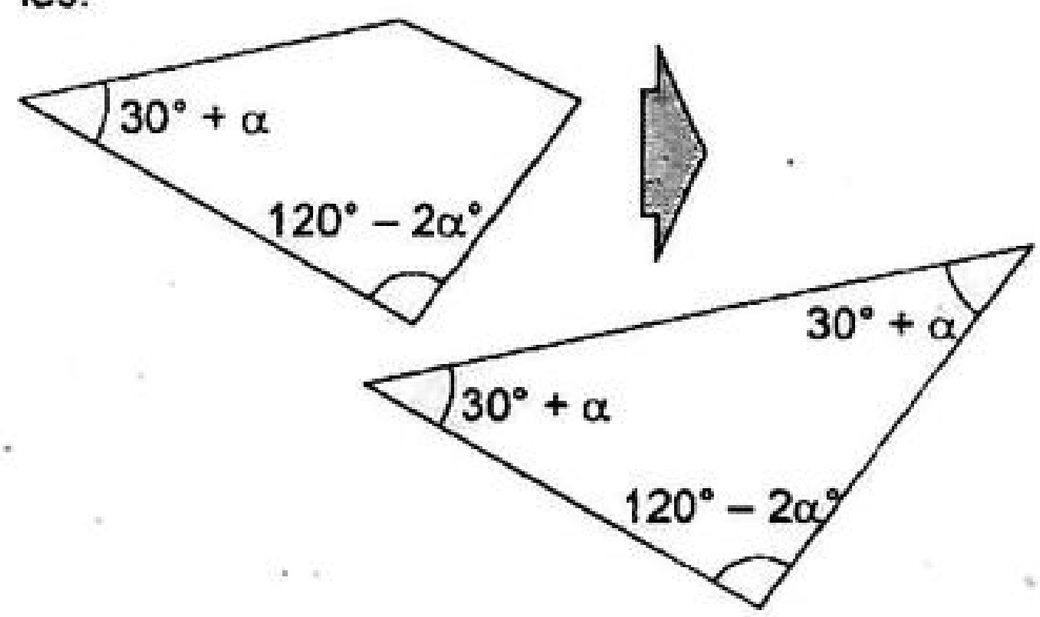
Paso N° 2. Construimos externamente un triángulo equilátero:



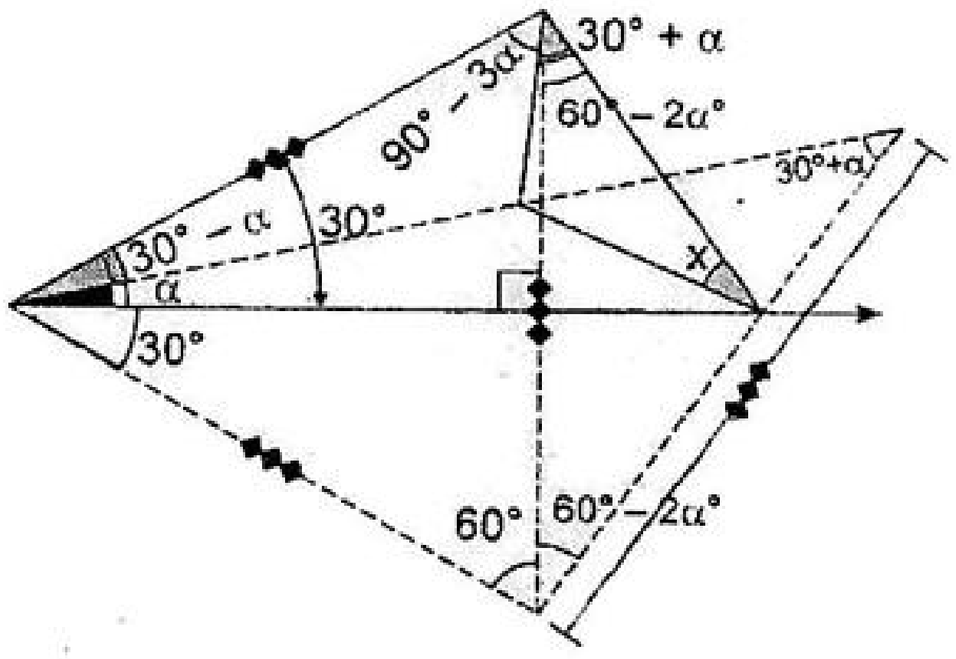
Paso N° 3. Se observa una recta mediatriz donde se cumple:



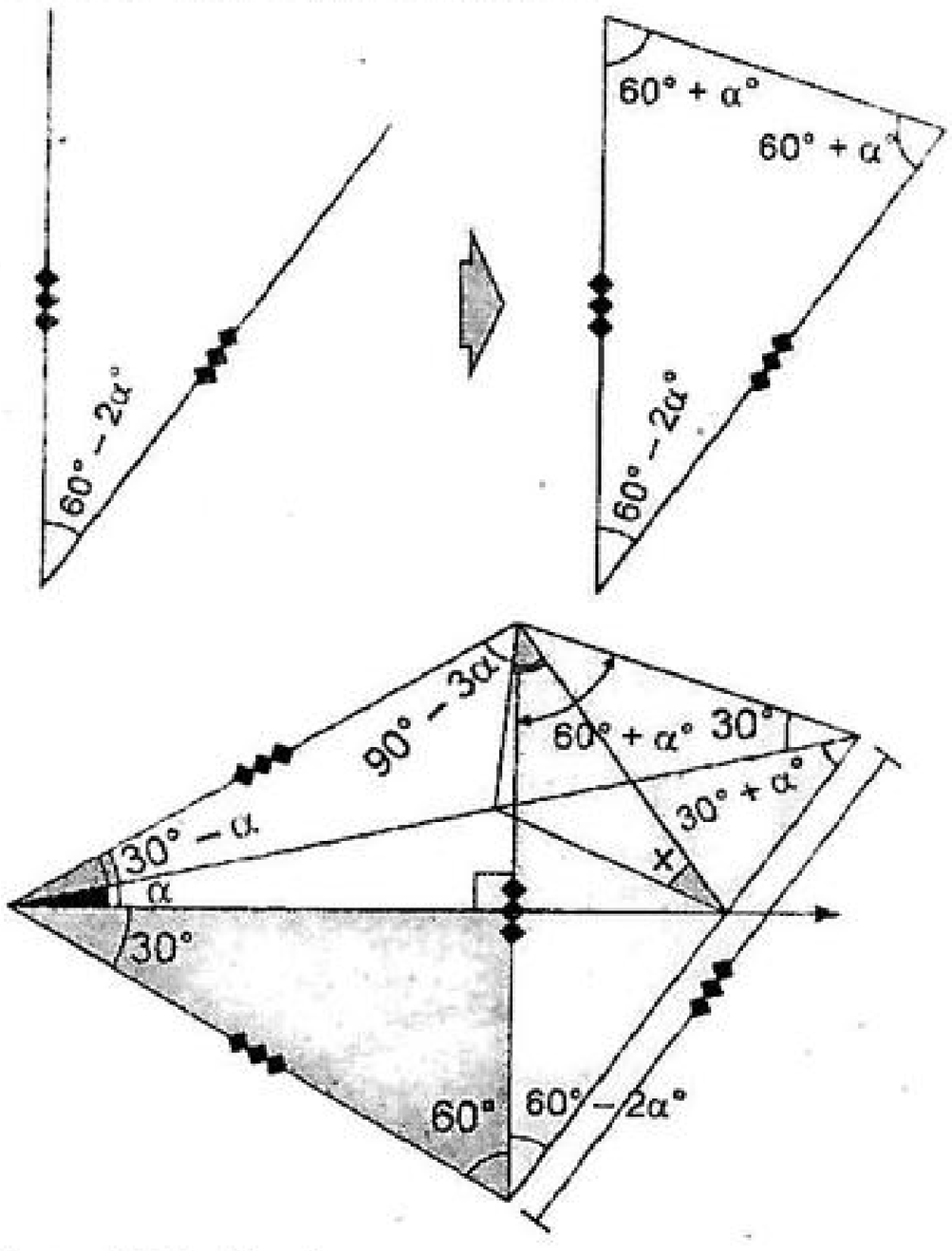
Paso N° 4. Se observa un nuevo triángulo isósceles:



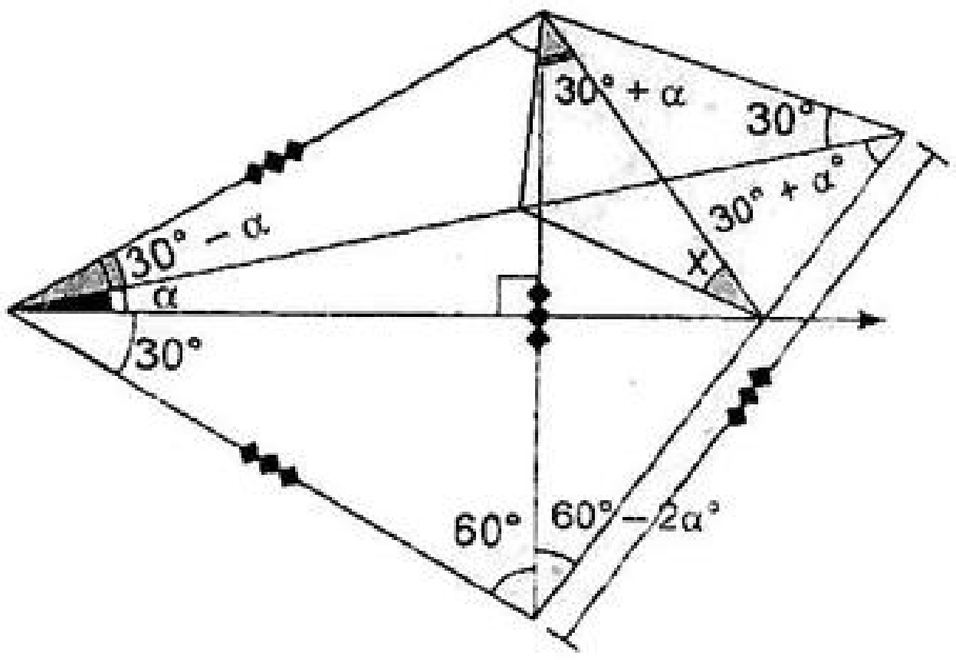
Scanned by CamScanner

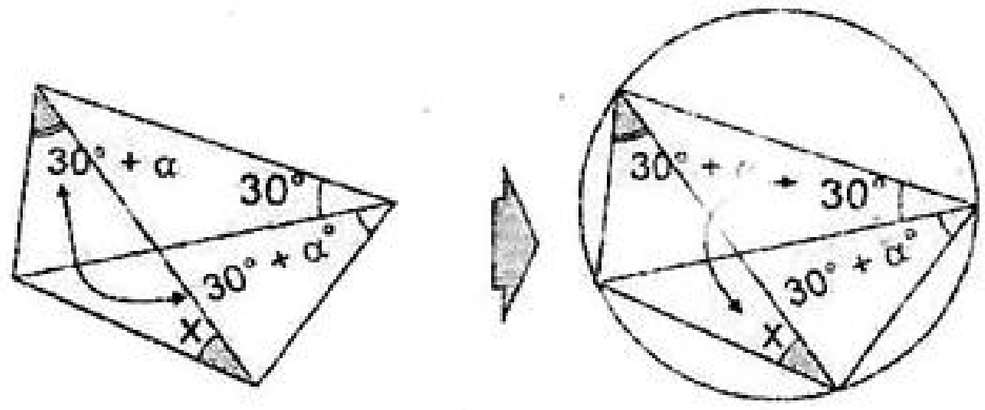


Paso N° 5. También se obtiene:



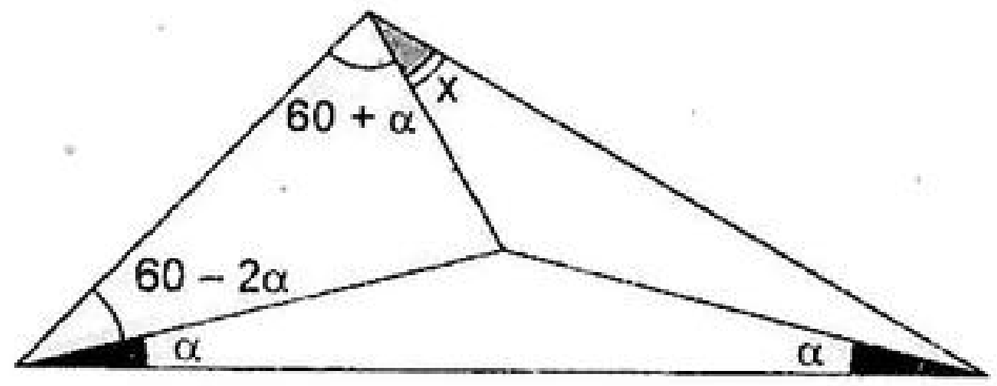
Paso N° 6. Se observa un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o rebote:





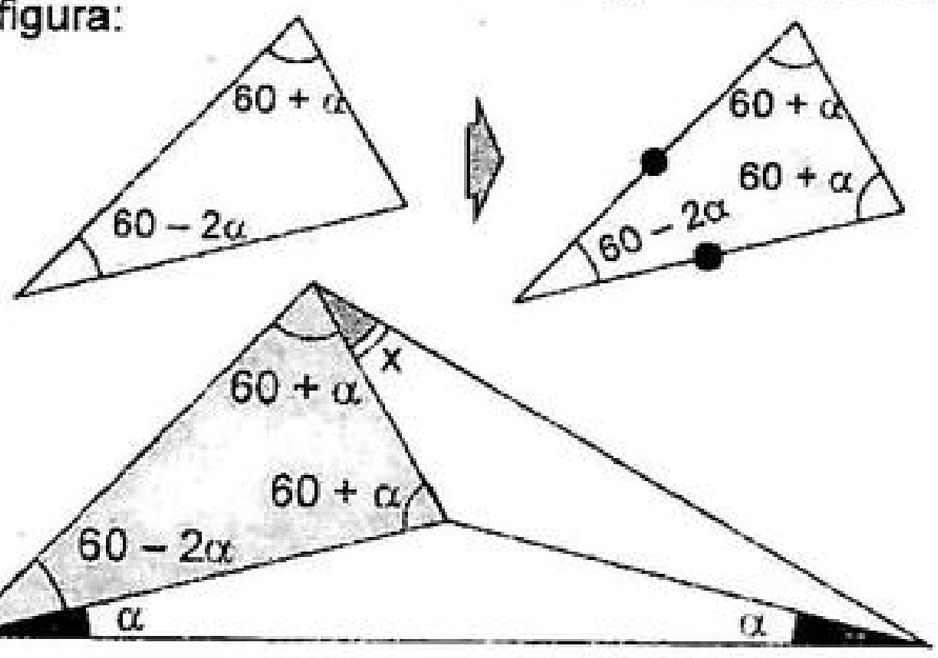
$\therefore x = 30°$

Problema 22. Calcular x.

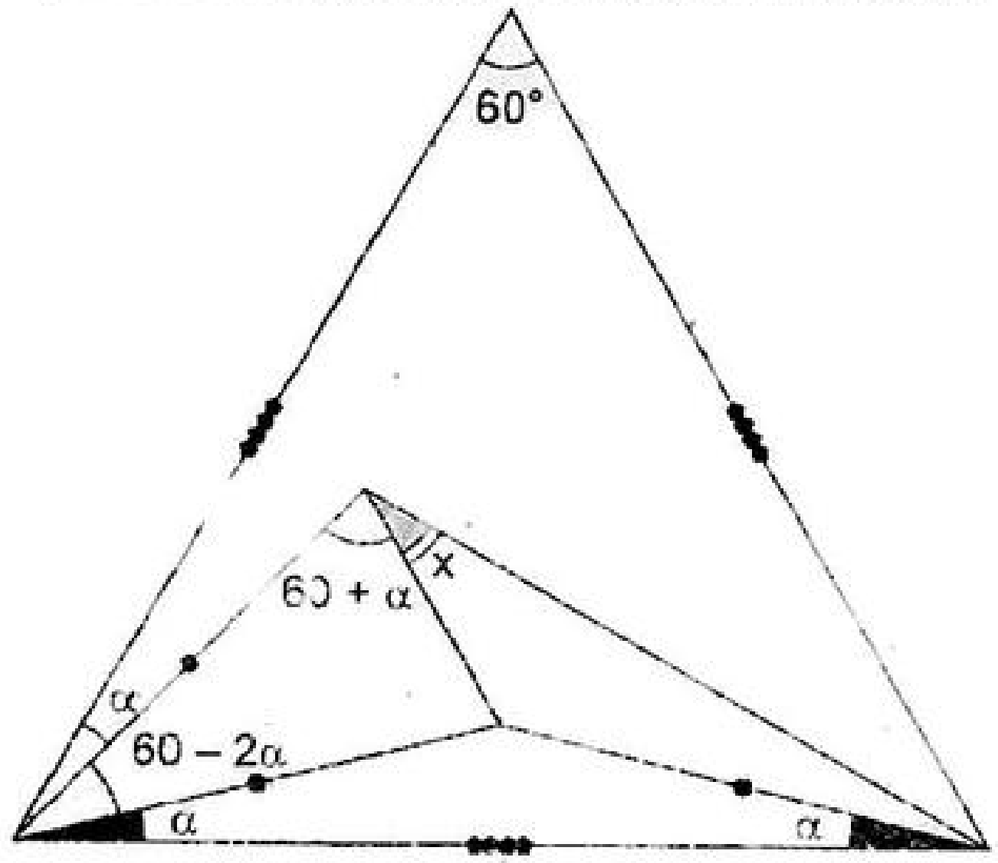


Resolución:

Paso N° 1. Observamos un triángulo isósceles en la figura:

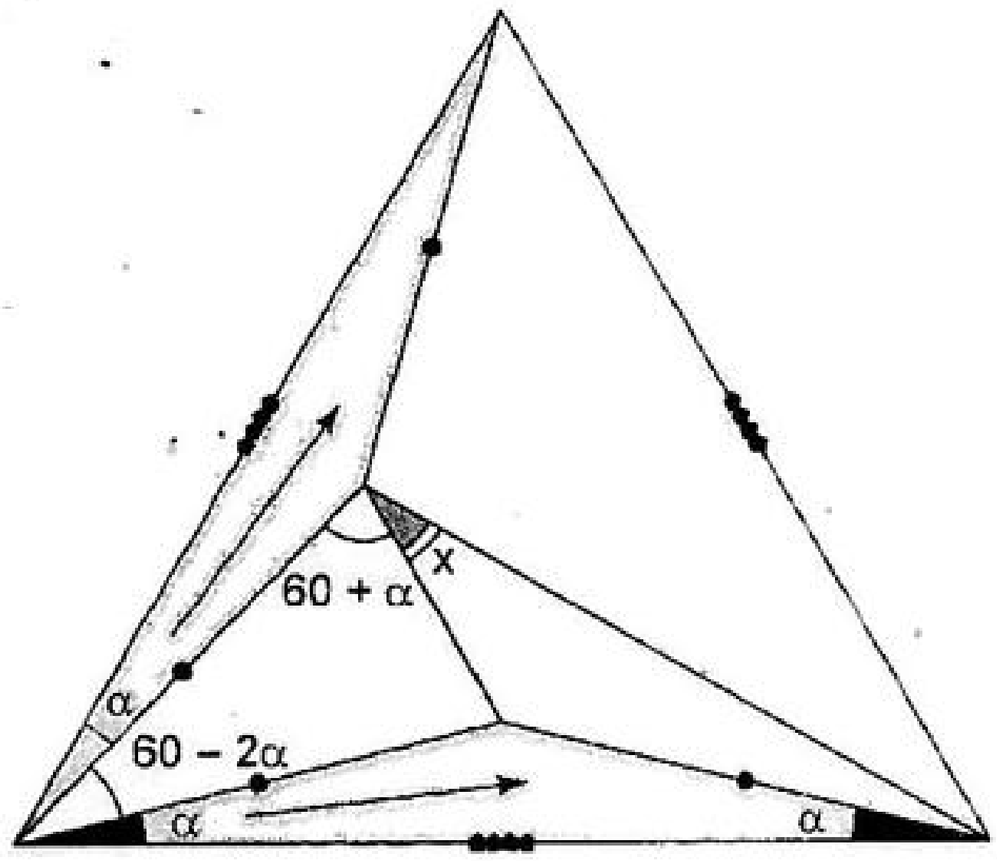


Paso N° 2. Completamos a un triángulo rectángulo equilátero a la figura dada de la siguiente manera:

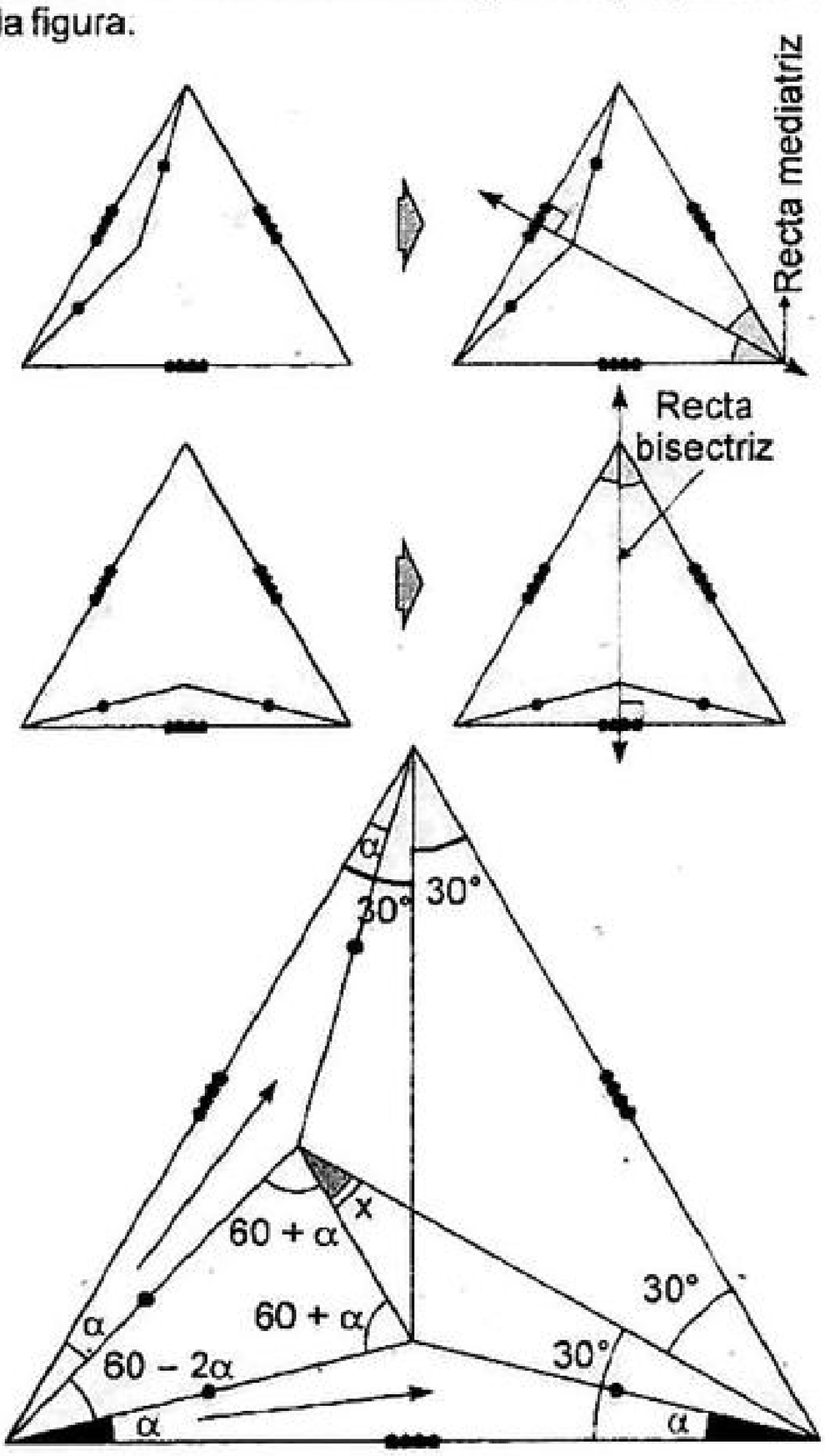


Scanned by CamScanner

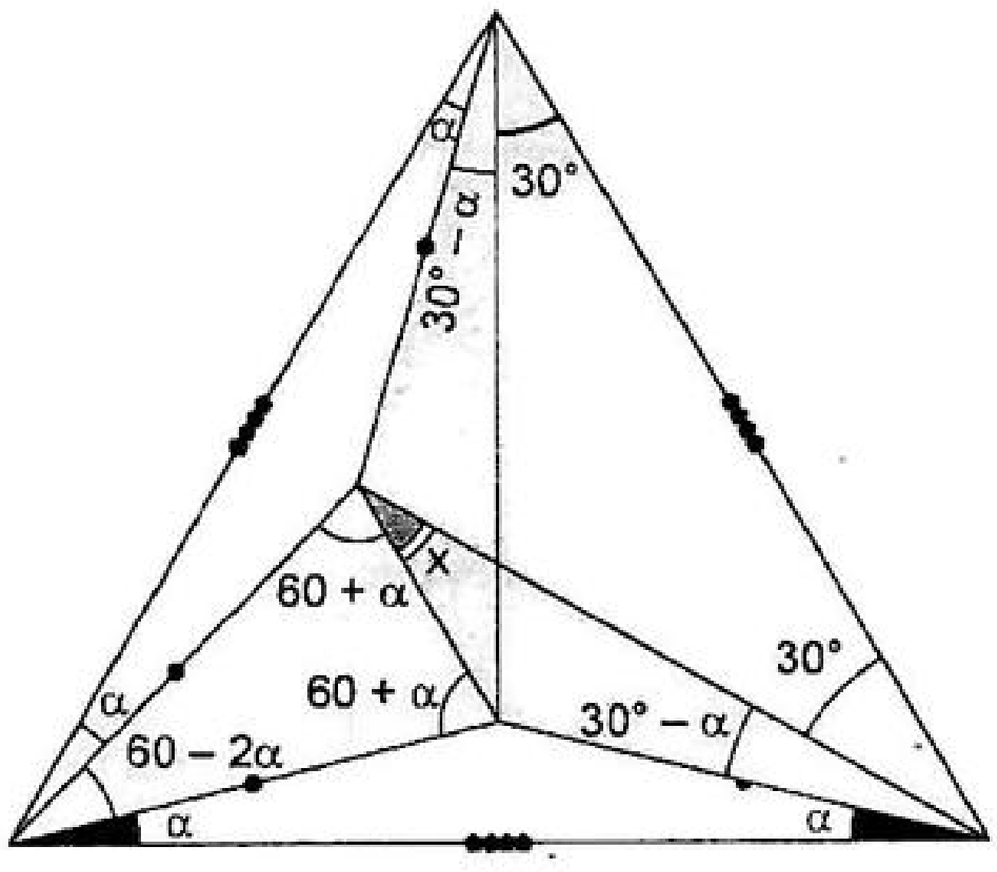
Paso N° 3. Se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.):

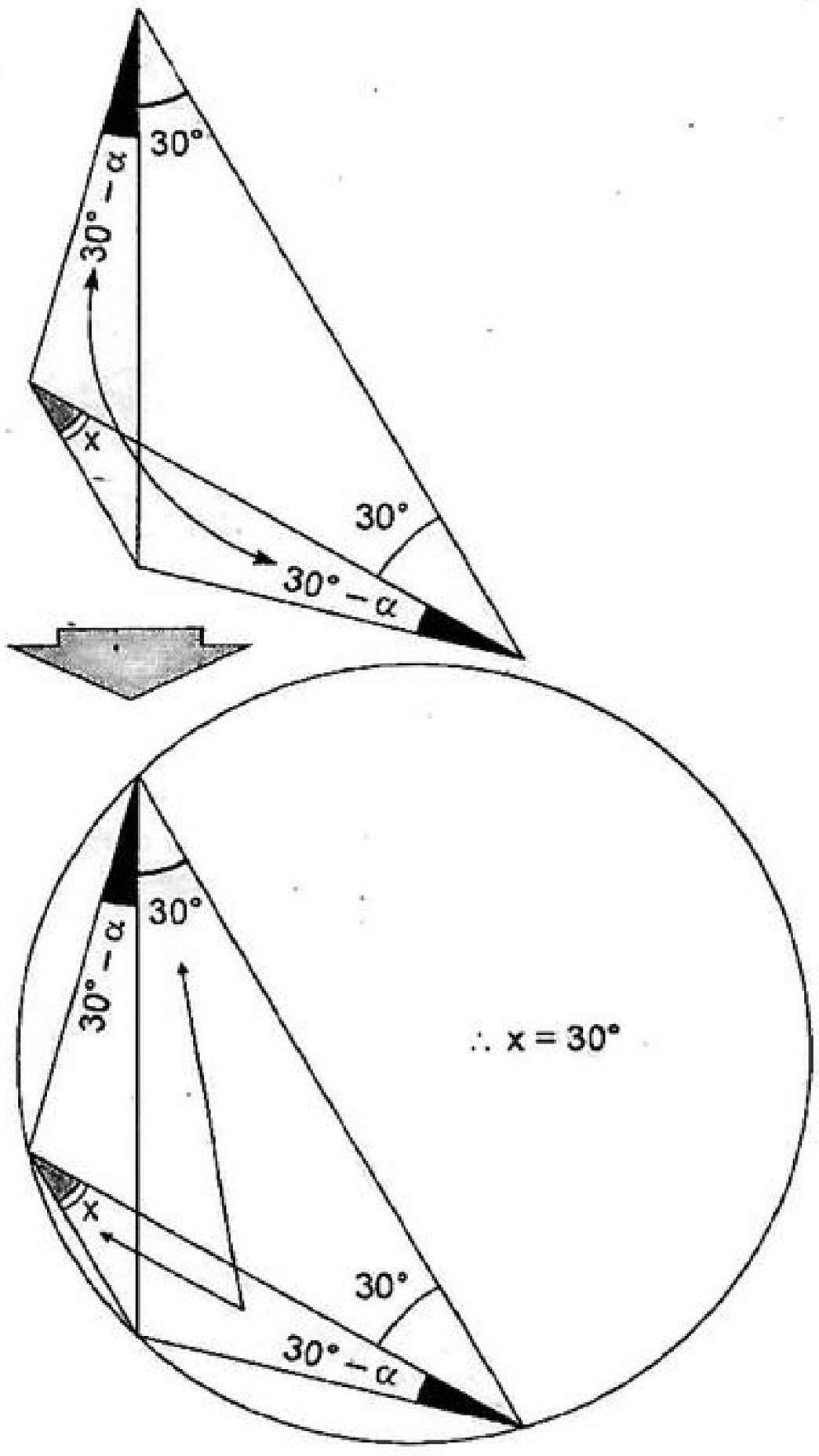


Paso N° 4. Observemos la siguiente propiedad en la figura.



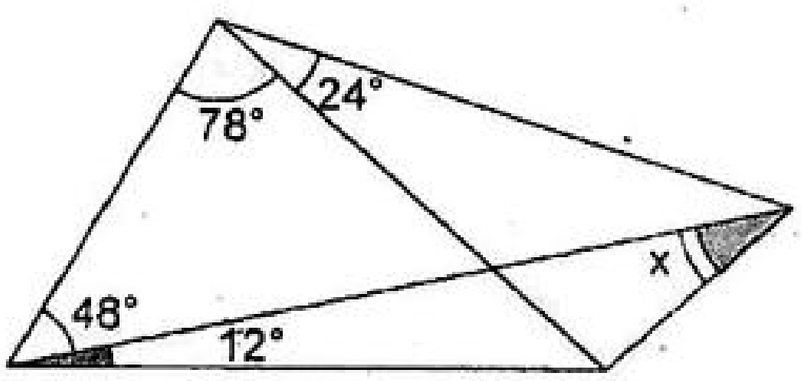
Paso N° 5. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la proiedad del pantalón o rebote:





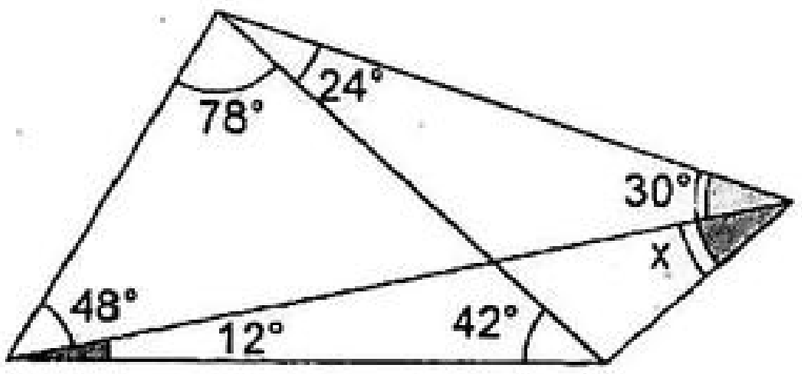
Scanned by CamScanner

Problema 23. Calcular x.

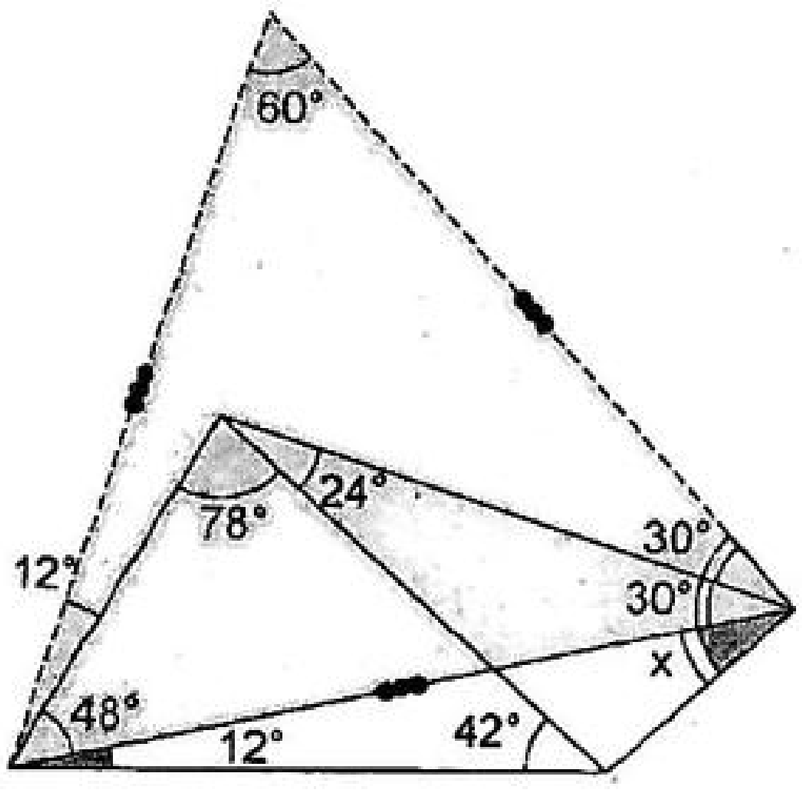


Resolución:

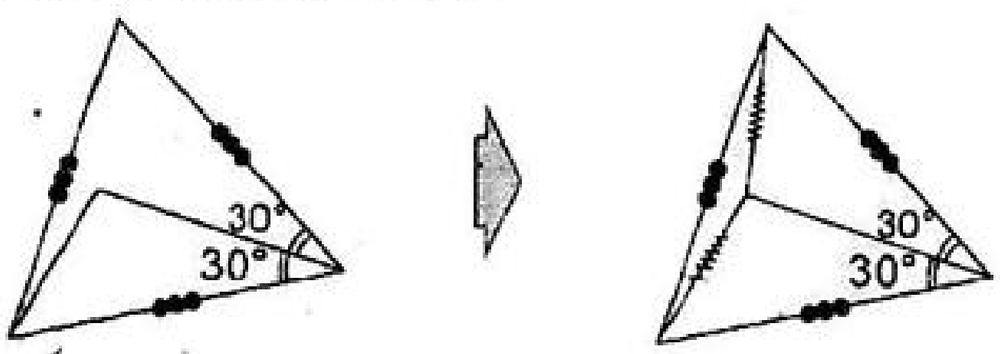
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:

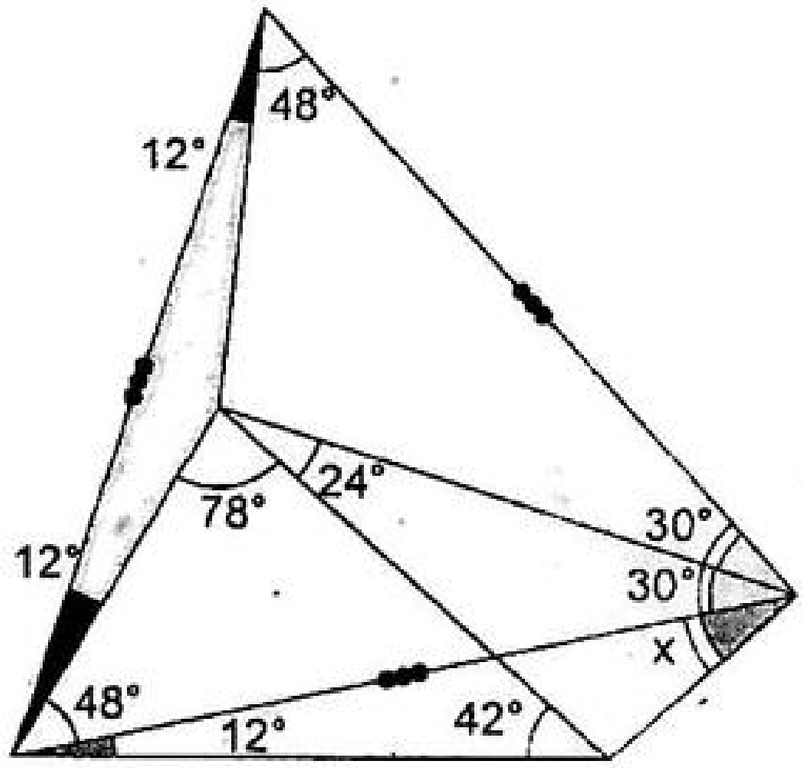


Paso N° 2. Se observa un ángulo de 30°, entonces completamos a un triángulo equilátero externamente:

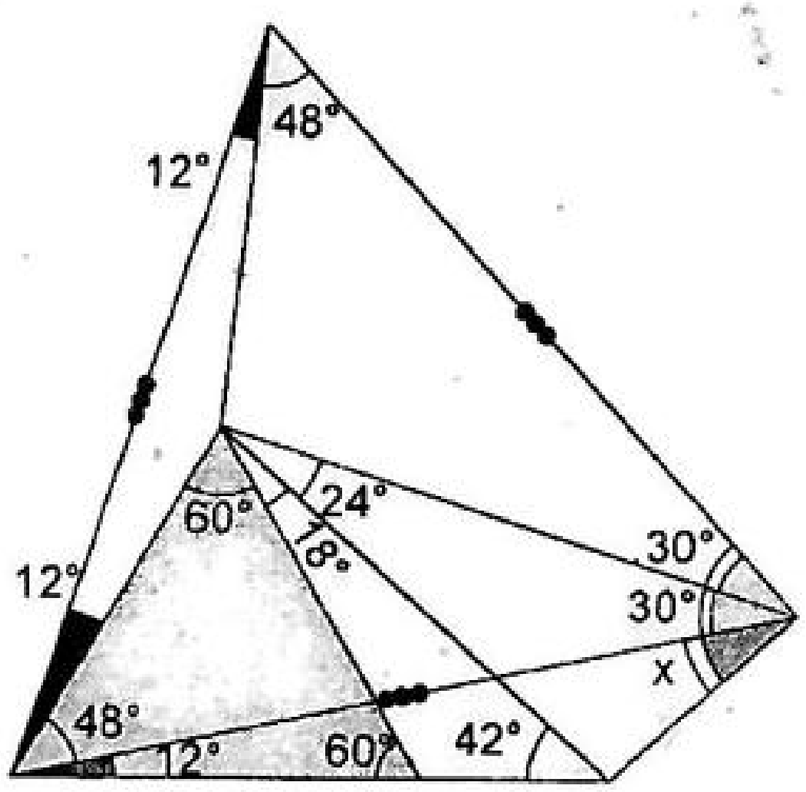


Paso N° 3. Se observa la siguiente figura, la mediatriz, donde cumple:

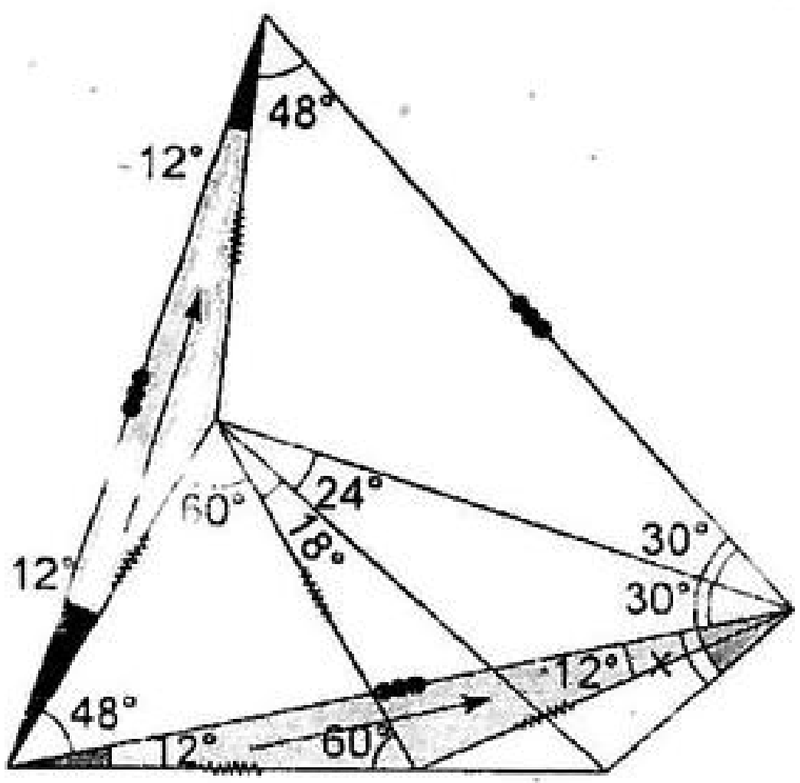




Paso N° 4. Hacemos el siguiente trazo para formar un triángulo equilátero y así obtenemos dos triángulos congruentes:

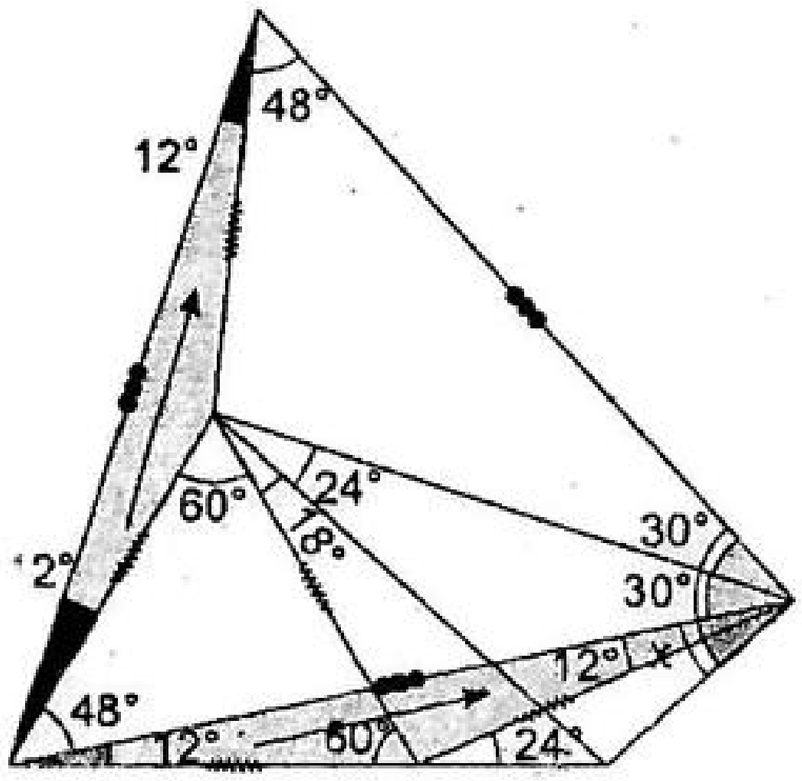


Paso N° 5. Se obtiene dos triángulos congruentes, caso L.A.L.:

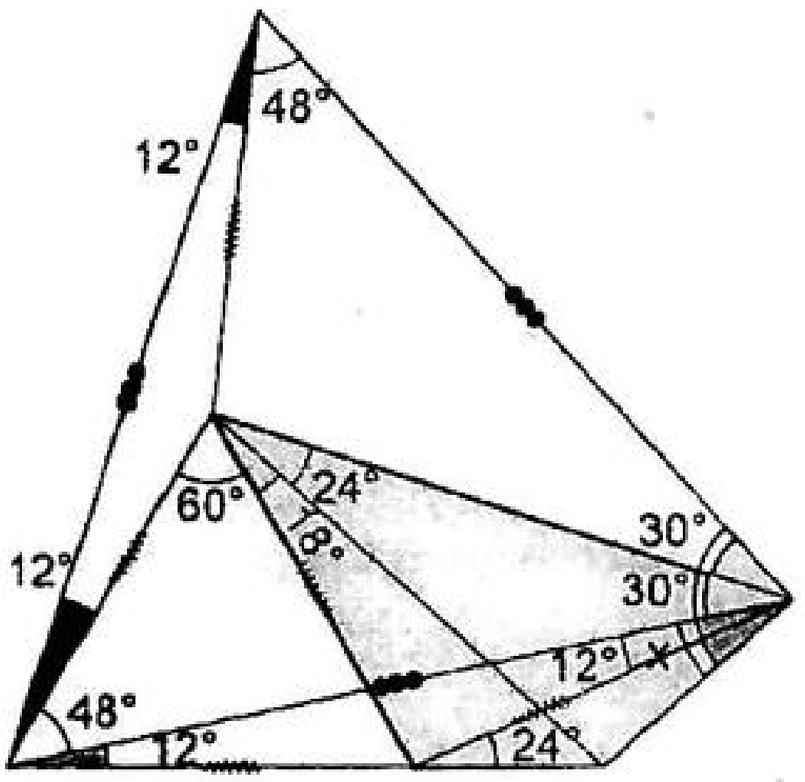


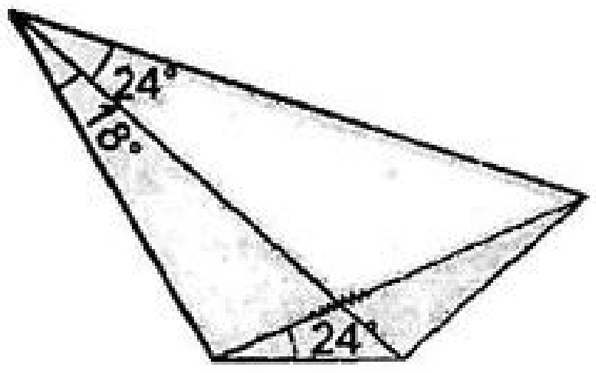
Scanned by CamScanner

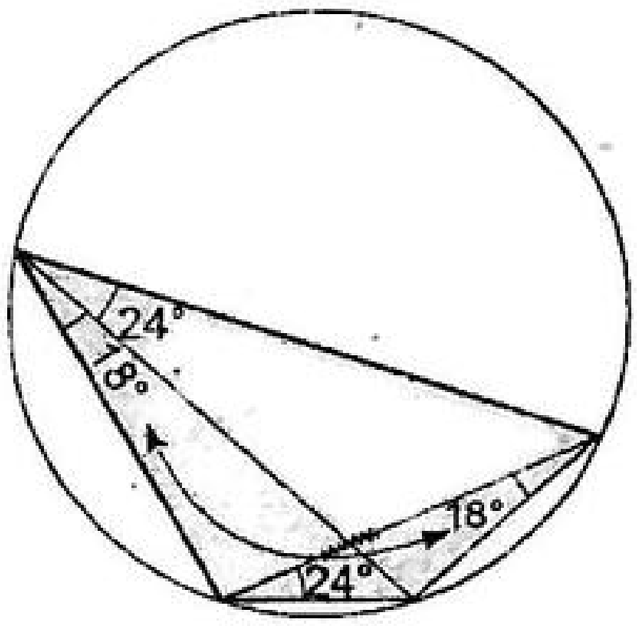
También se observa:



Paso N° 6. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

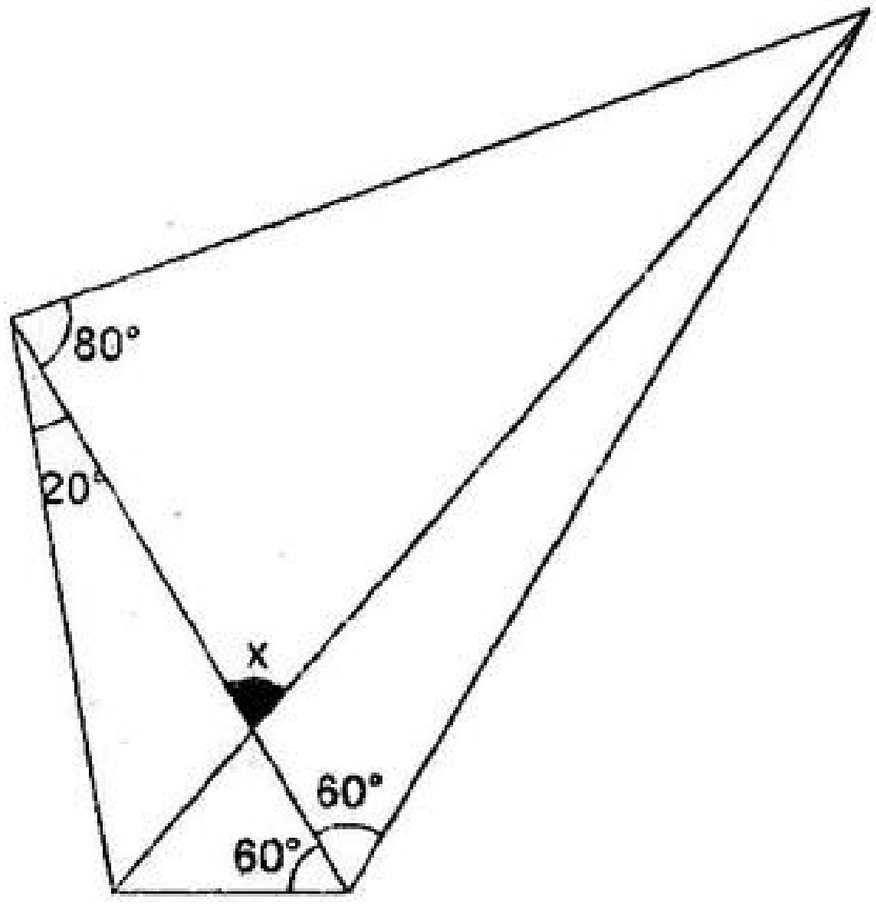






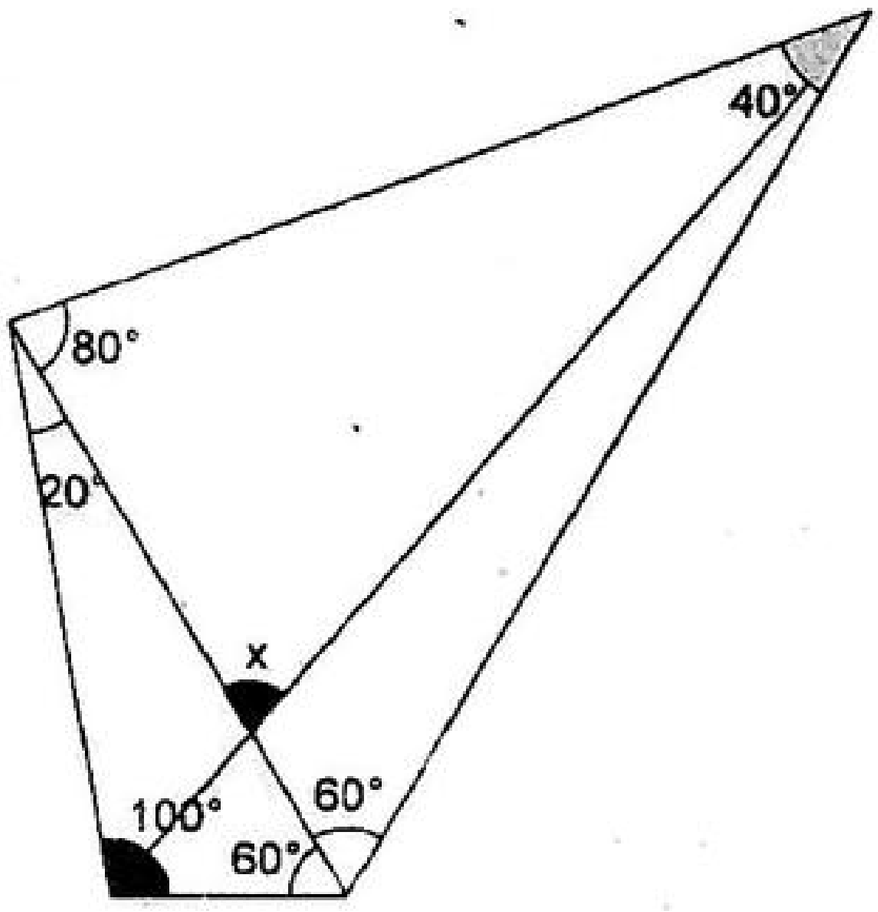
$\therefore$ x = 12° + 18°
x = 30°

Problema 24. Calcular x.



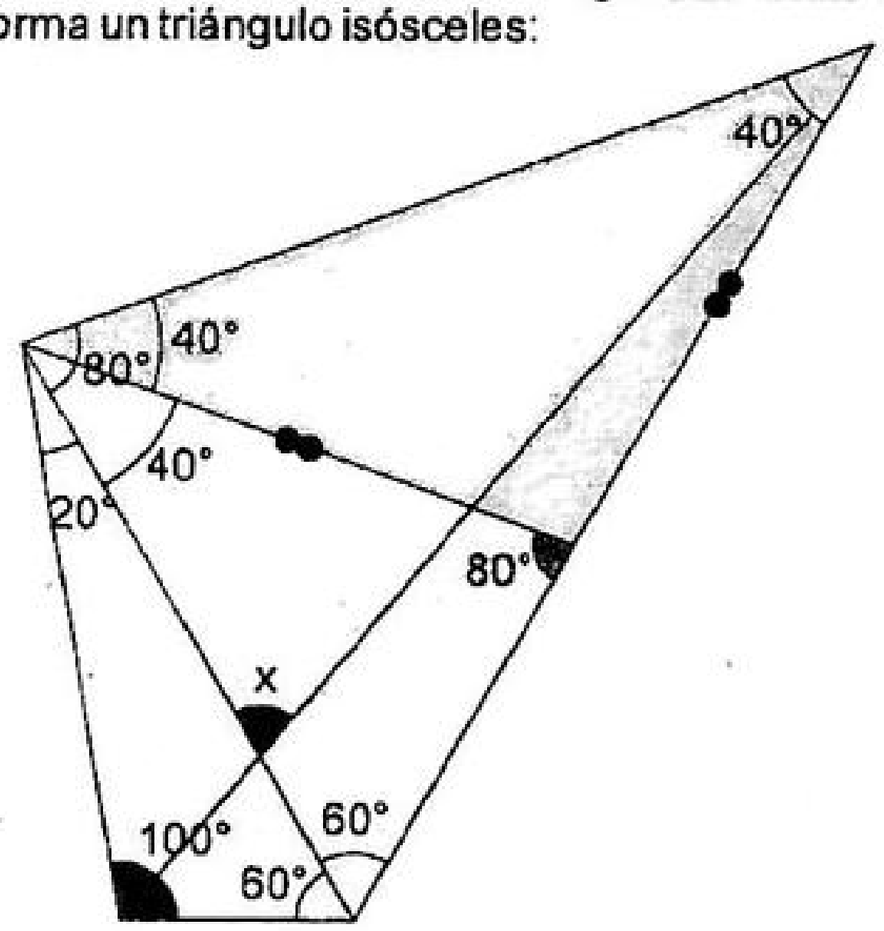
Resolución:

Paso N° 1. Completando los ángulos internos:

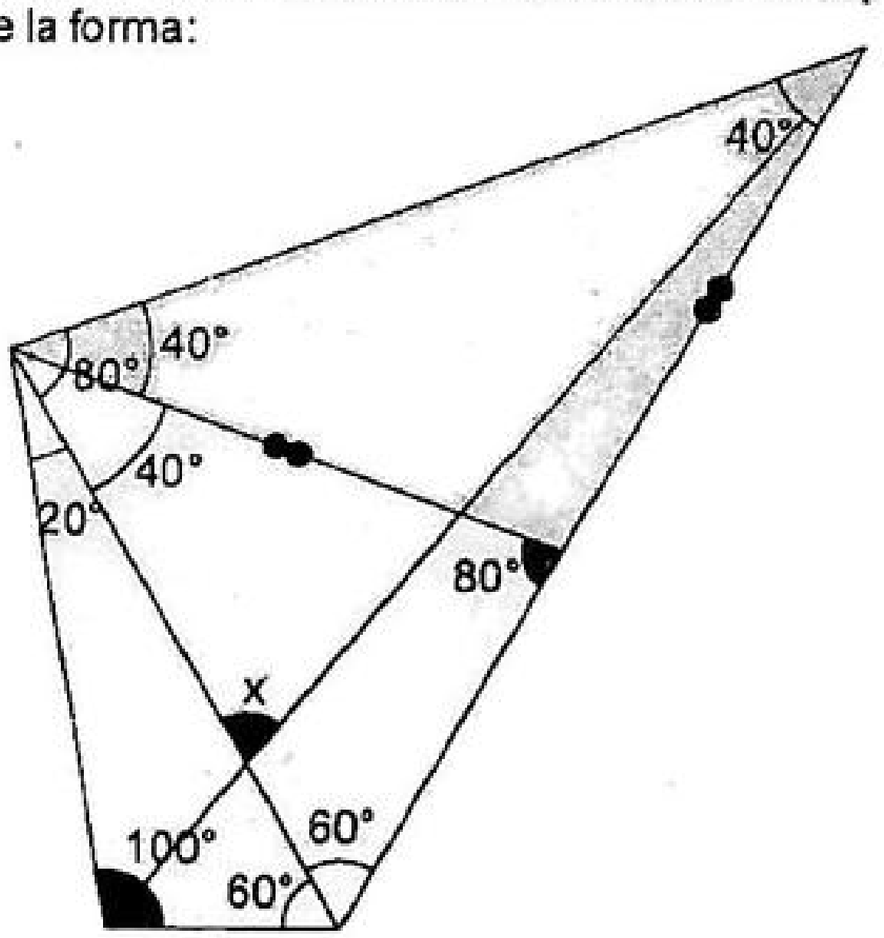


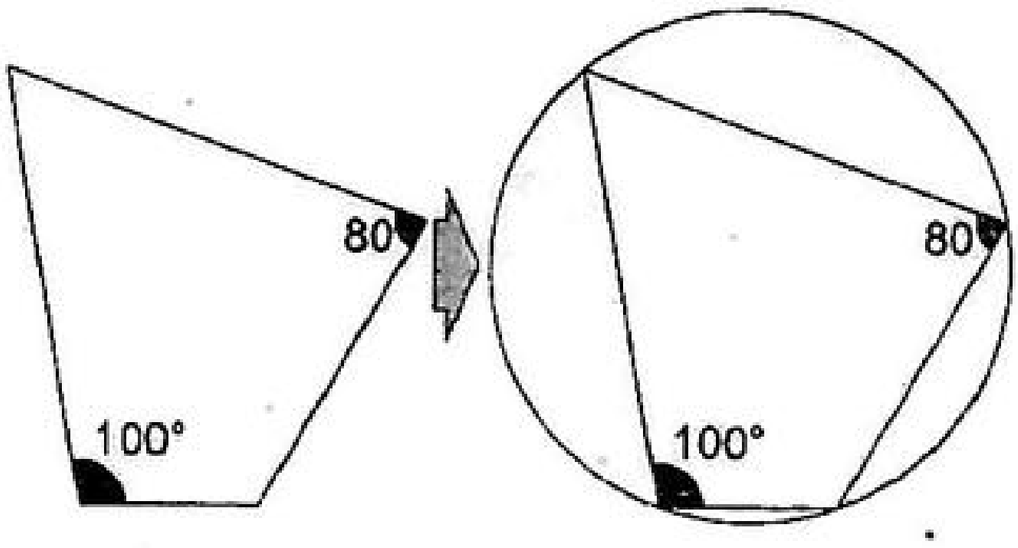
Scanned by CamScanner

Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo para forma un triángulo isósceles:

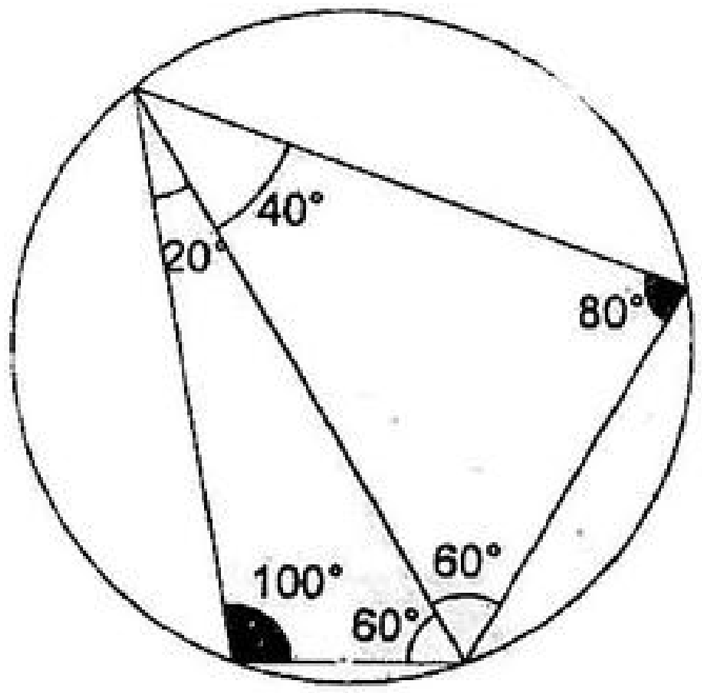


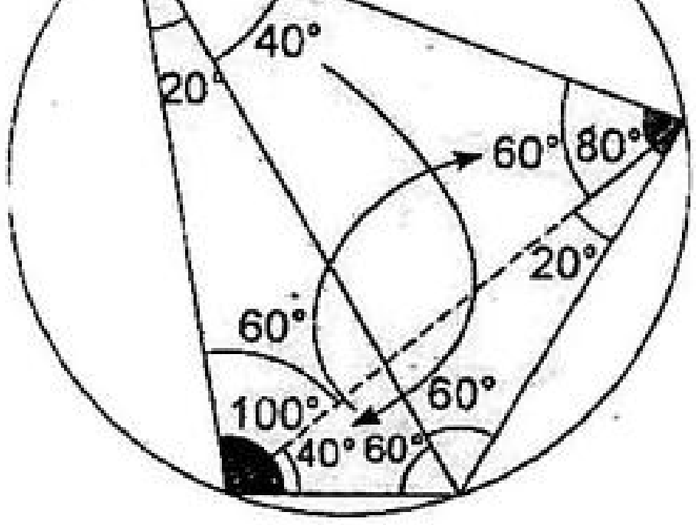
Paso N° 3. Se obtiene un cuadrilátero inscriptible de la forma:

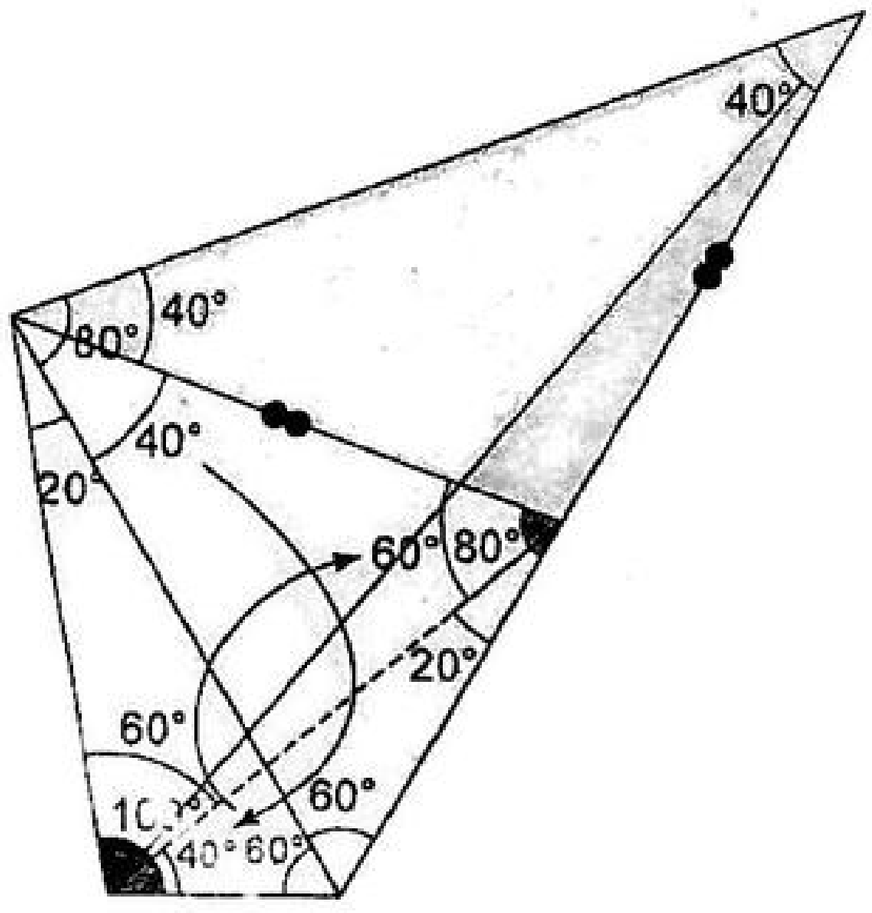




Paso N° 4. En dicho cuadrilátero aplicamos la propiedad del pantalón o rebote:

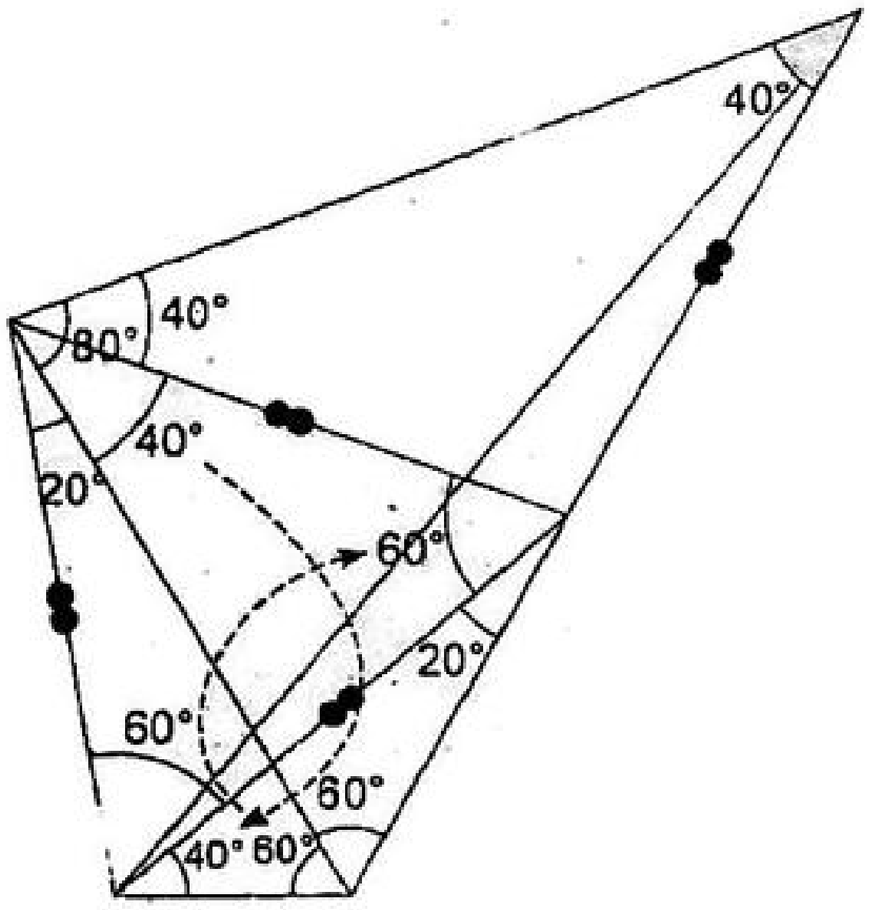




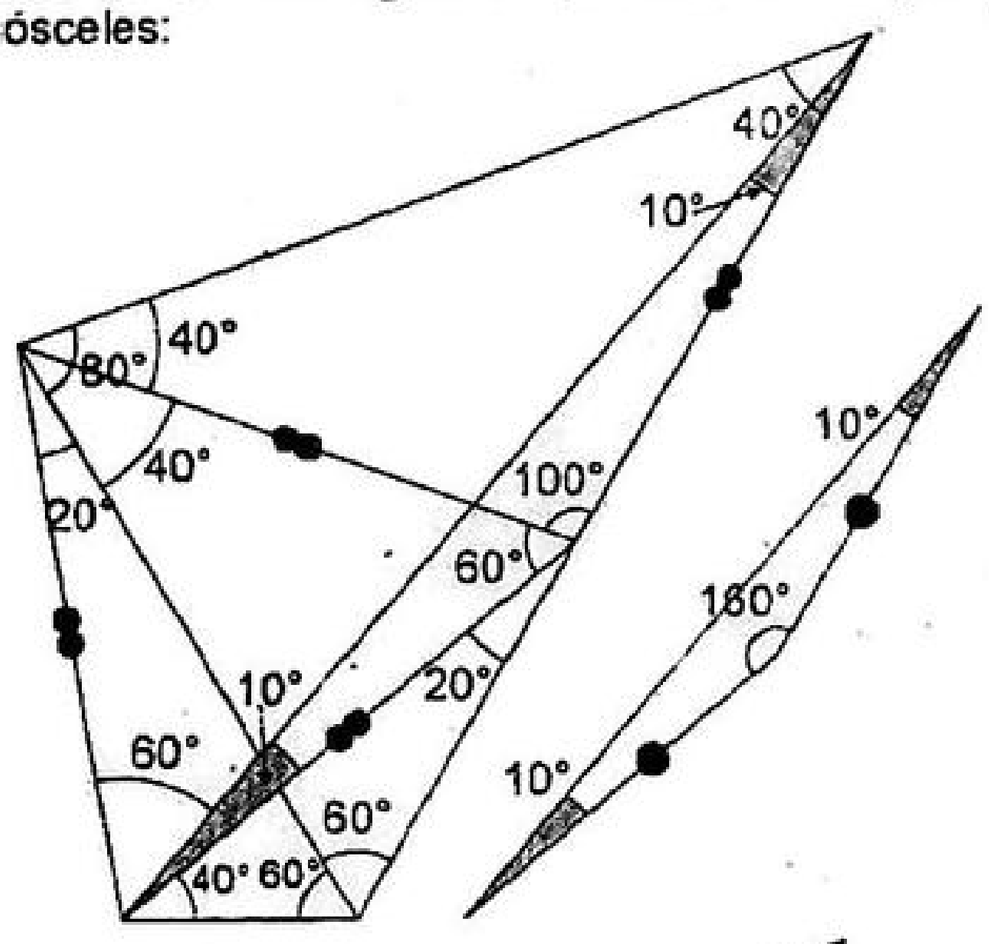


Scanned by CamScanner

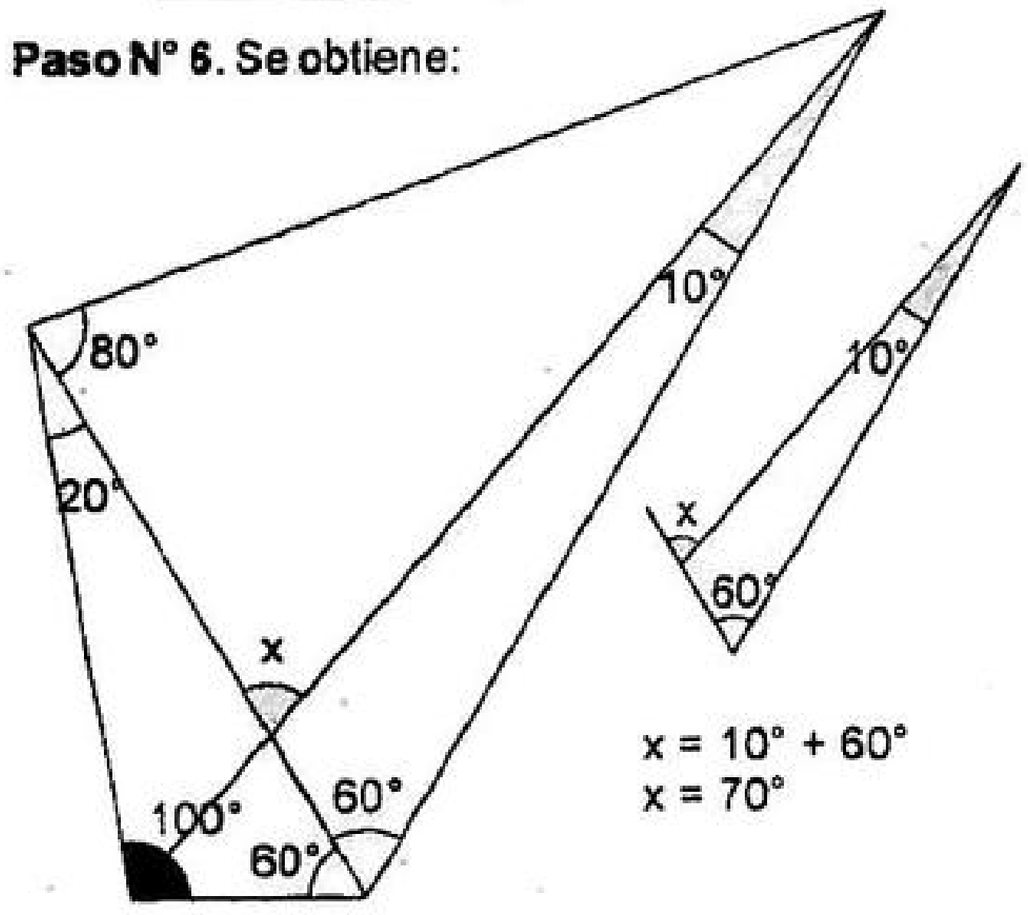
Paso N° 5. Se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 6. En la figura se observa un triángulo isósceles:



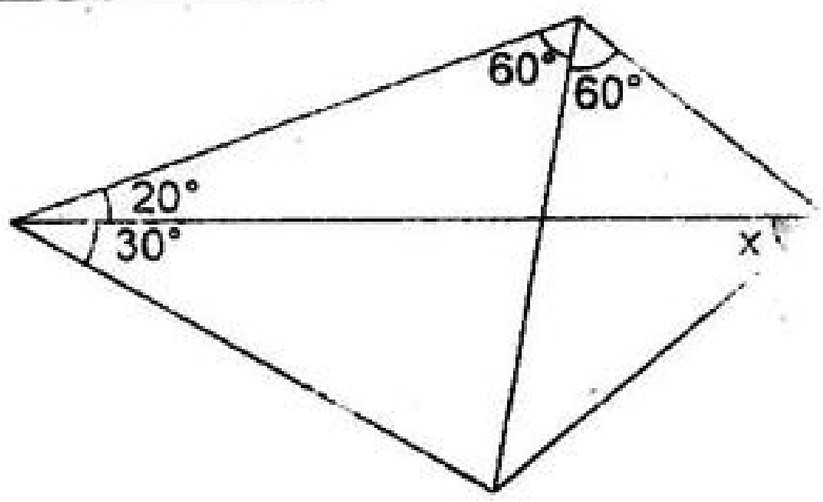
Paso N° 6. Se obtiene:



$x = 10° + 60°$

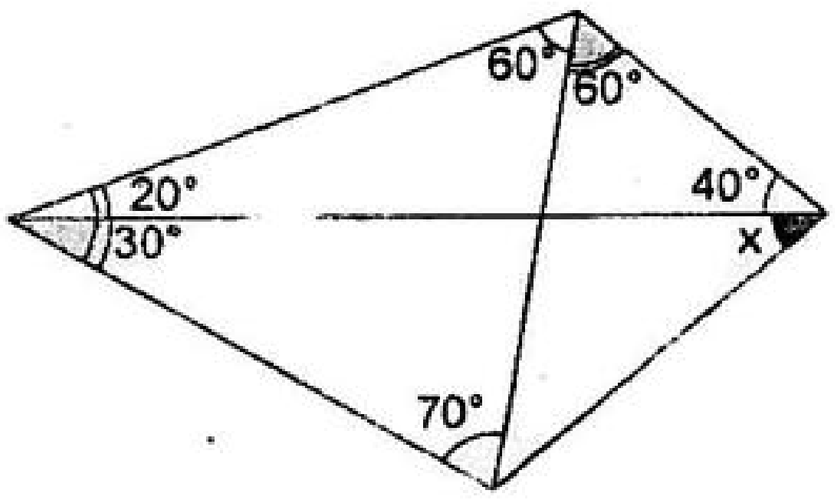
$x = 70°$

Problema 25. Calcular x.

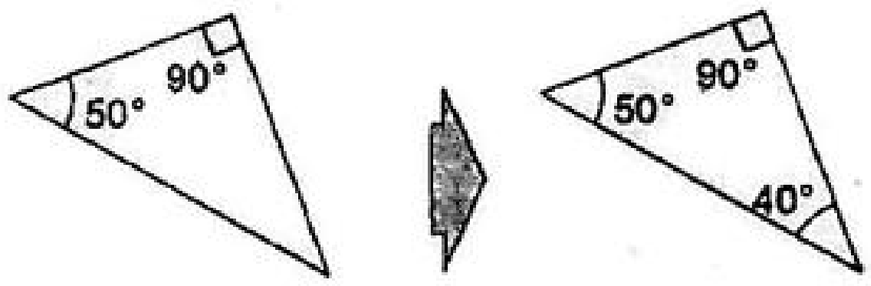


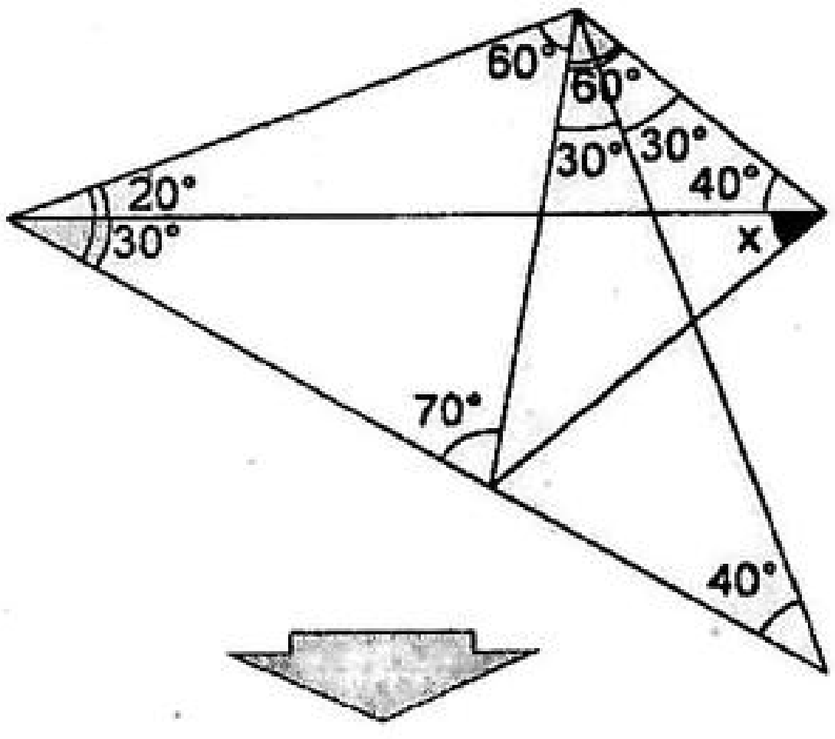
Resolución:

Paso N° 1. Completando los ángulos internos:

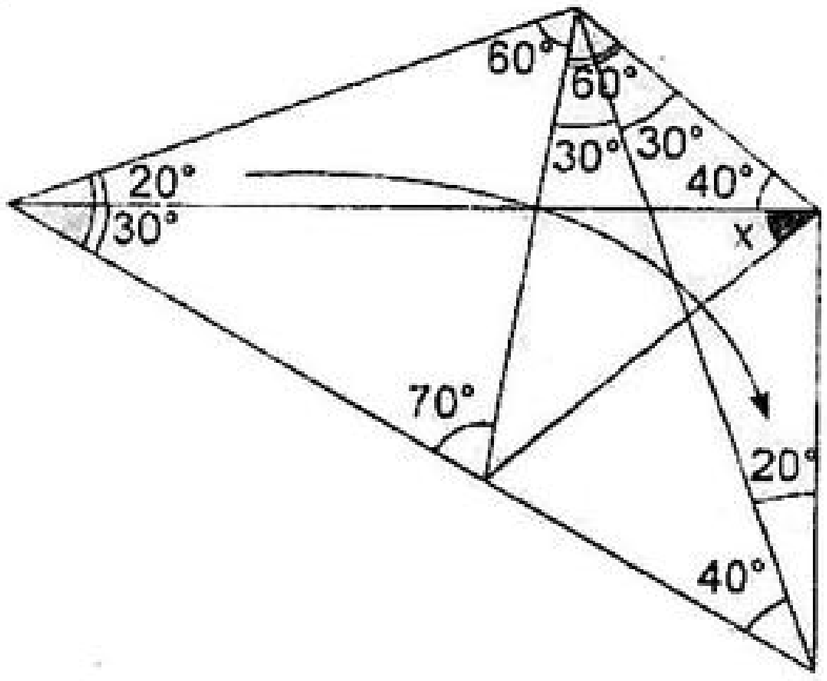


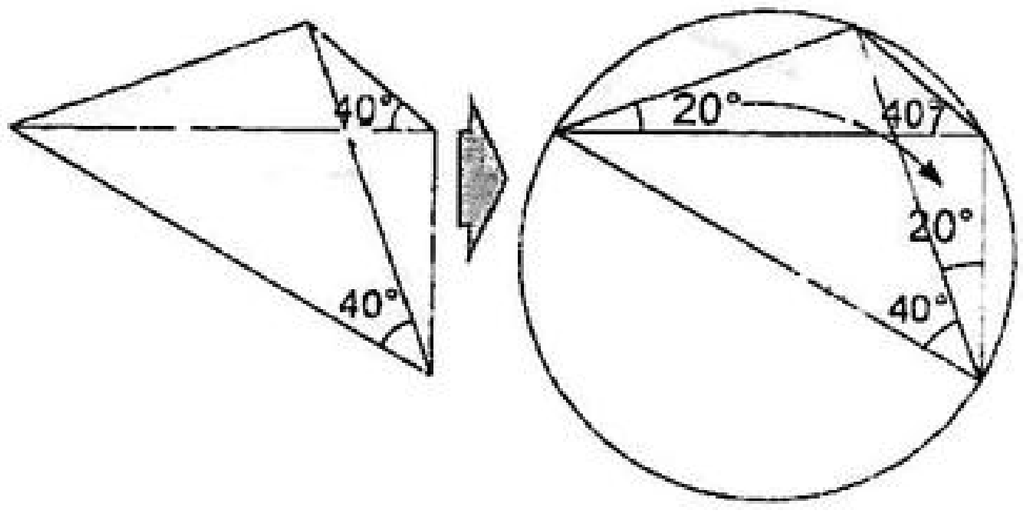
Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo para obtener un cuadrilátero inscriptible:



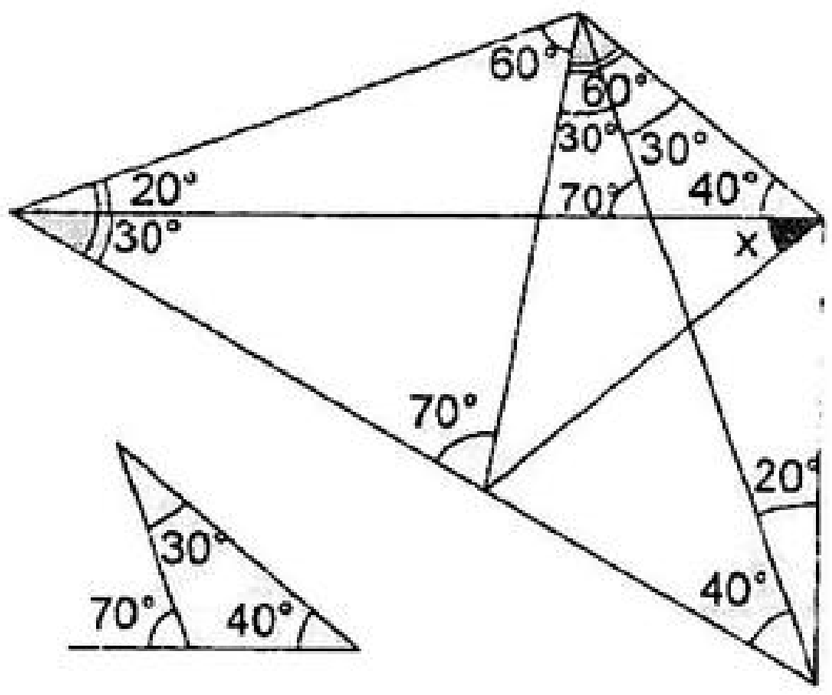


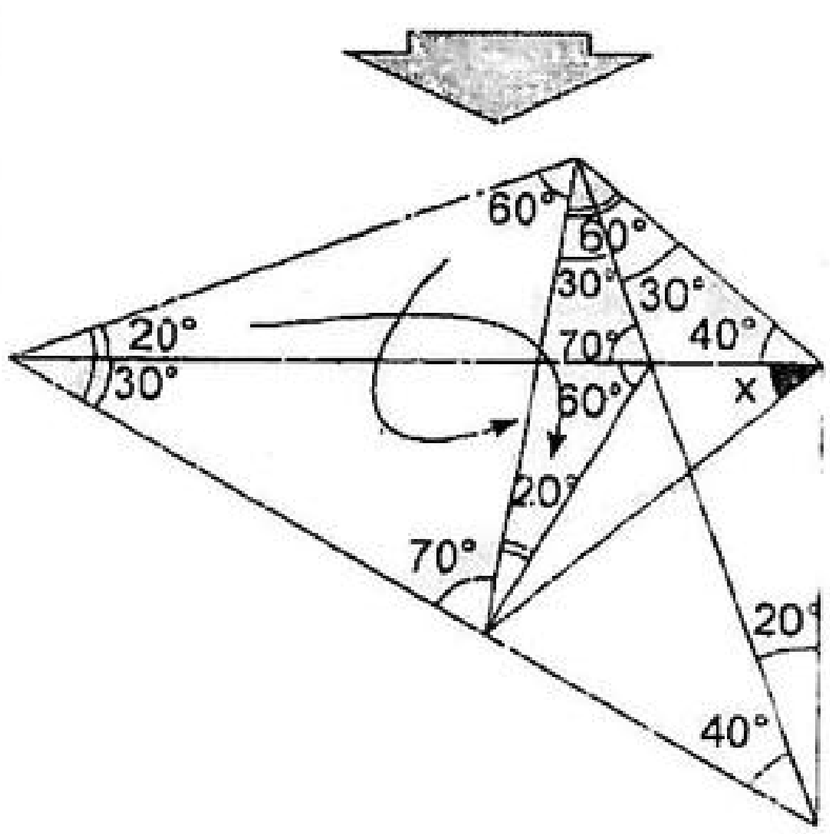
Scanned by CamScanner

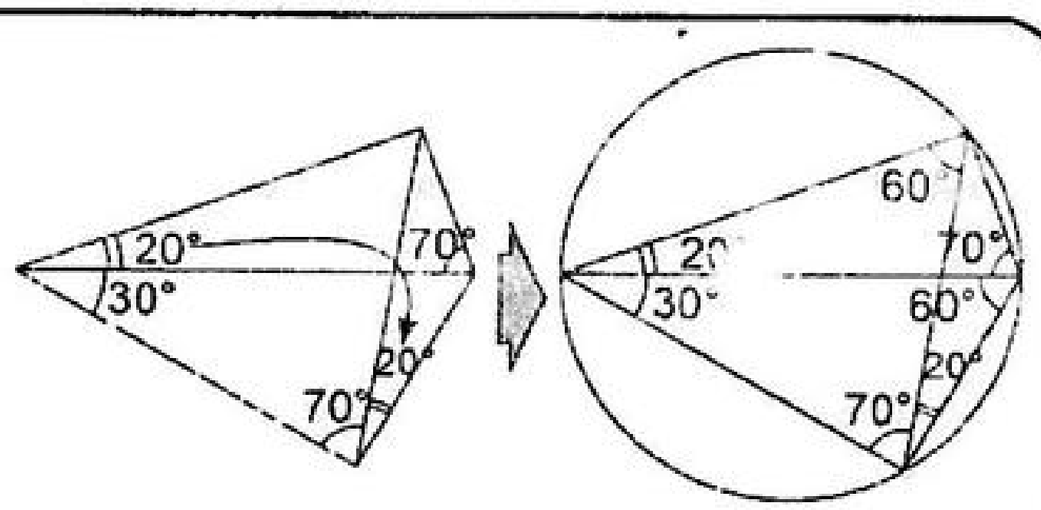




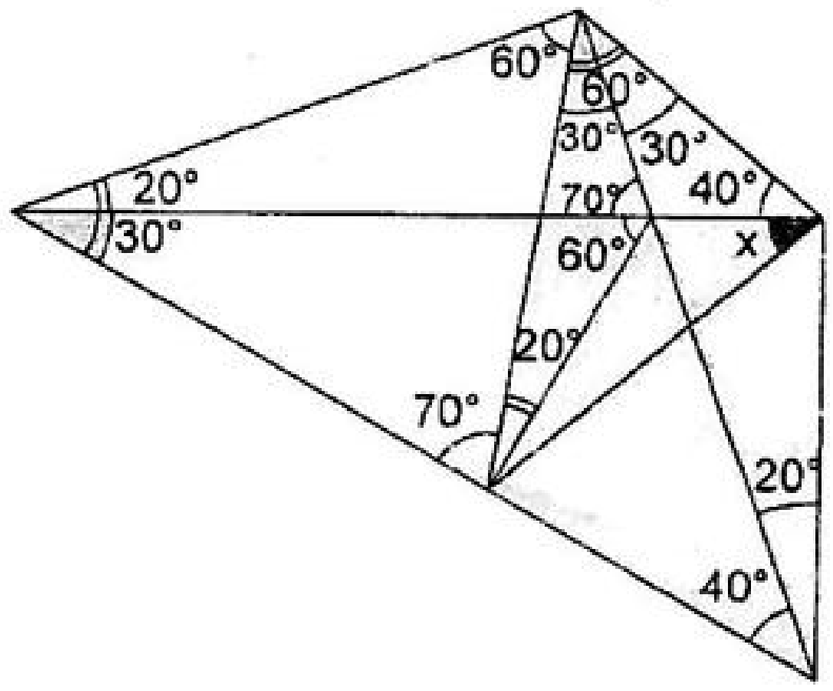
Paso N° 3. Se obtiene un nuevo cuadrilátero inscriptible de la siguiente manera:

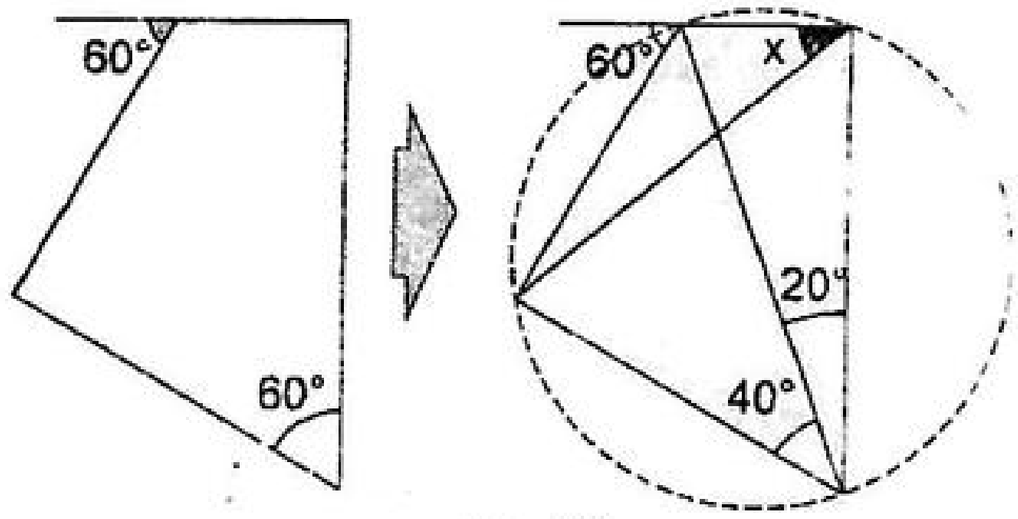






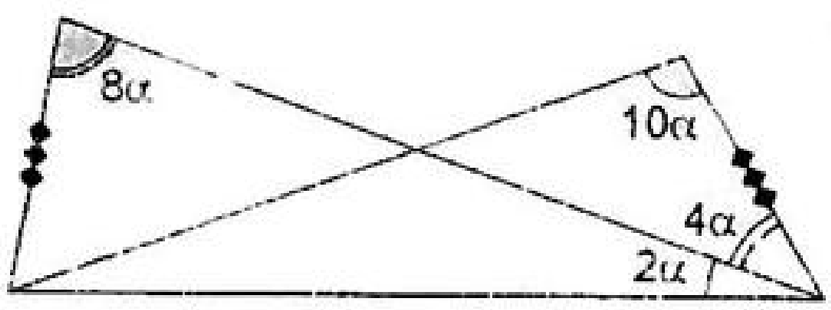
Paso N° 4. Ahora se obtiene:





$\therefore x = 40°$

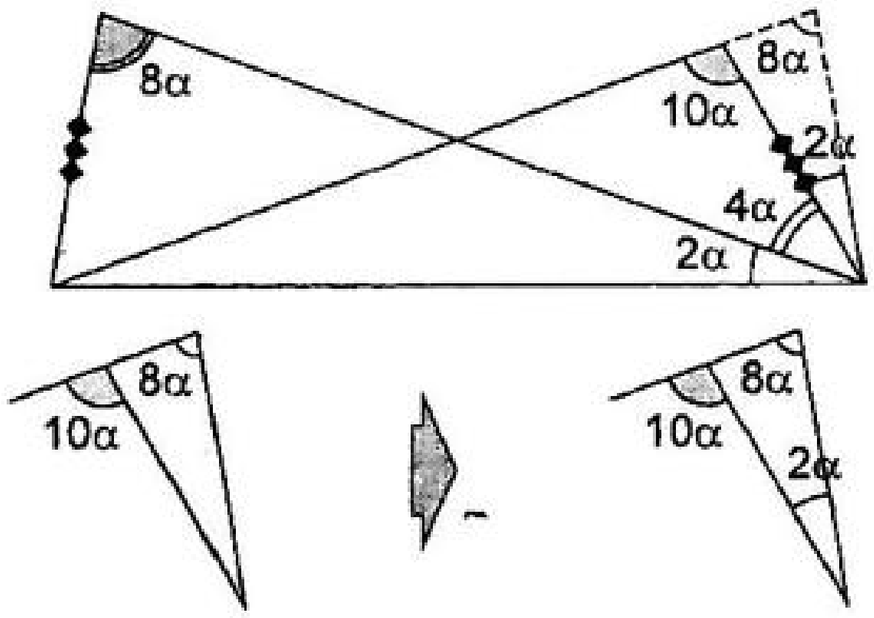
Problema 26. Calcular α.

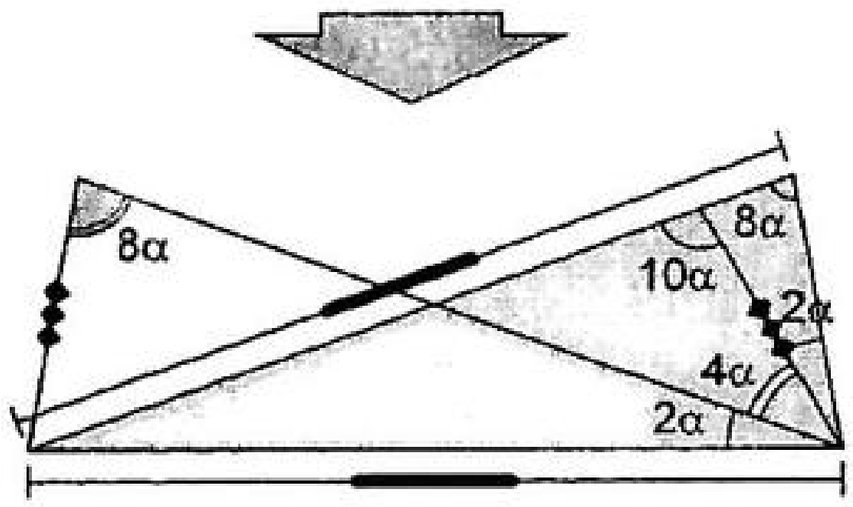


Scanned by CamScanner

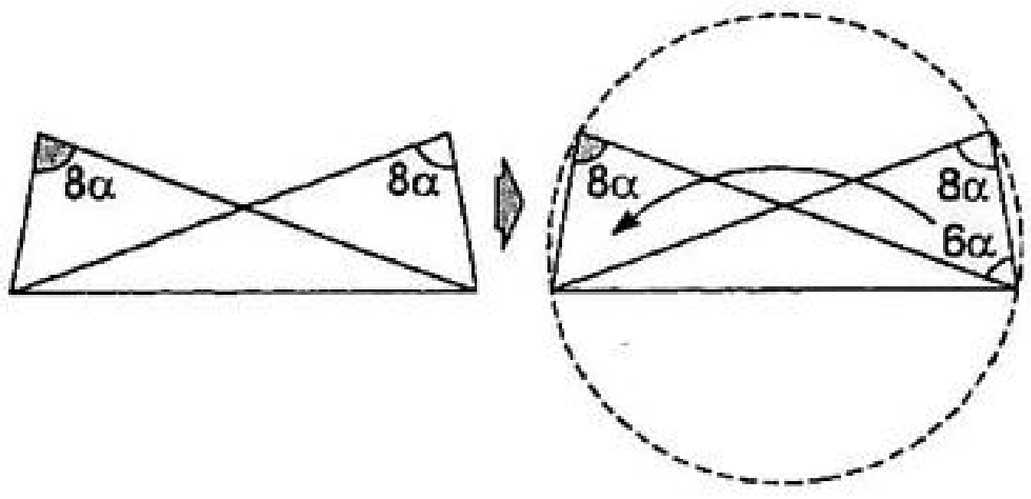
Resolución:

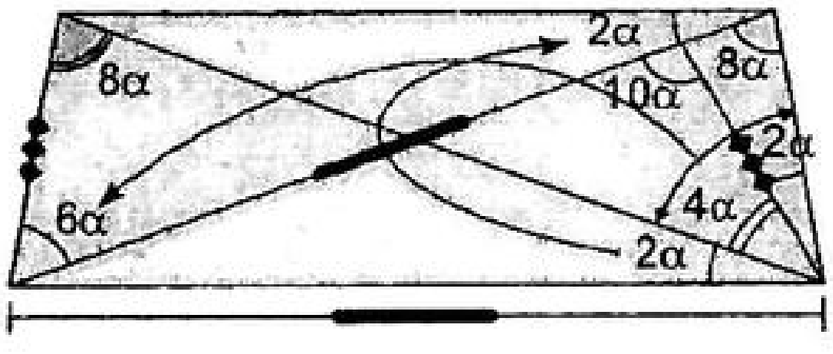
Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo para obtener un triangulo isósceles:



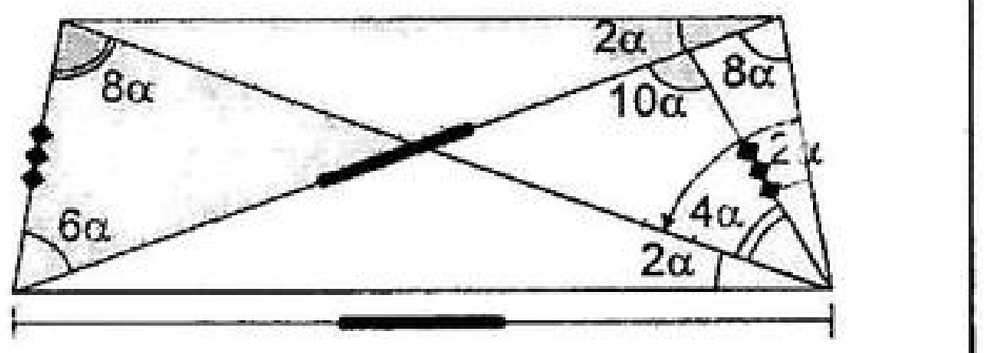


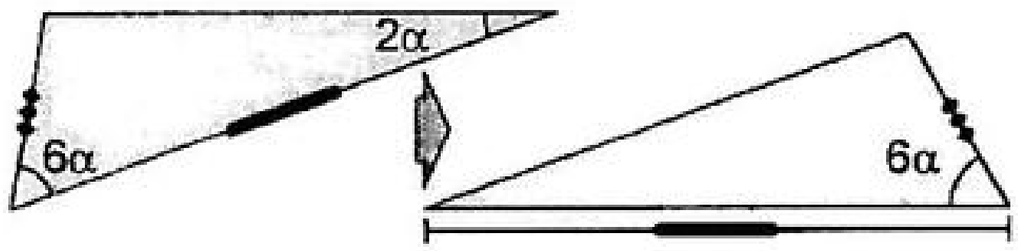
Paso N° 2. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

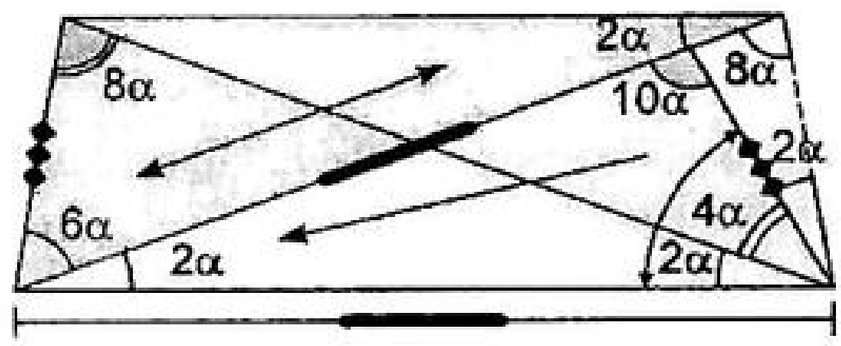




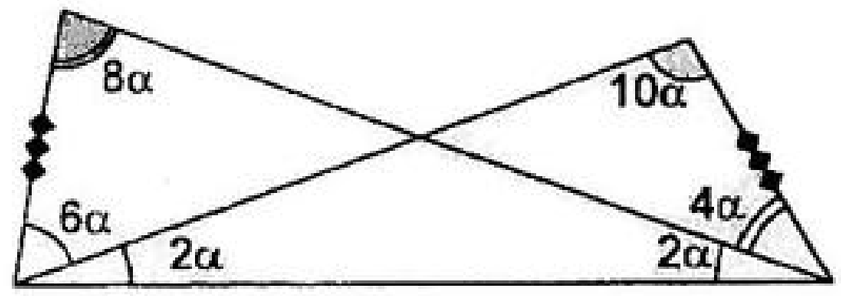
Paso N° 3. Se ibtiene dos triángulos que son congruentes (Caso L.A.L.):







Paso N° 4. Se obtiene:

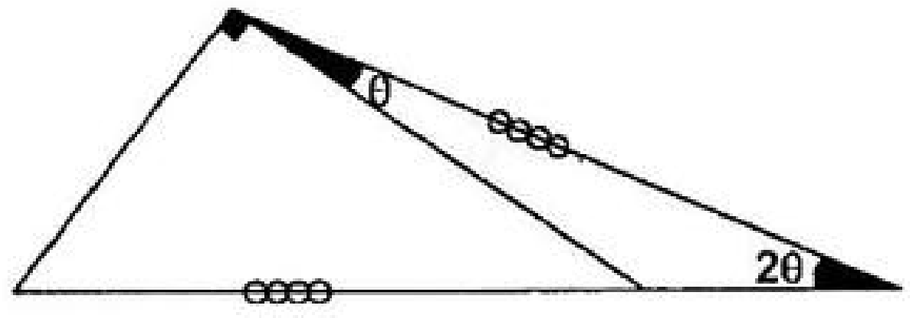


$\therefore 2\alpha + 10\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180°$

$18\alpha = 180°$

$\alpha = 10°$

Problema 27. Calcular x.



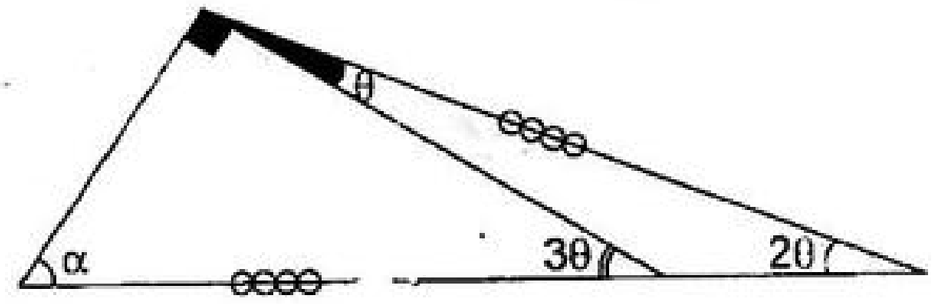
Scanned by CamScanner

Resolución:

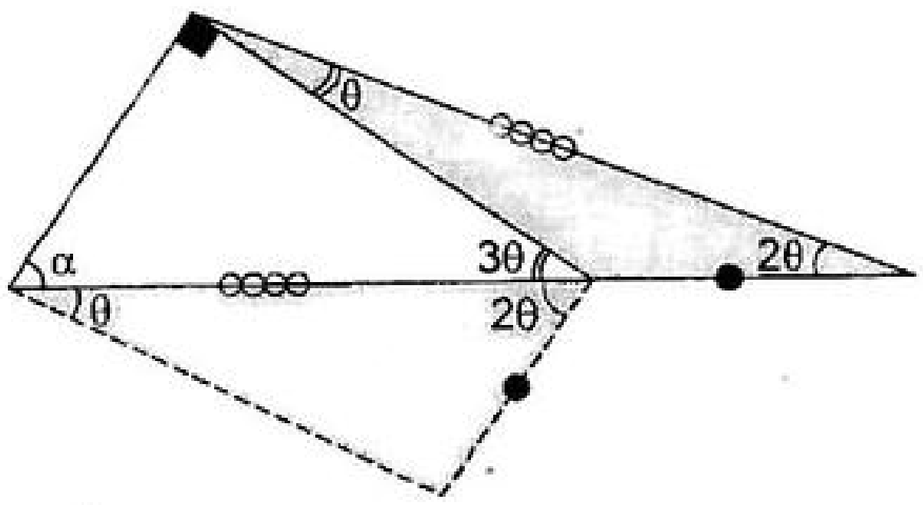
Paso N° 1. Se observa un ángulo de 30°, entonces, formamos externamente un triángulo equilátero:

Tener presente:

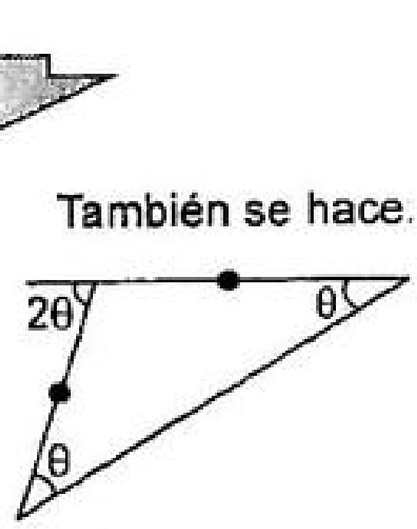
$$\alpha + 3\theta = 90°$$
$$\Rightarrow \quad 2\alpha + 6\theta = 180°$$

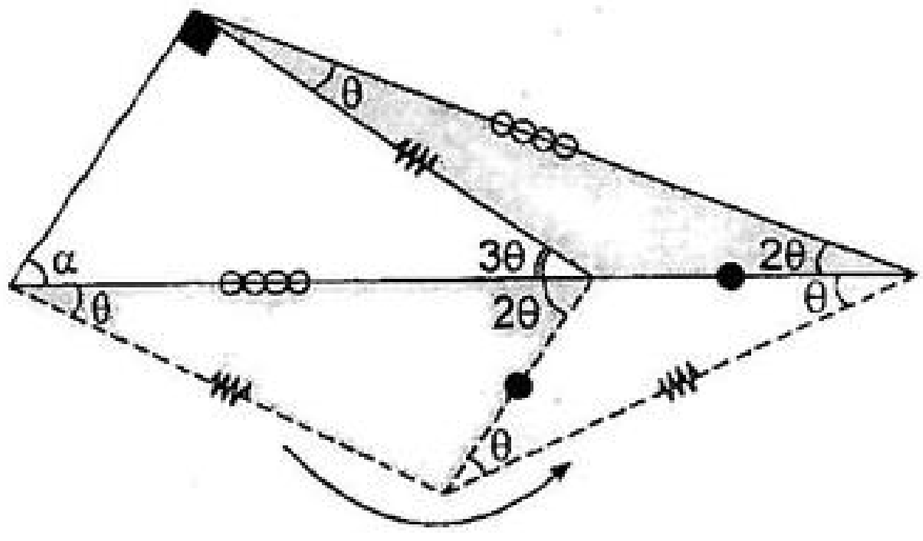


Paso N° 2. Se construye un triángulo congruente externamente asi:

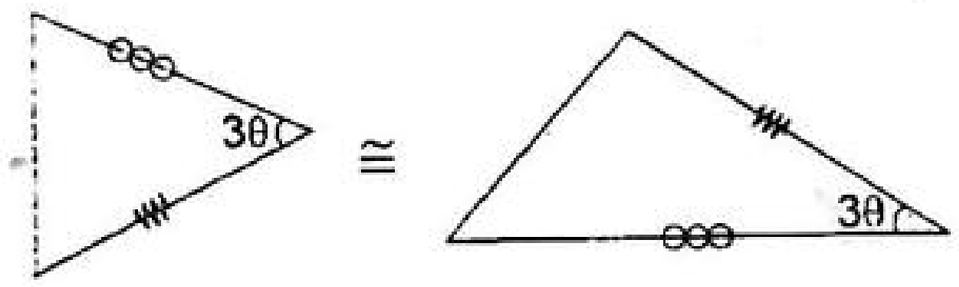


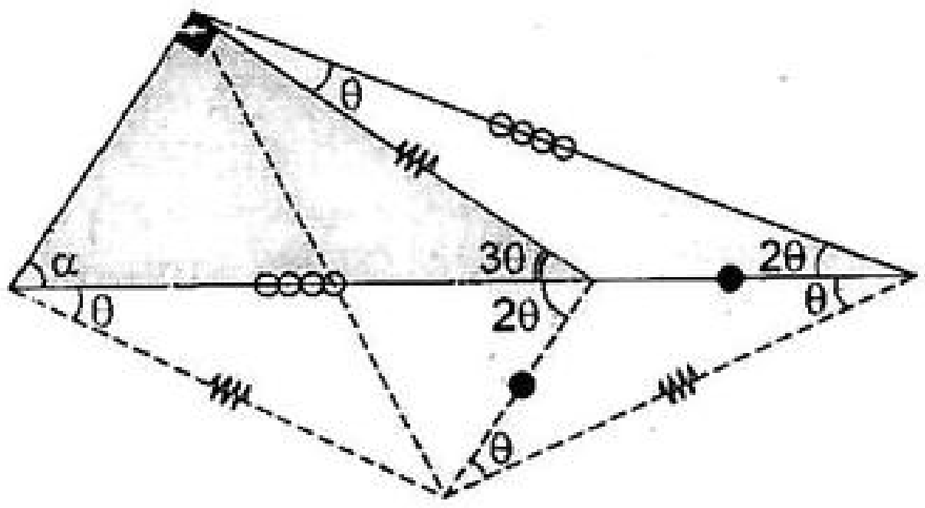
También se hace.

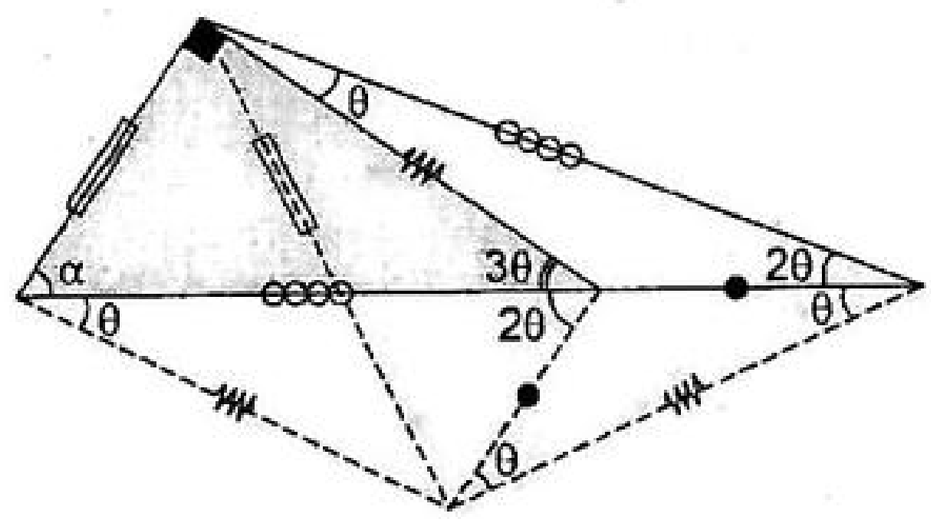


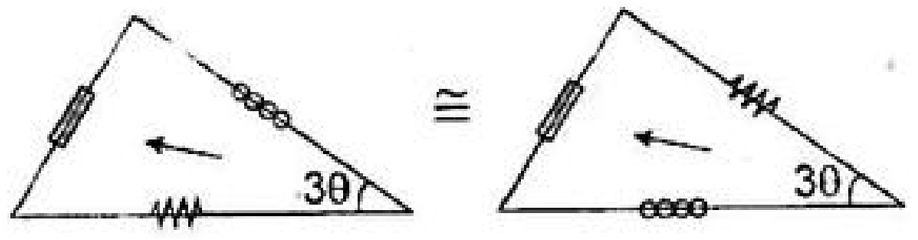


Paso N° 3. Ahora también se observa.que hay 2 triángulos congruentes.



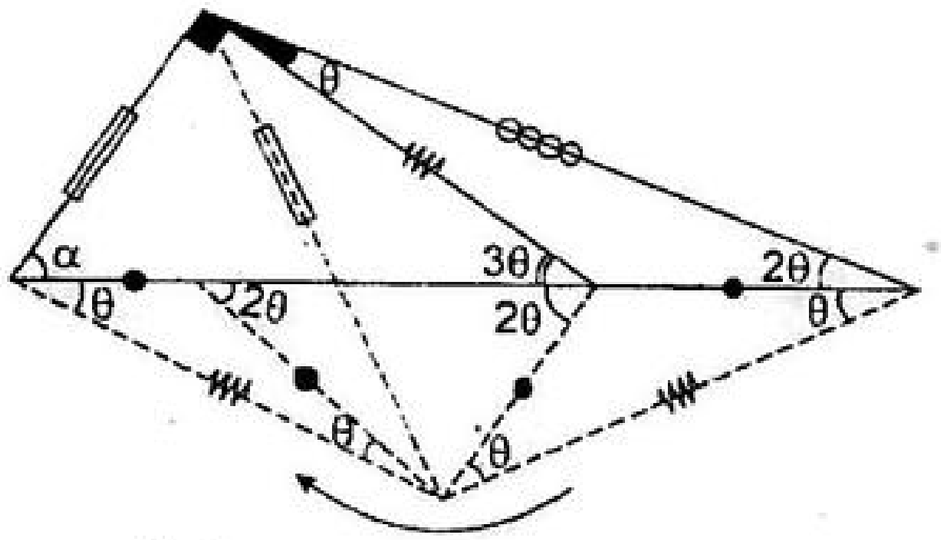






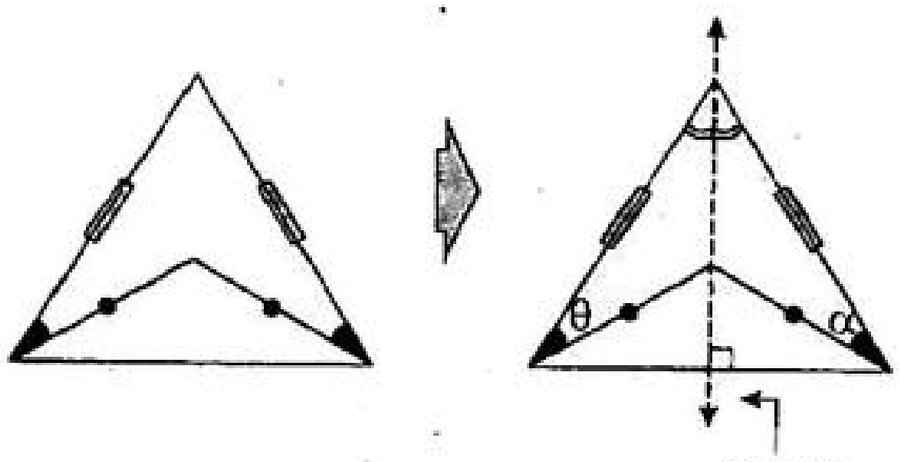
Scanned by CamScanner

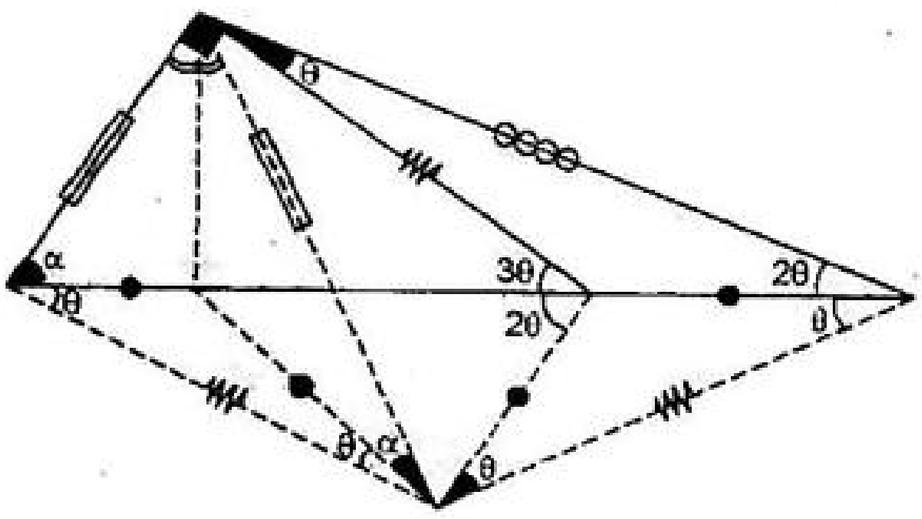
Paso N° 4. Ahora también triángulos isósceles y compuestos, así:



Se construye triángulos compuesto y isósceles

Paso N° 5. La observa un triángulo isósceles que tienen las siguientes características.

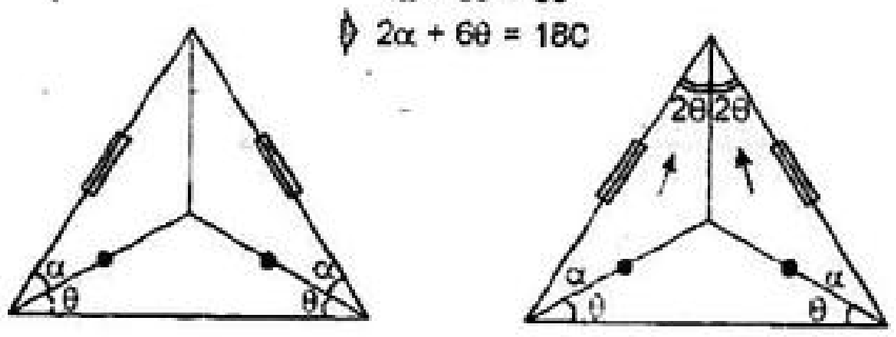




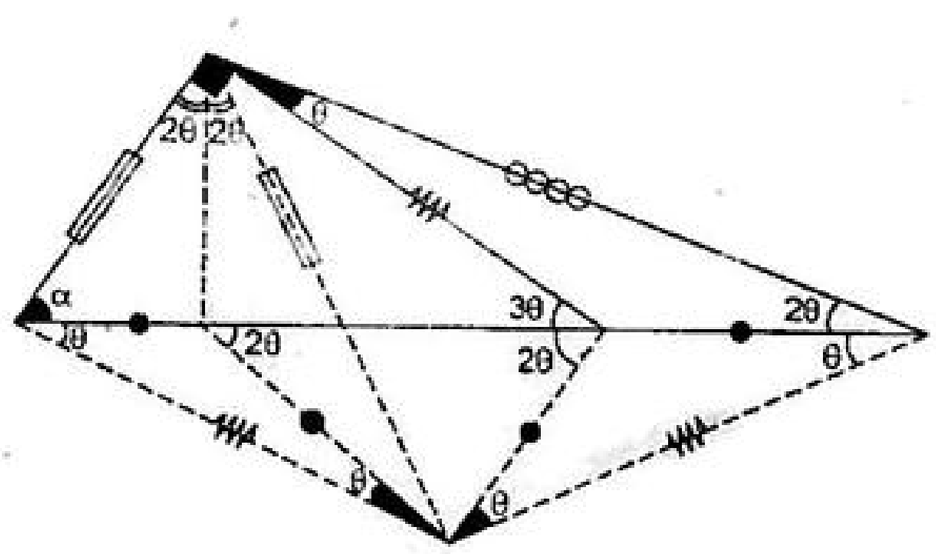
Como

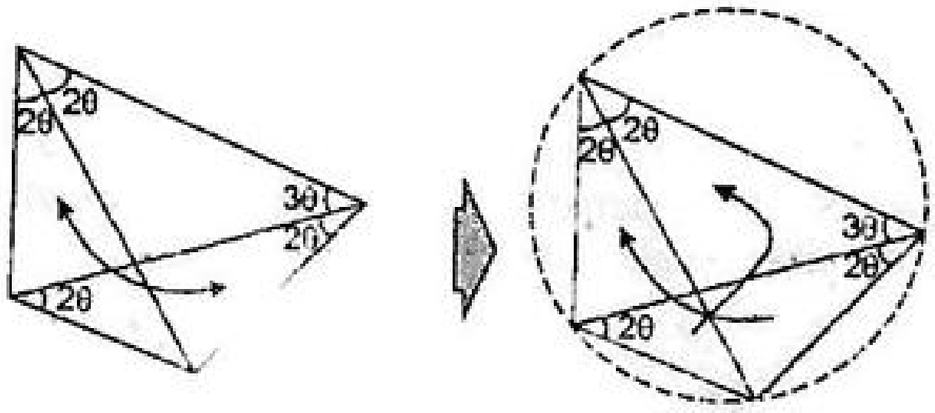
$\alpha + 3\theta = 90$

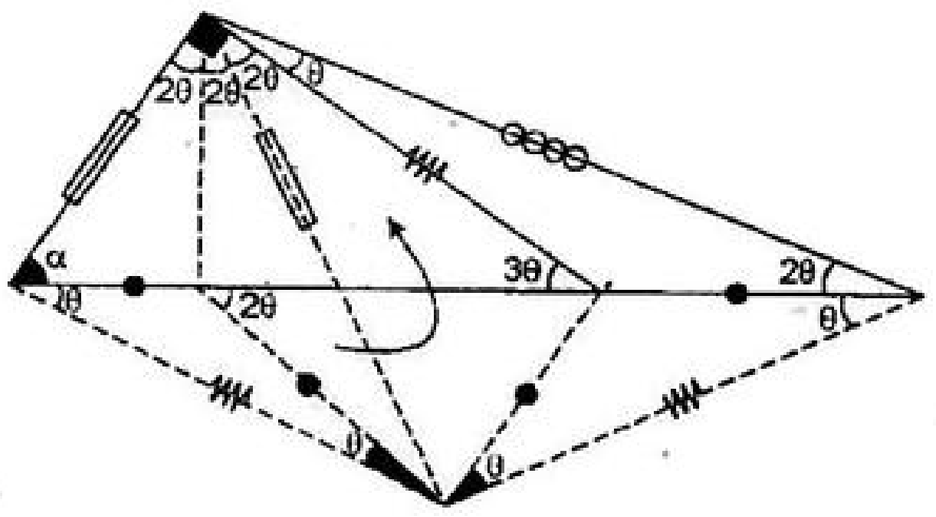
$\Phi\ 2\alpha + 6\theta = 180$



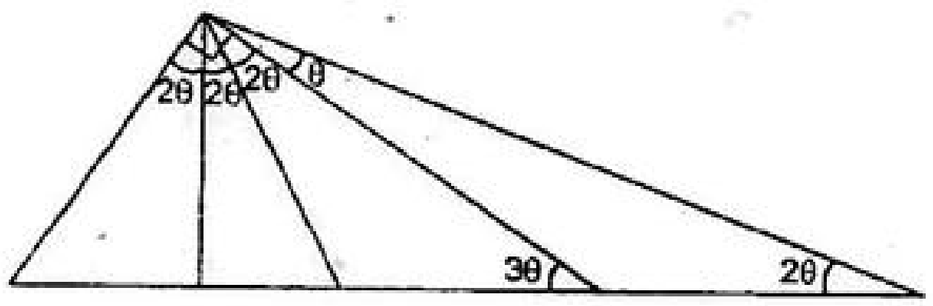
Paso N° 6. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad pantalón.







Aquí se observa:

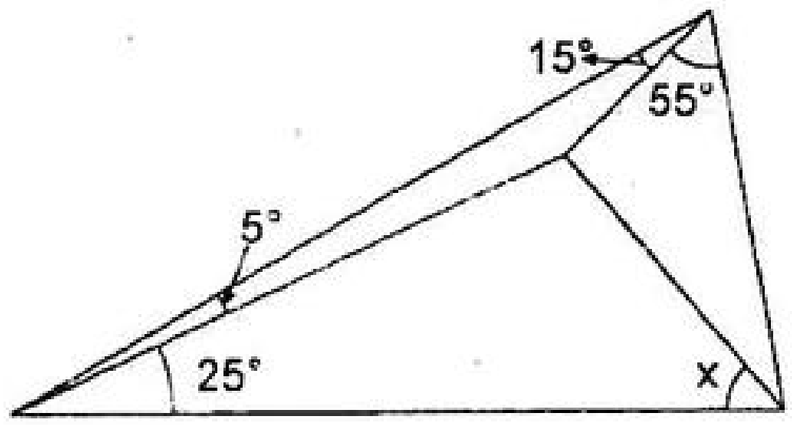


$\Rightarrow\ 6\theta = 90$

$\theta = 15°$

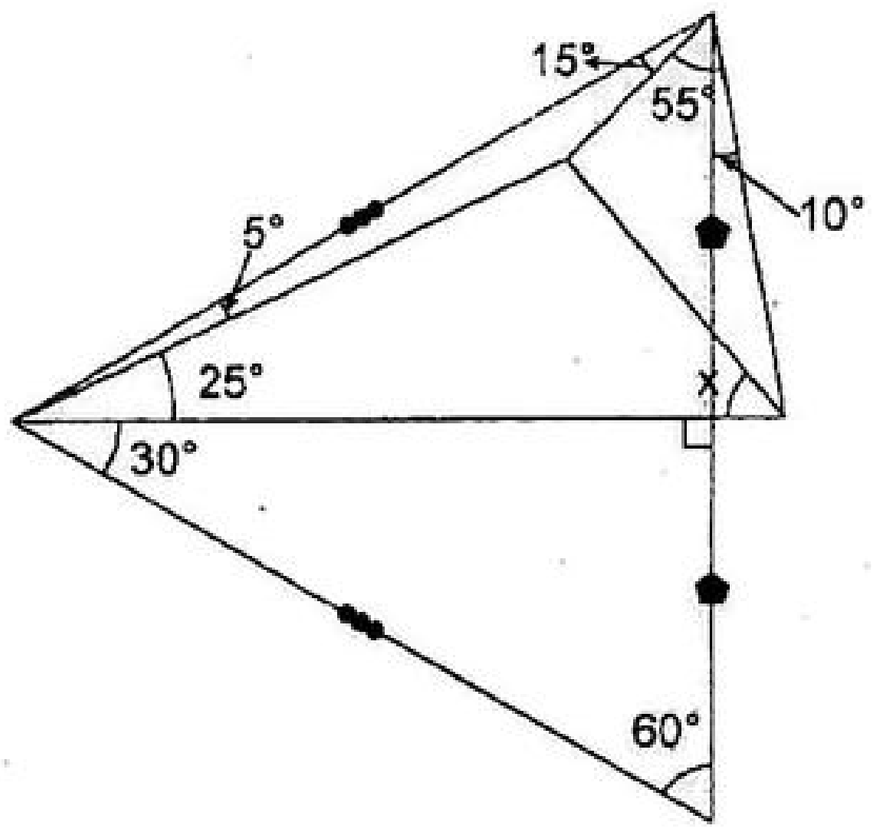
Scanned by CamScanner

Problema 28. Calcular x.

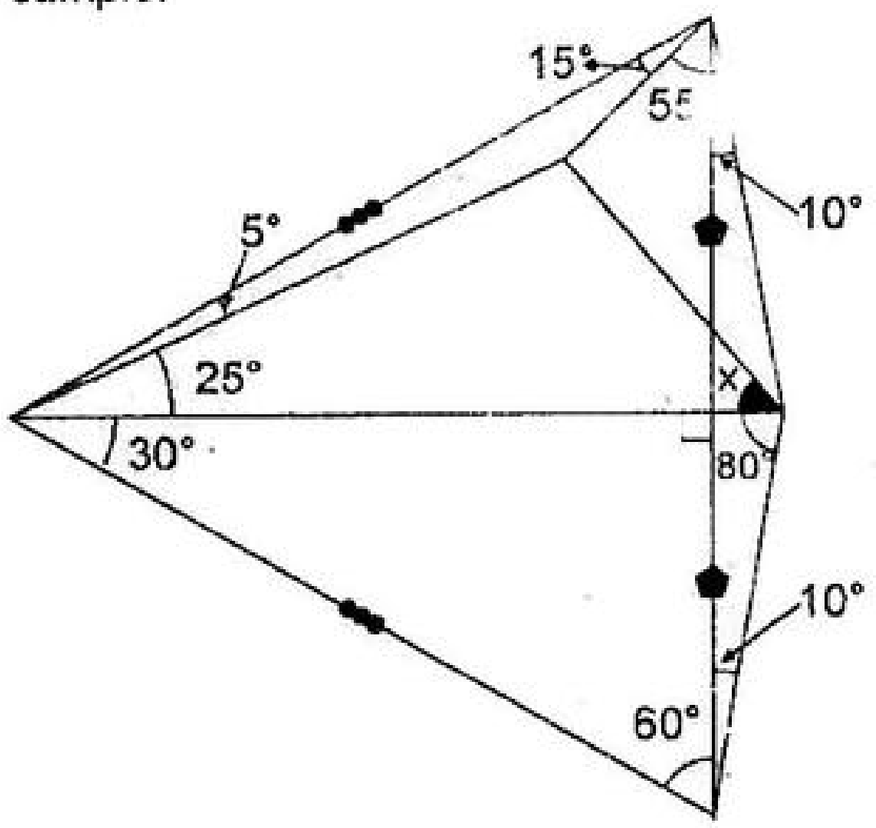


Resolución:

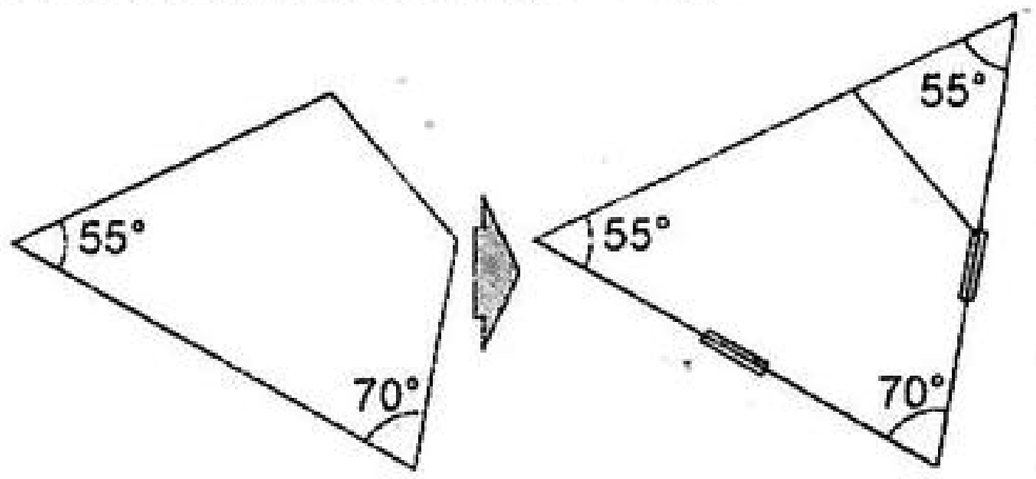
Paso N° 1. Se observa un ángulo de 30° entonces completamos externamente un triángulo equilátero:

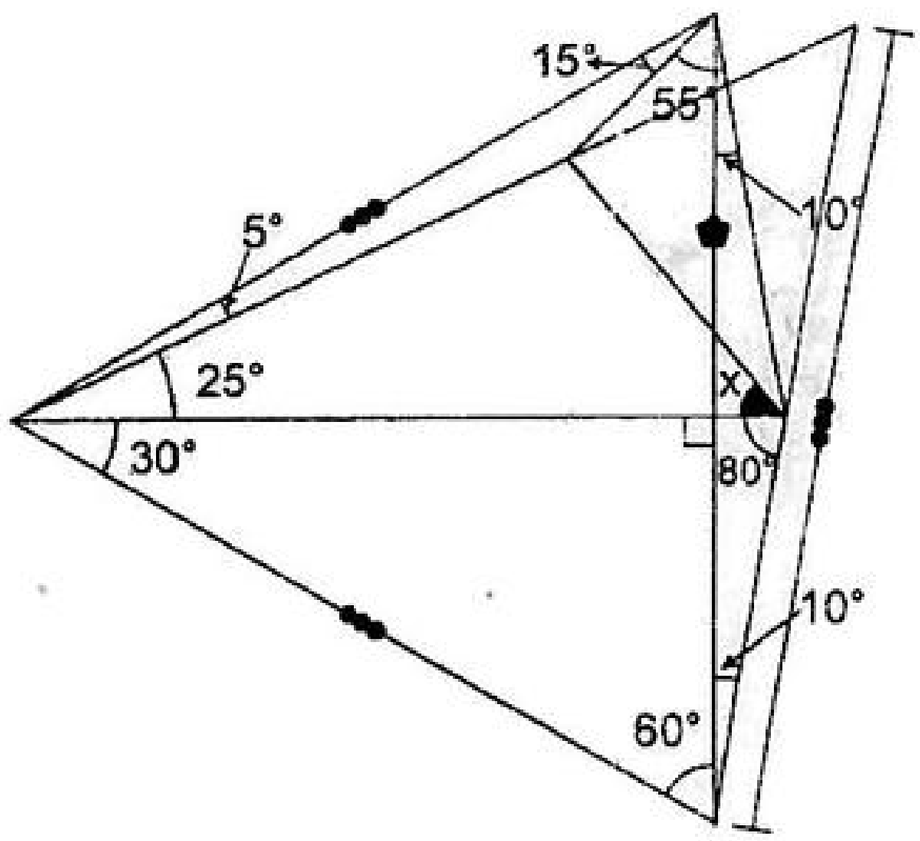


Paso N° 2. Se tiene una recta mediatriz donde se cumple:

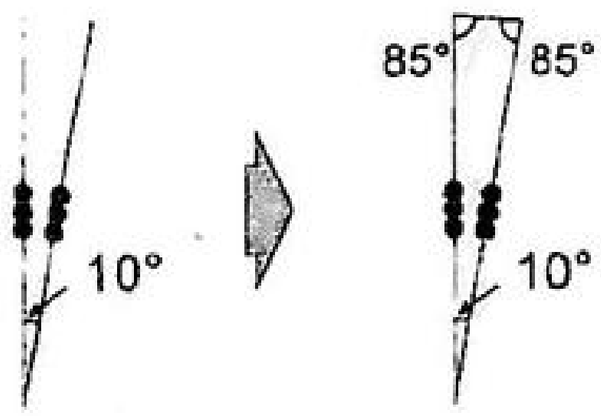


Paso N° 3. Tenemos la siguiente figura:

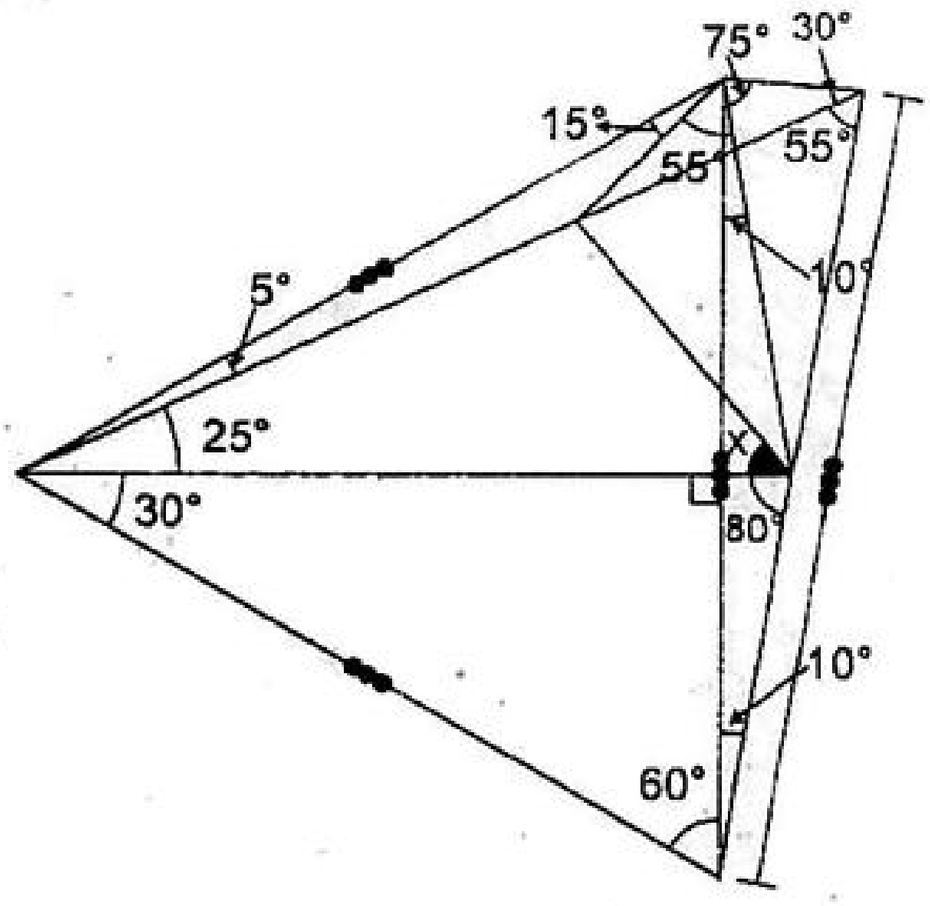




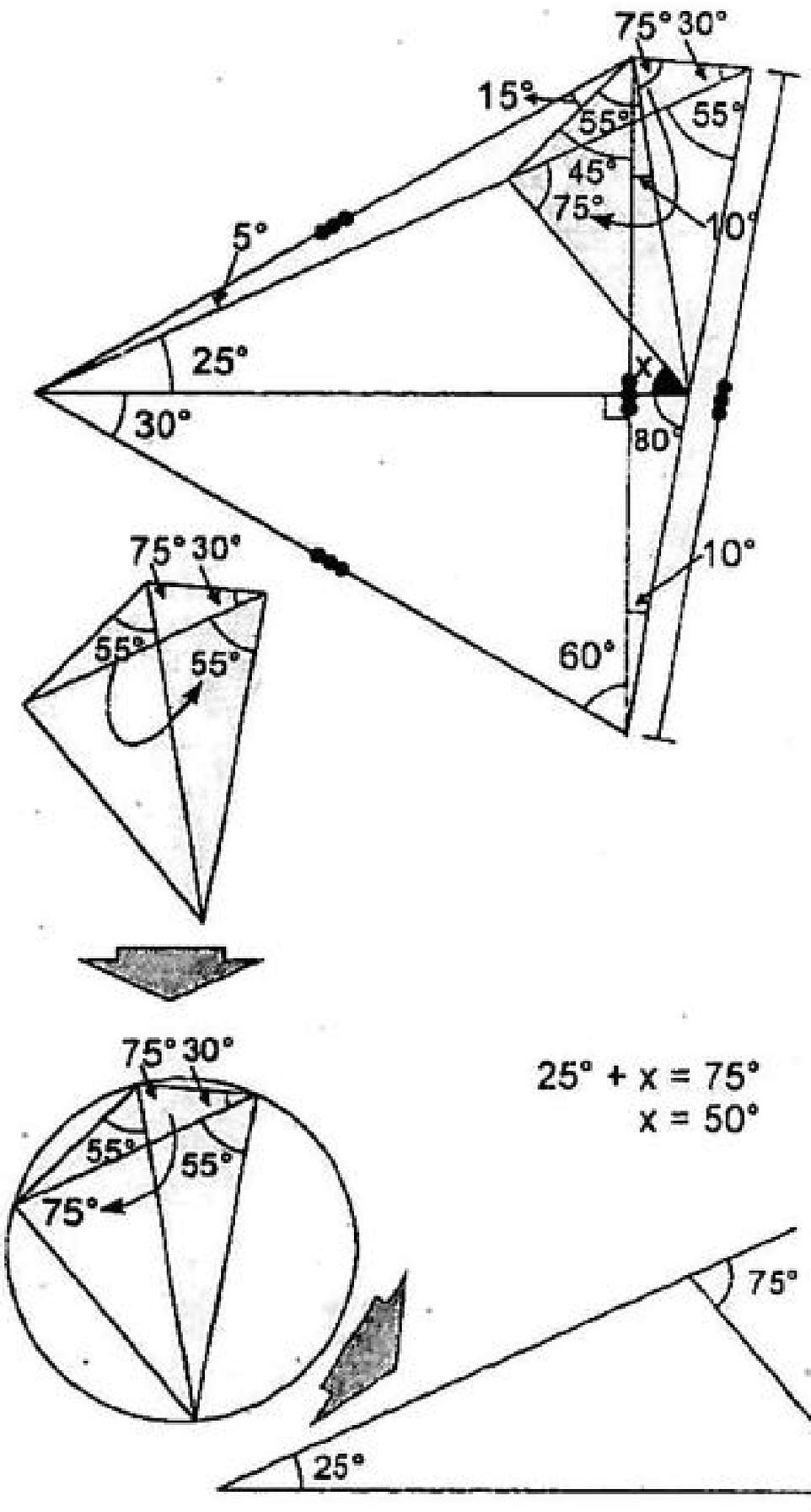
Paso N° 4. Se obtiene un nuevo triángulo isósceles:



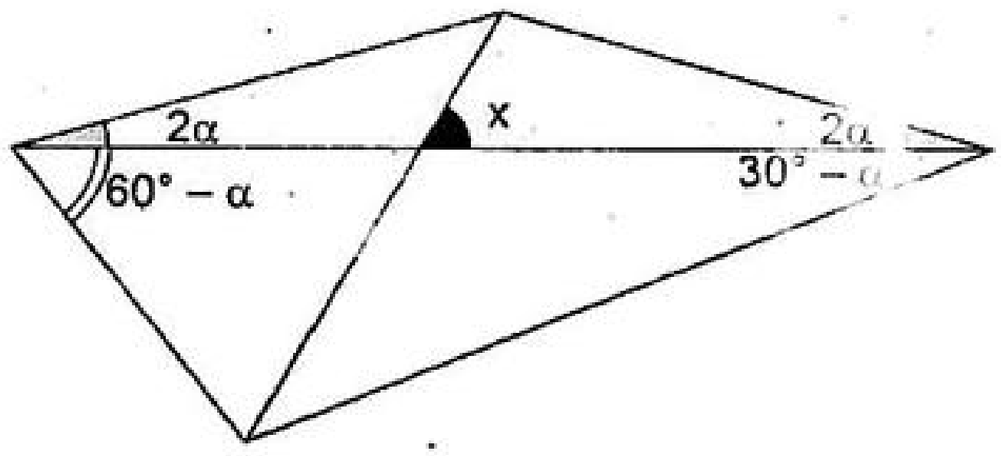
Scanned by CamScanner



Paso N° 5. Ahora se tiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

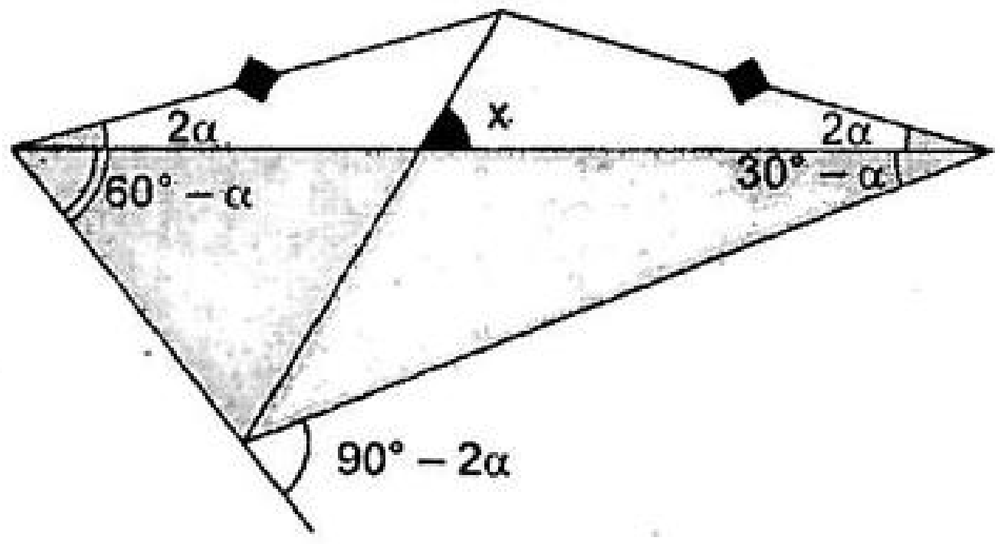


Problema 29. Calcular x.

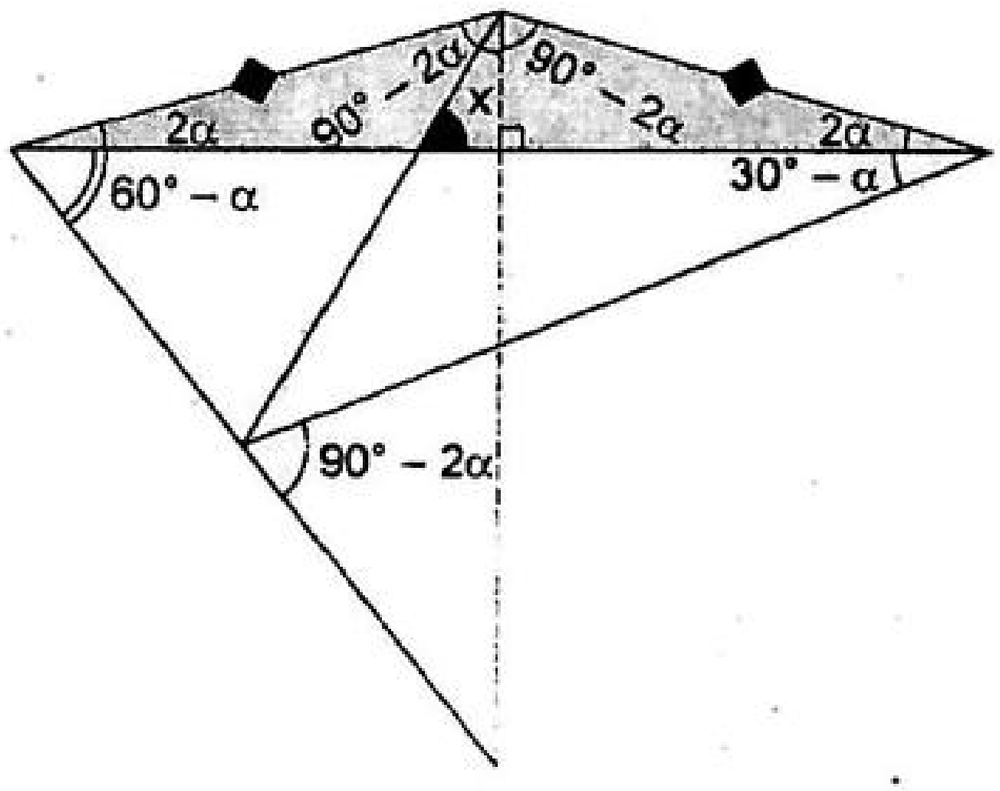


Resolución:

Paso N° 1. Completando ángulos externos:

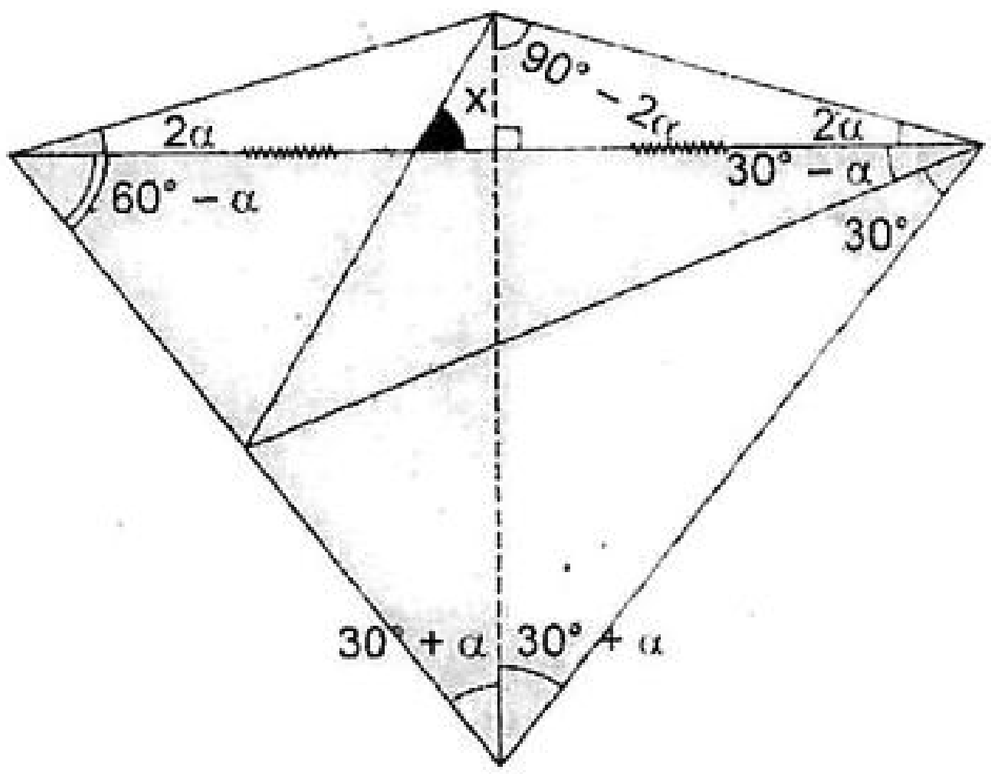


Paso N° 2. Como se tiene un triángulo isósceles, se traza su altura de la siguiente manera:

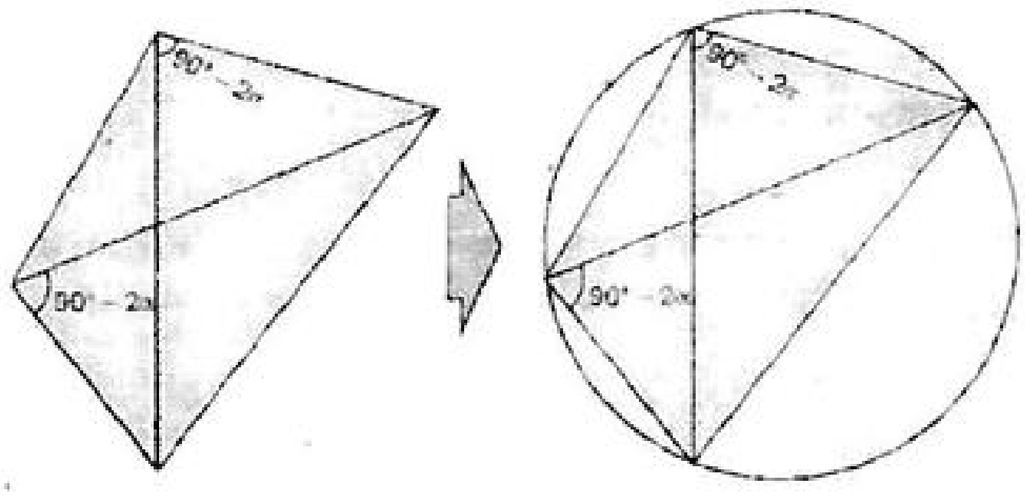


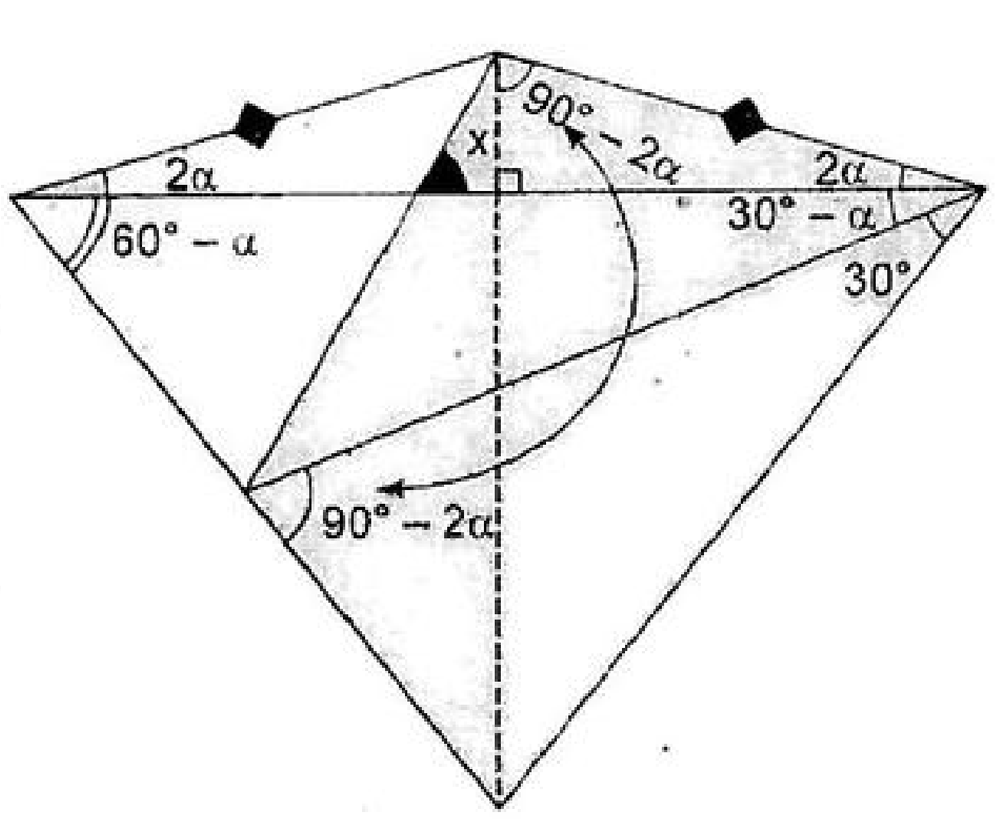
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Se observa la mediatriz en el triángulo isósceles donde se cumple:

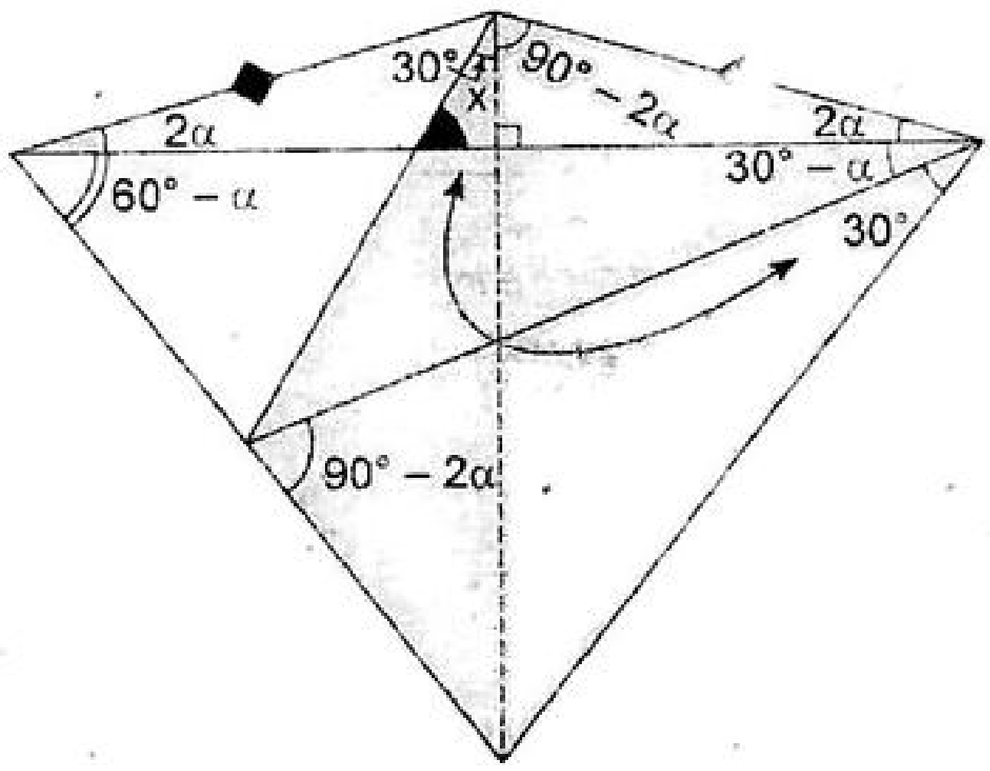


Paso N° 4. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote.

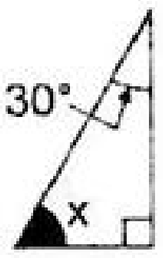




Paso N° 5.

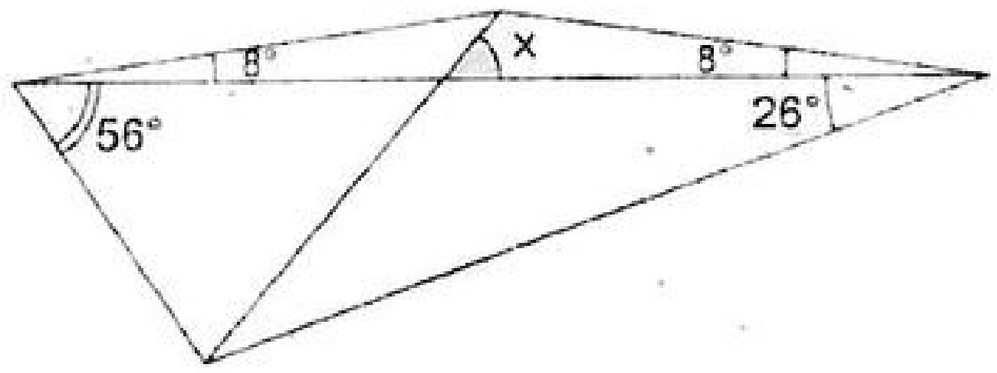


Se observa:



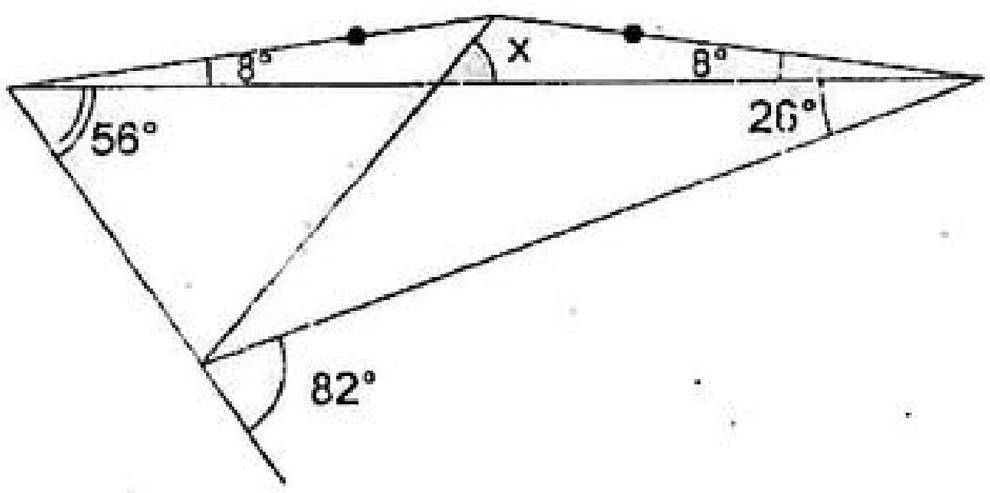
∴ x = 60°

Problema 30. Calcular x.



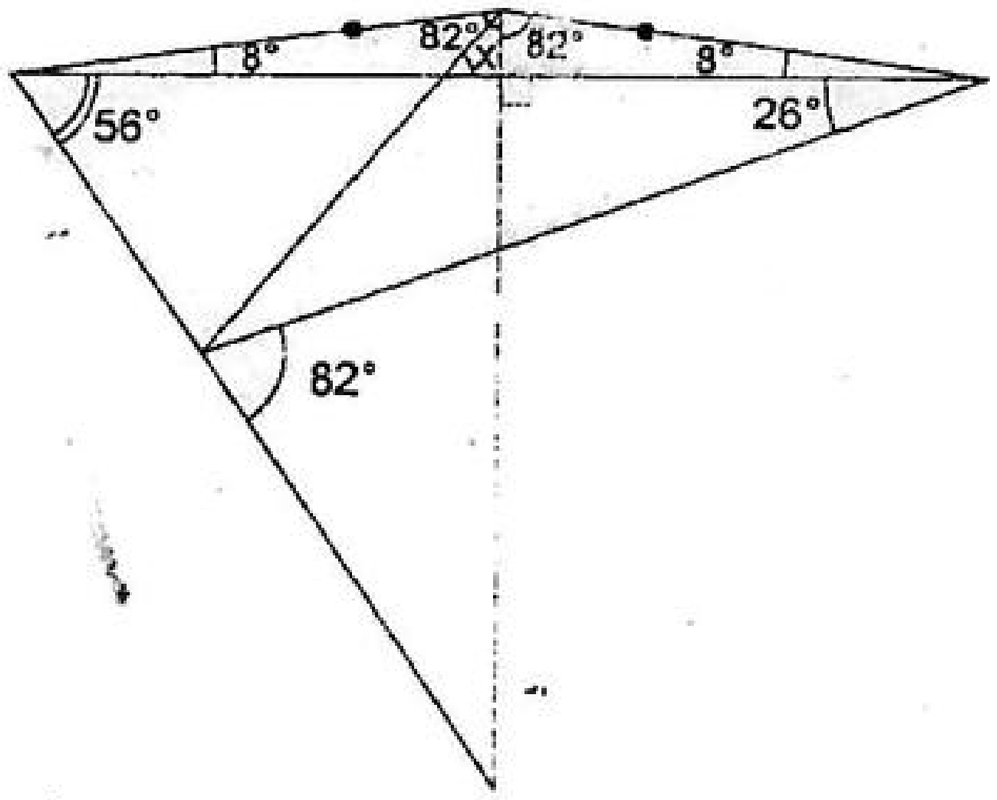
Resolución:

Paso N° 1. Completamos ángulos, entonces:

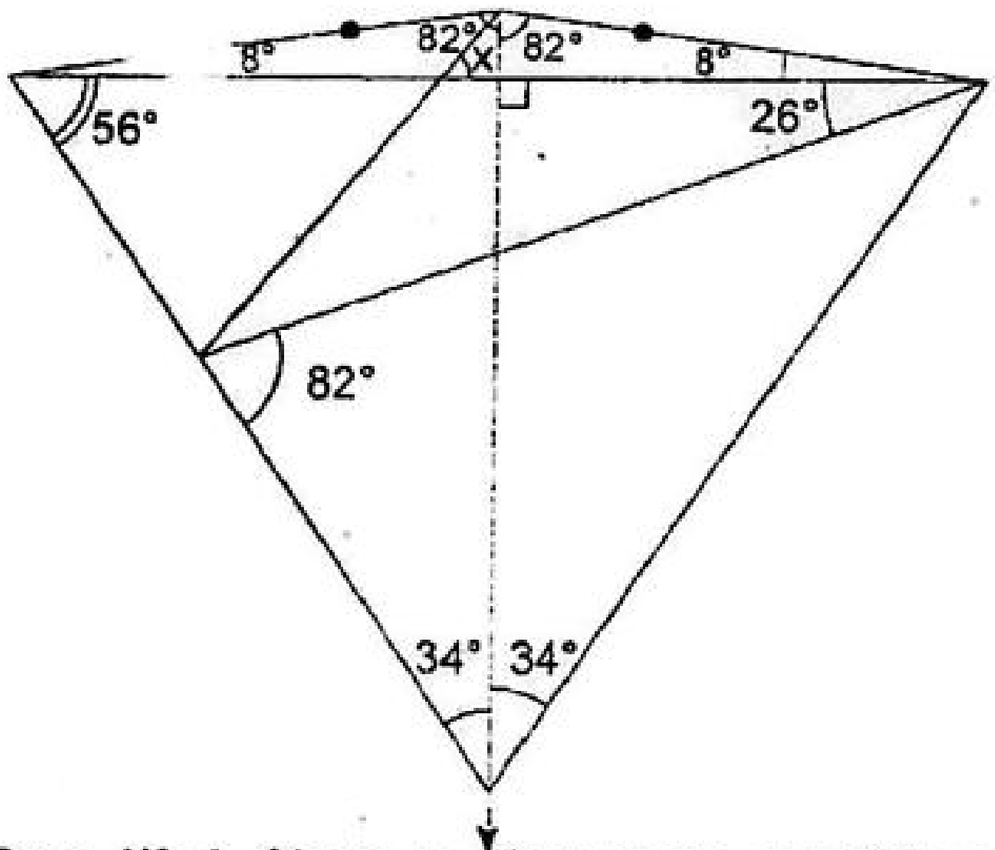


Scanned by CamScanner

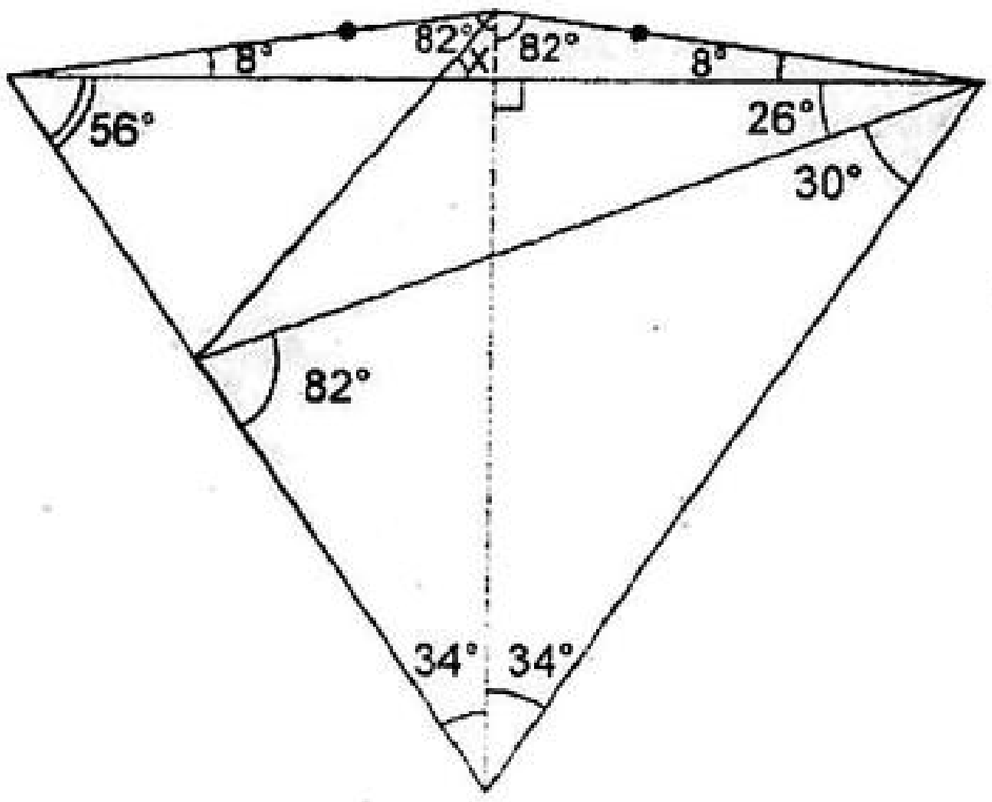
Paso N° 2. Como se tiene un triángulo isósceles, trazamos su altura, donde cumple:

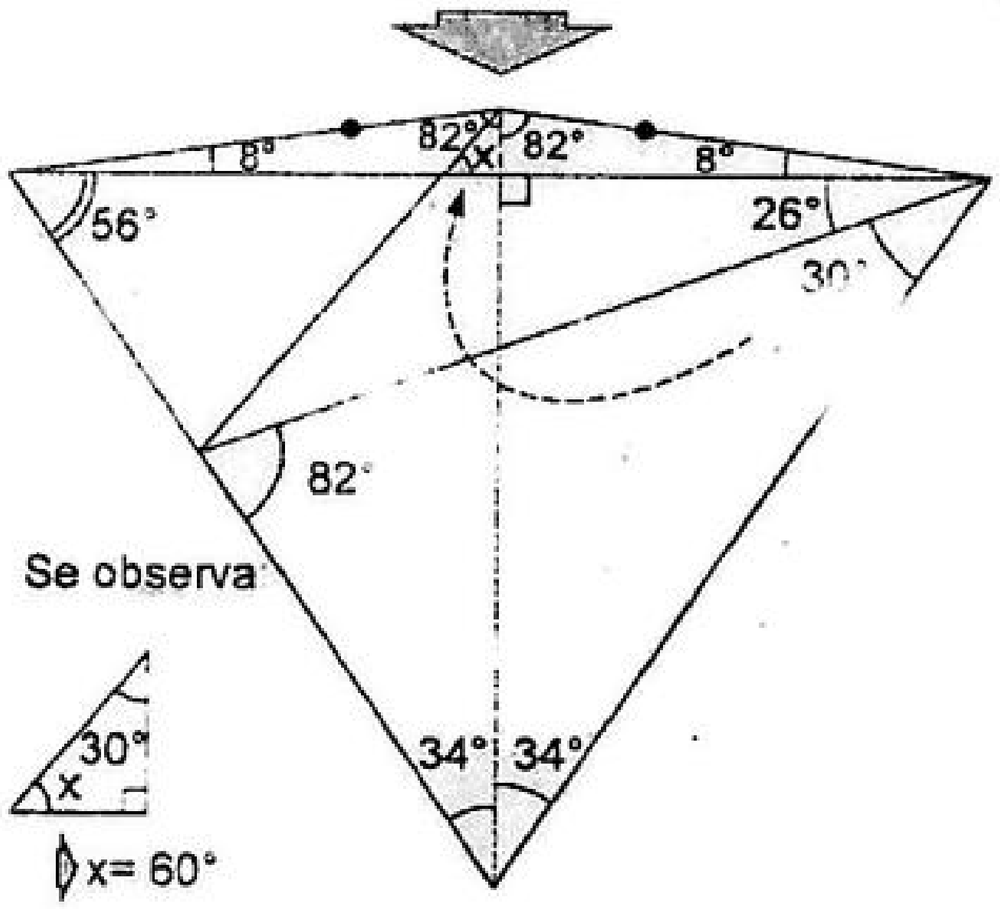


Paso N° 3. También se tiene una mediatriz donde cumplirá:

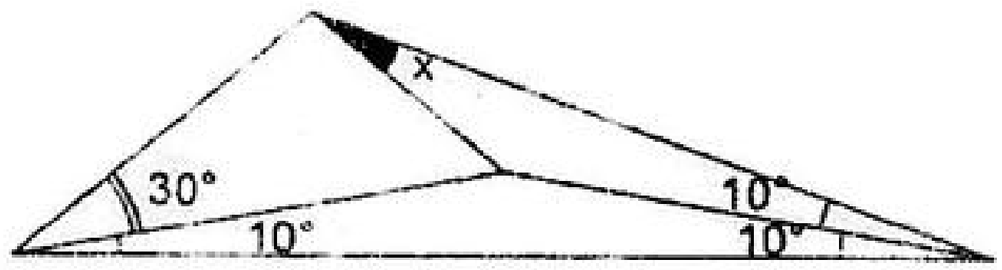


Paso N° 4. Ahora se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:



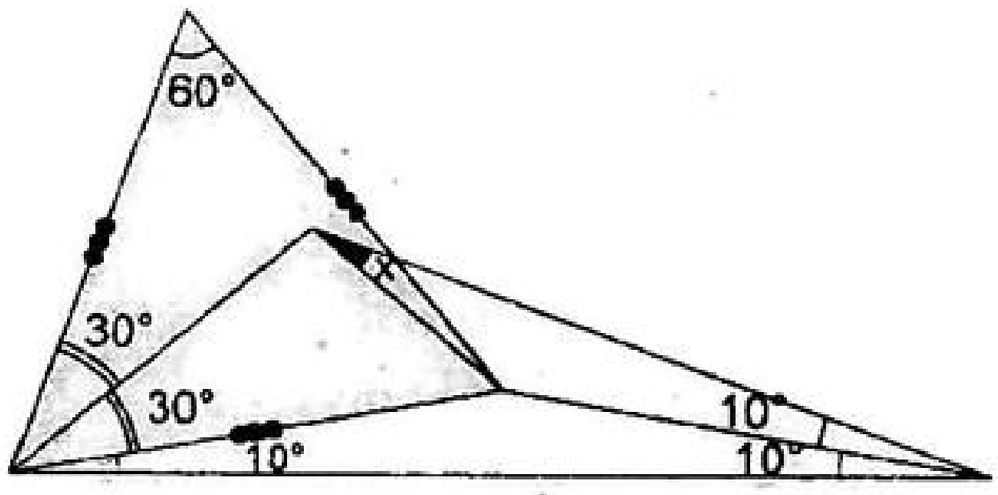


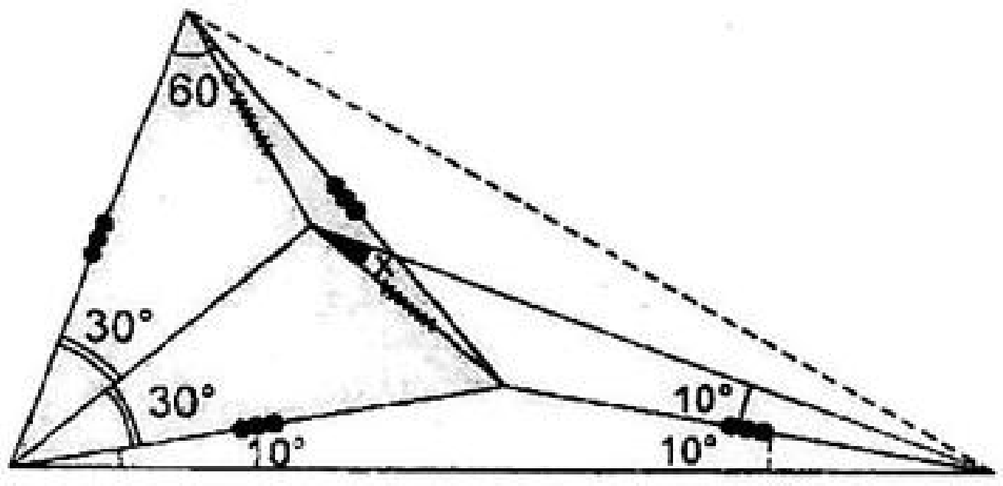
Problema 31. Caso general. Calcular x.



Resolución:

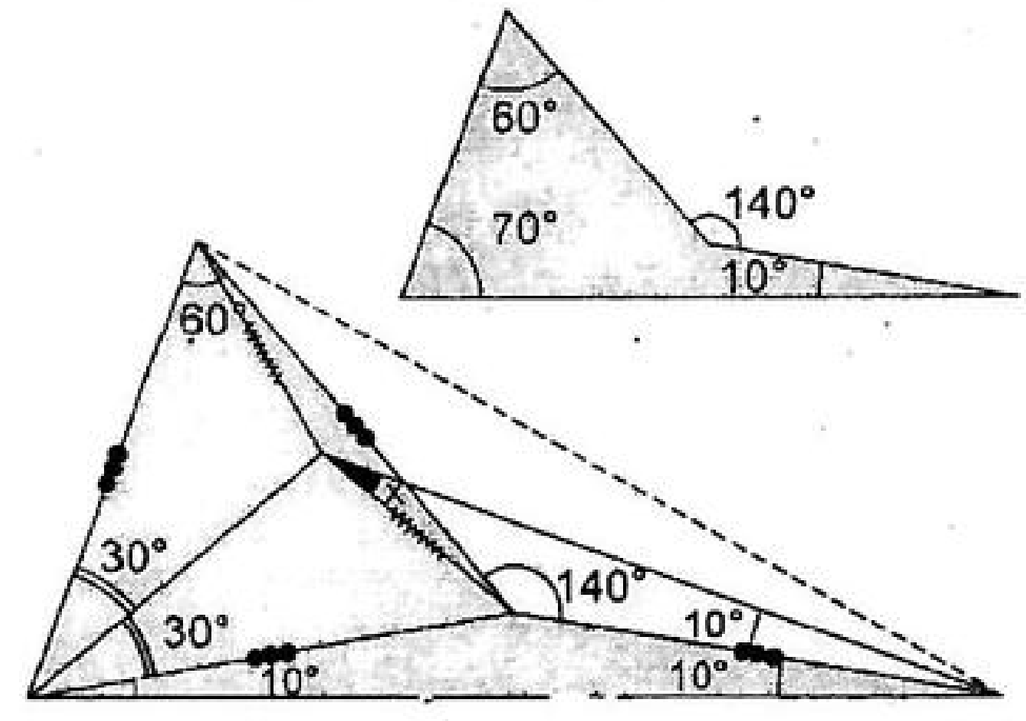
Paso N° 1. Se observa un ángulo de 30°, entonces formamos un triángulo equilátero externamente:



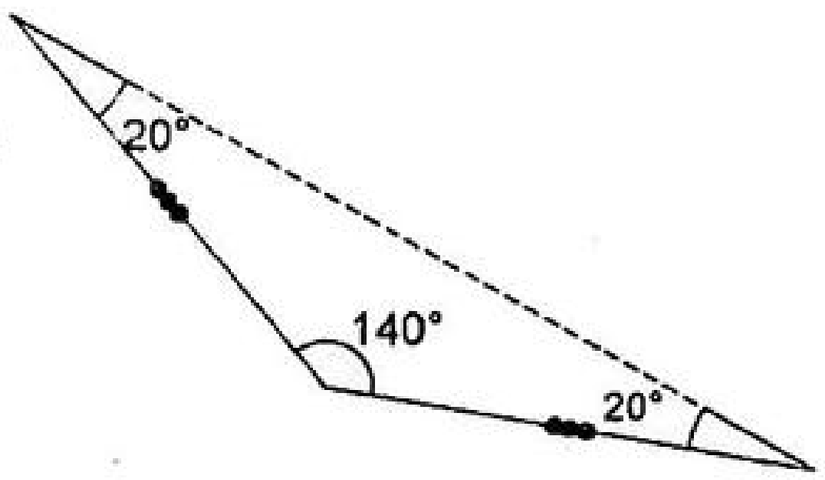


Scanned by CamScanner

Paso N° 2. Tenemos un cuadrilátero no convexo, donde se cumple la siguiente propiedad:

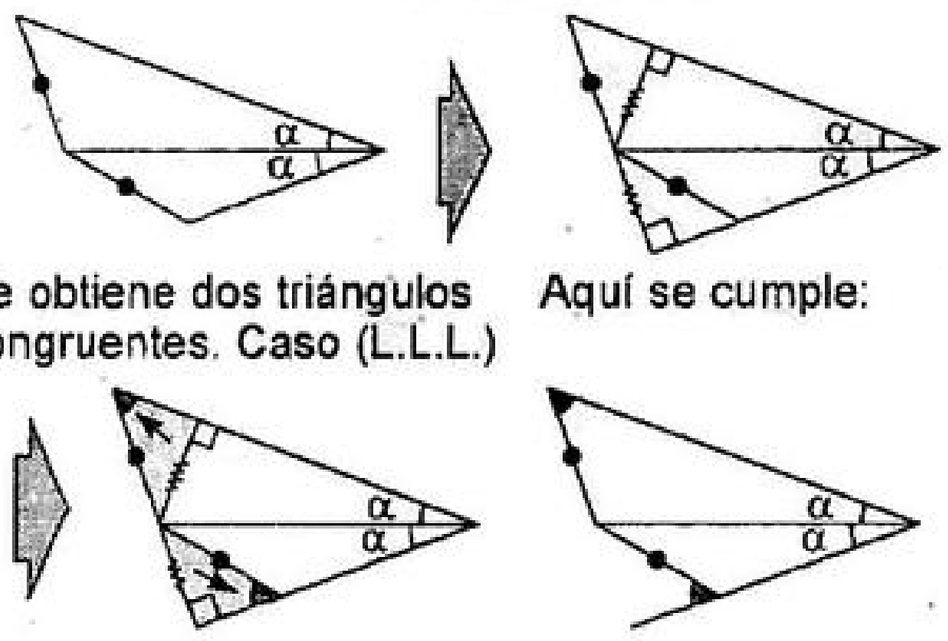


También se observa:



Paso N° 3. Tener presente la siguiente propiedad:

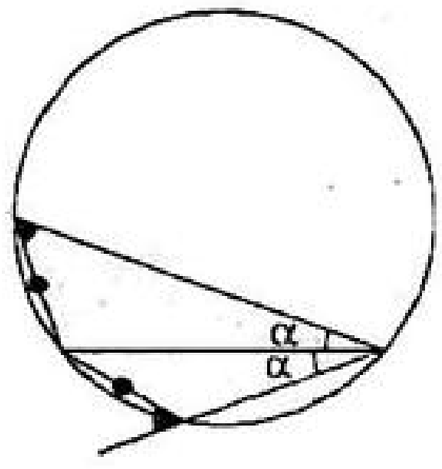
Empleando la propiedad de la bisectriz interna tenemos:



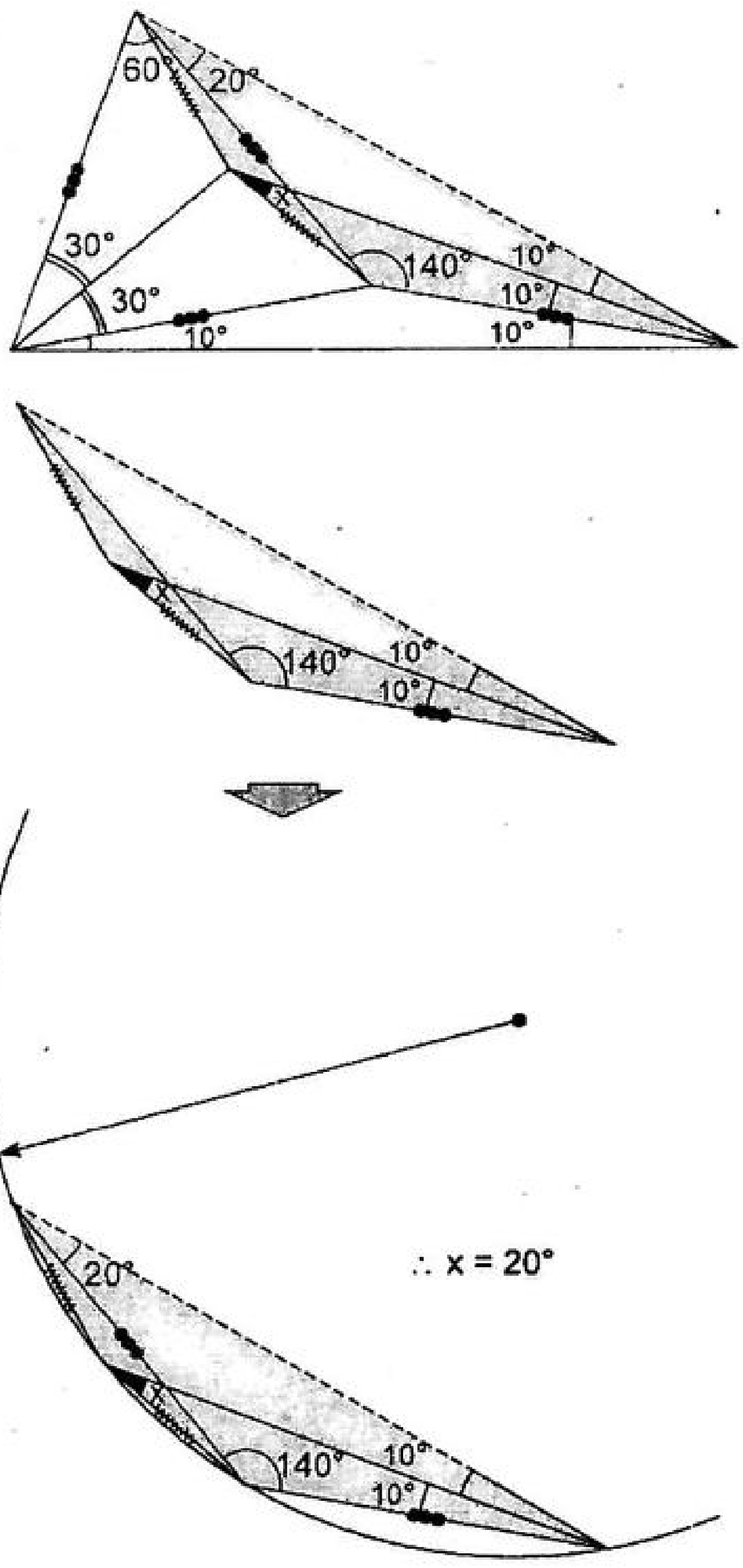
Se obtiene dos triángulos congruentes. Caso (L.L.L.)

Aquí se cumple:

Se obtiene un cuadrilátero inscriptible:

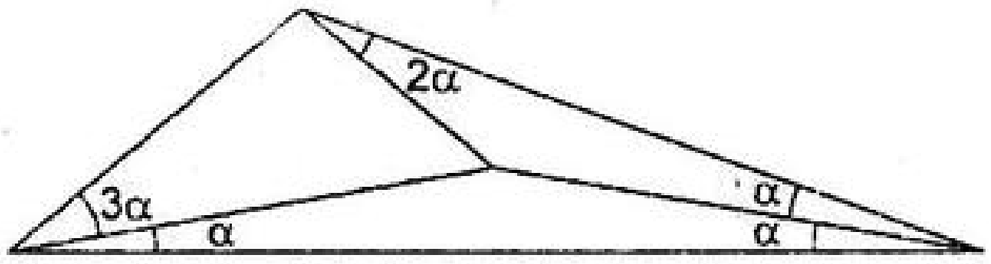


Ahora en el problema se tiene la siguiente figura:



∴ x = 20°

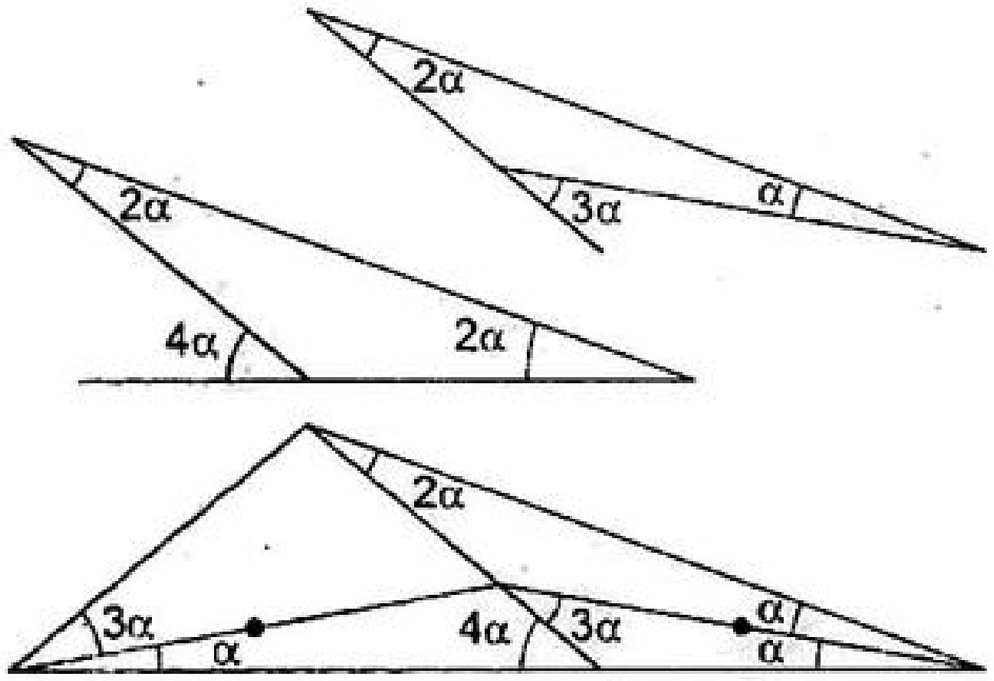
Problema 32. Calcular α.



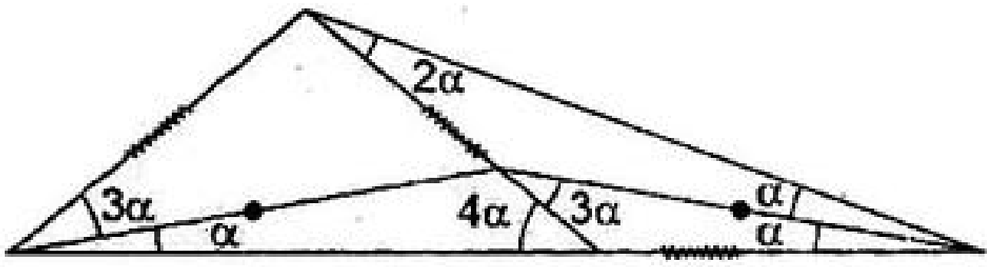
Scanned by CamScanner

Resolución:

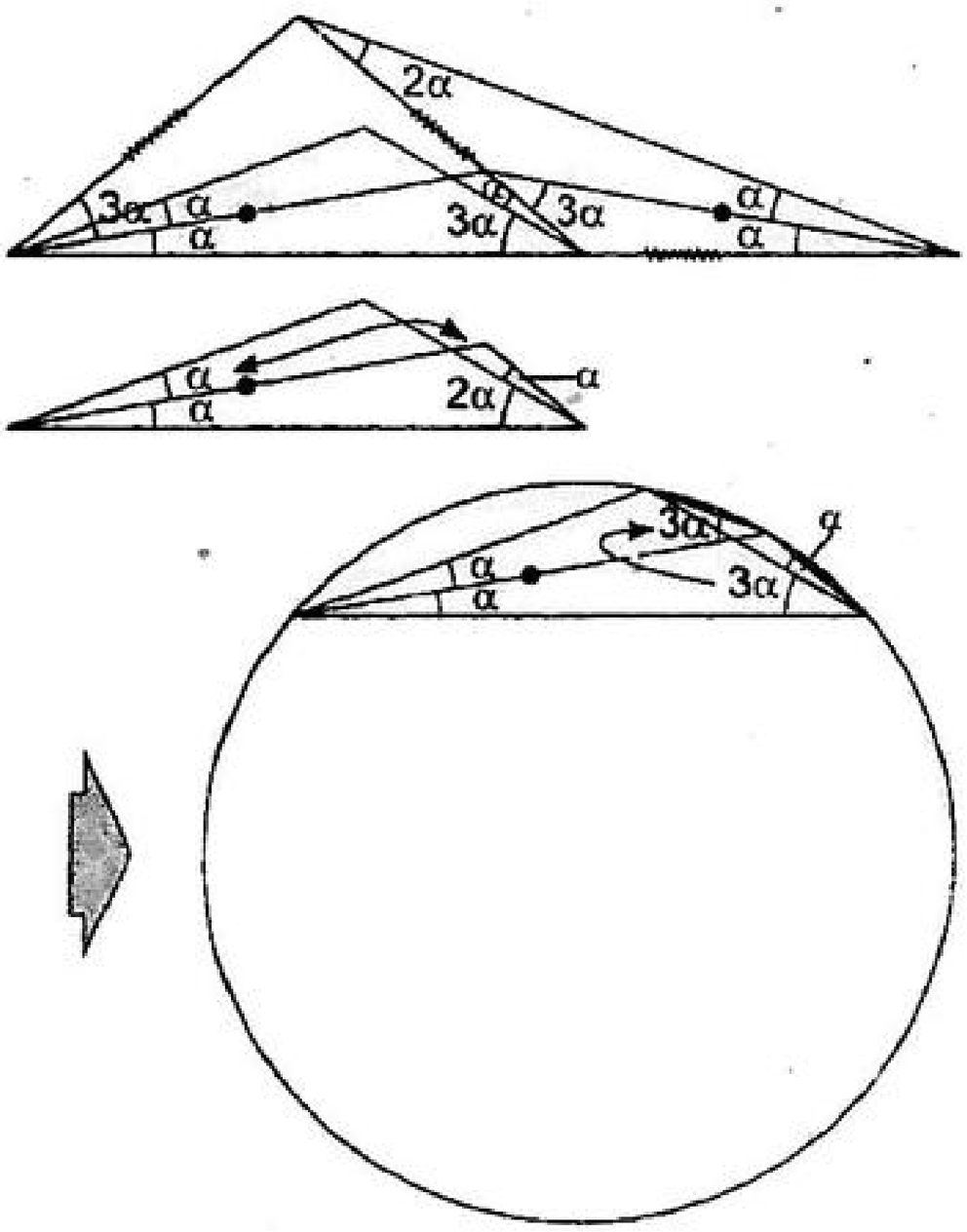
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos de la siguiente manera:



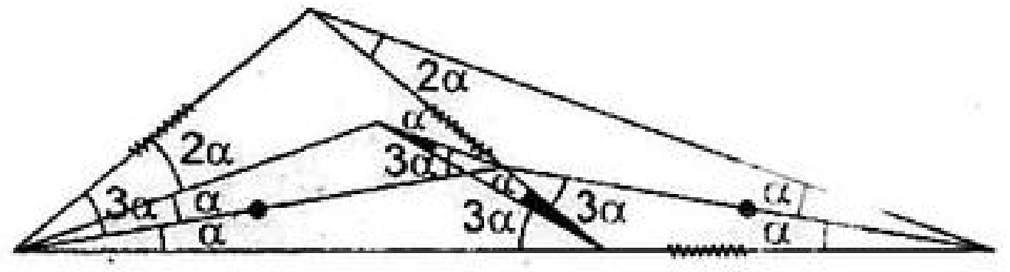
También se tiene:



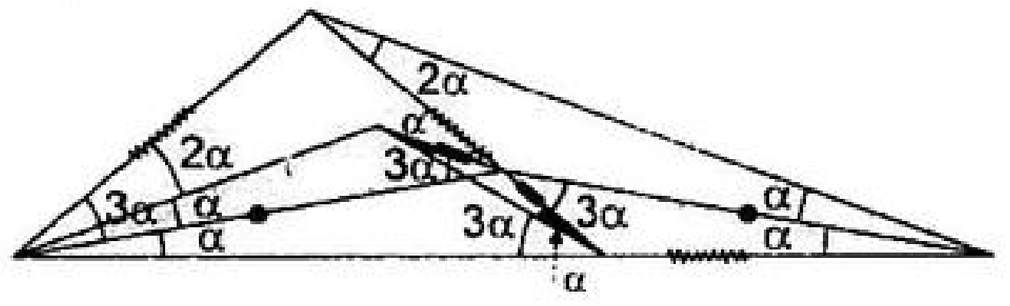
Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo para obtener un cuadrilátero inscriptible:

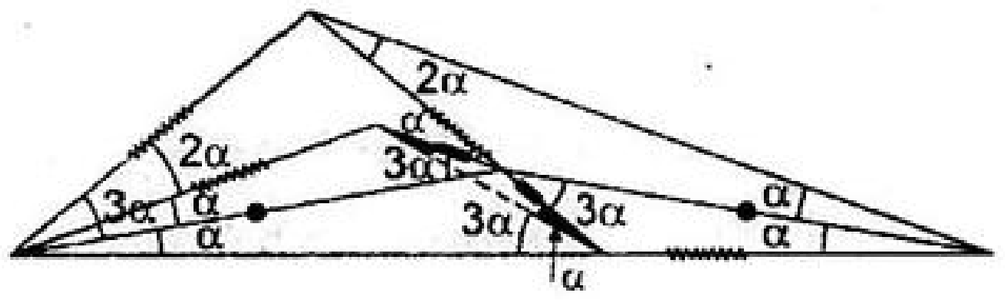


Paso N° 3. En el cuadrilátero inscriptible usamos la propiedad del pantalón o rebote:

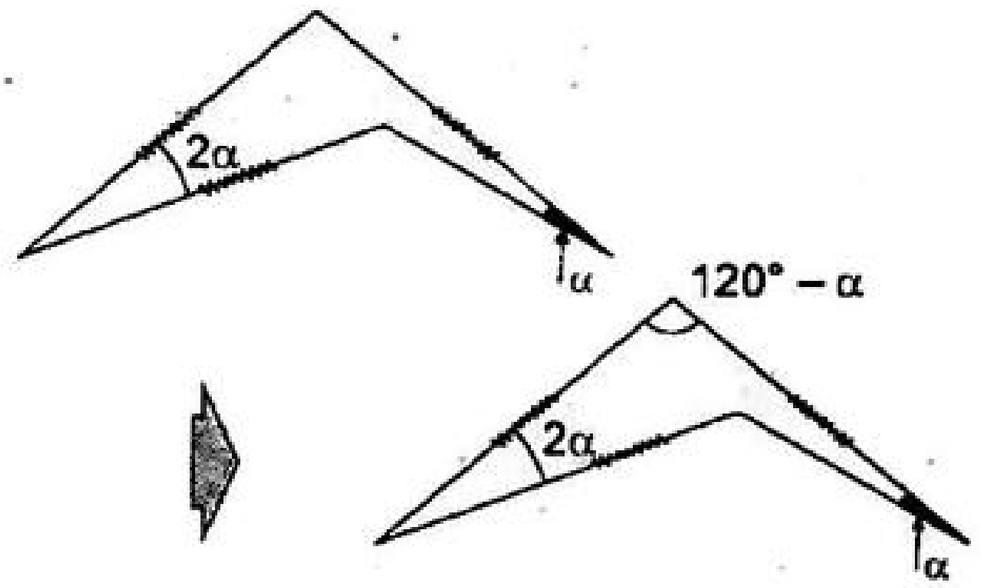


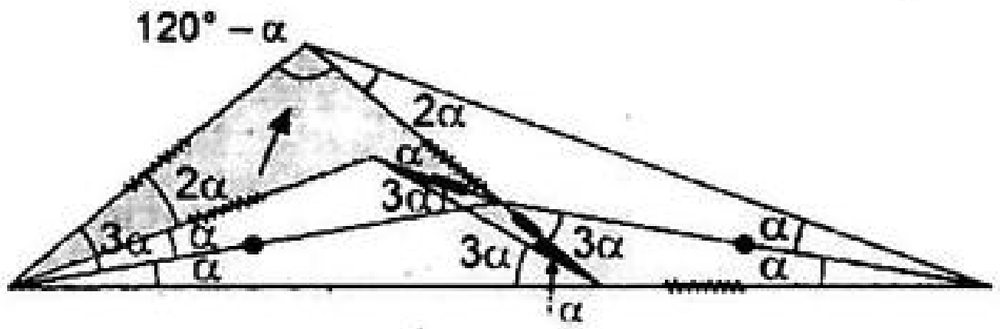
Paso N° 4.Se obtiene dos triángulos congruentes: (Caso L.A.L.)





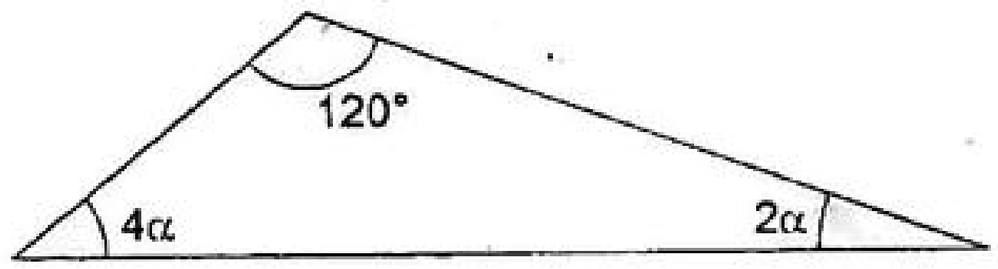
Paso N° 5. Se tiene un cuadrilátero cóncavo donde cumple:





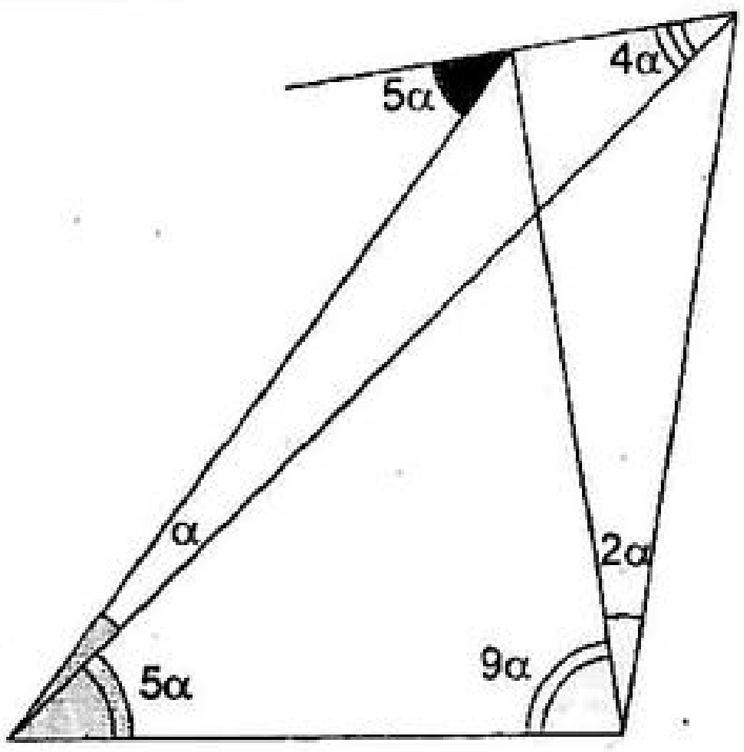
Scanned by CamScanner

Paso N° 6. Finalmente tenemos:



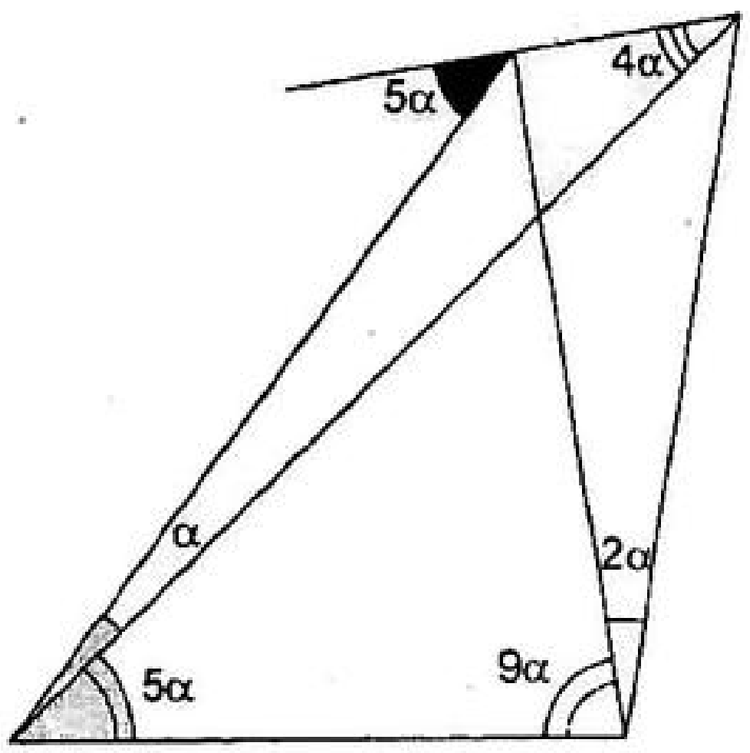
$$120° + 4\alpha + 2\alpha = 180°$$
$$6\alpha = 60°$$
$$\alpha = 10°$$

Problema 33. Calcular α

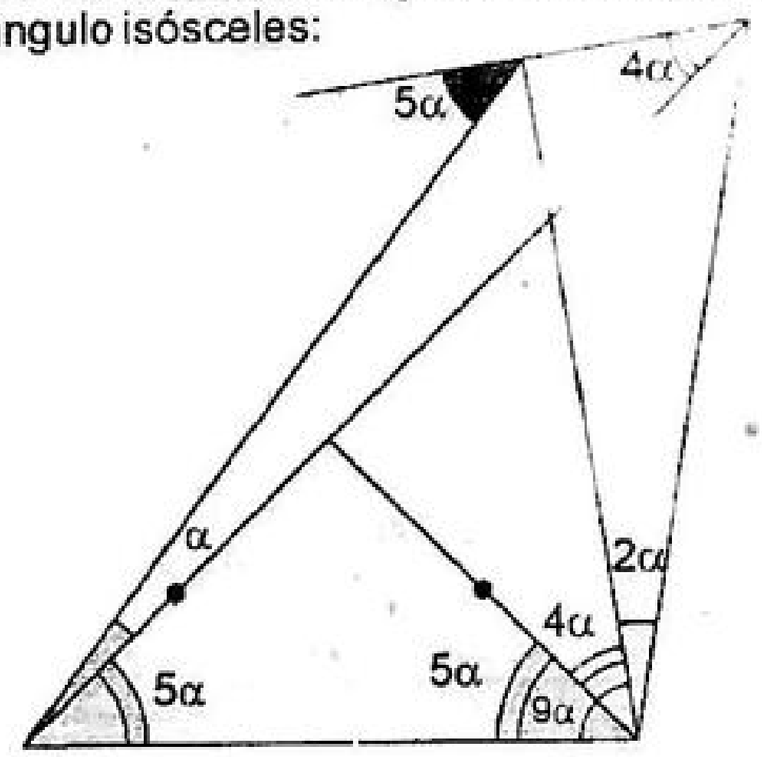


Resolución:

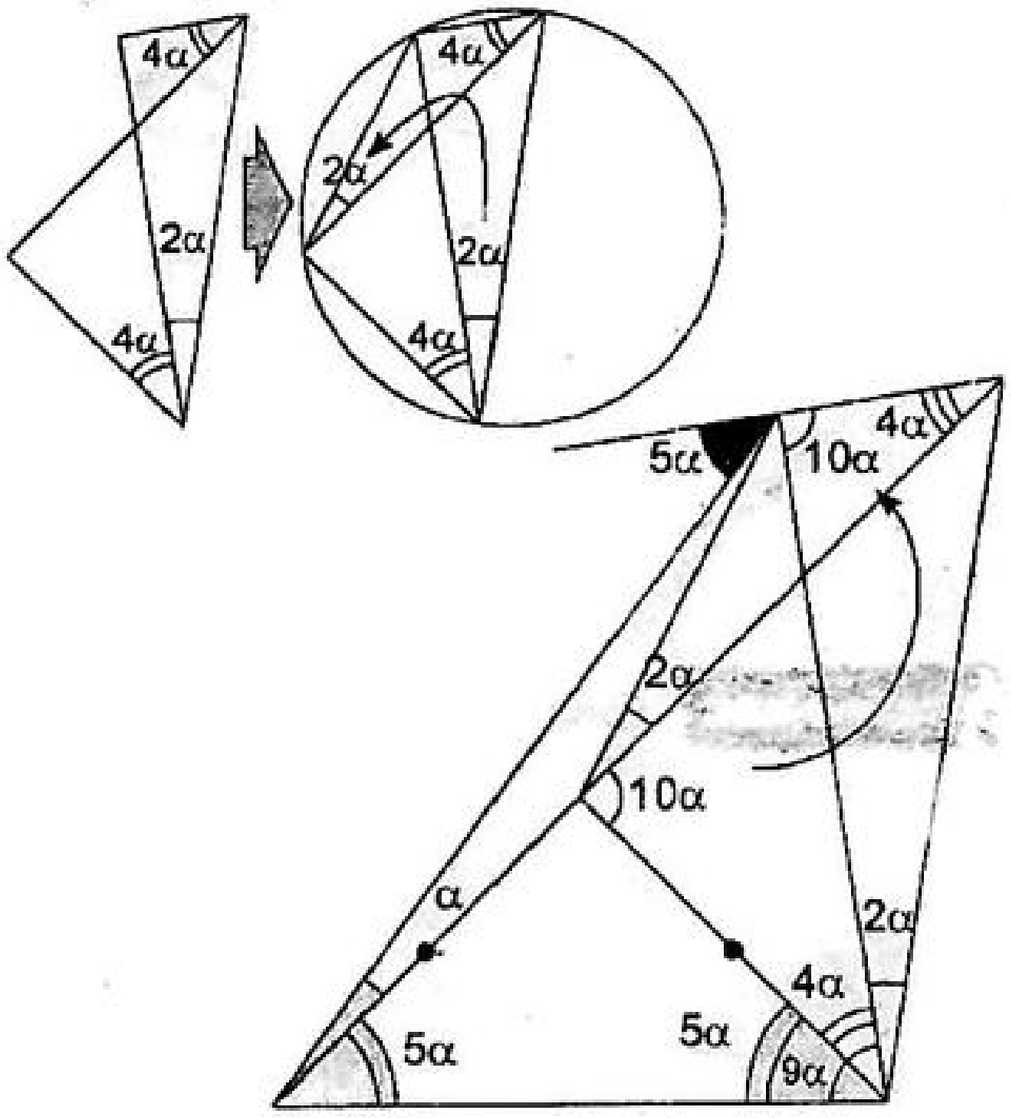
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos:



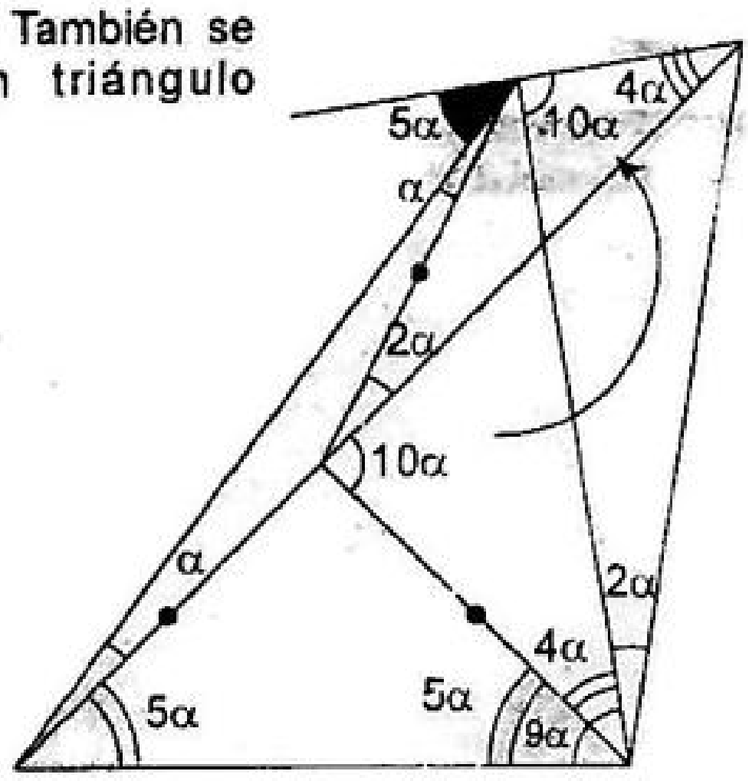
Paso N° 2. Se realiza el siguiente trazo para forma un triángulo isósceles:



Paso N° 3. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

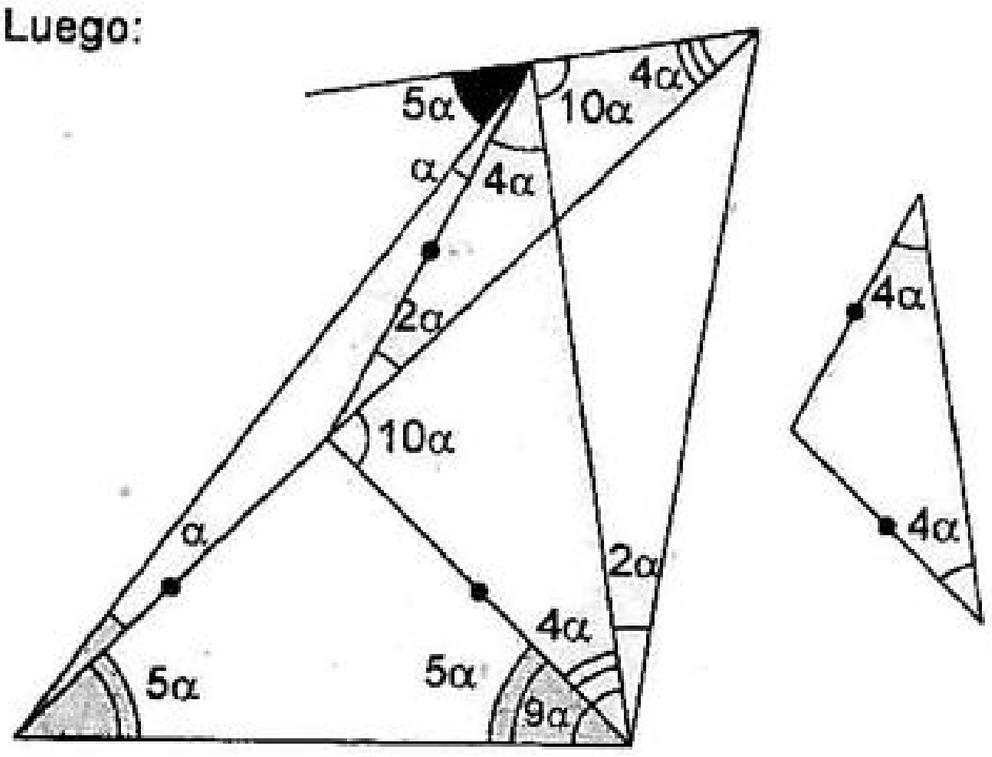


Paso N° 4. También se obtiene un triángulo isósceles:

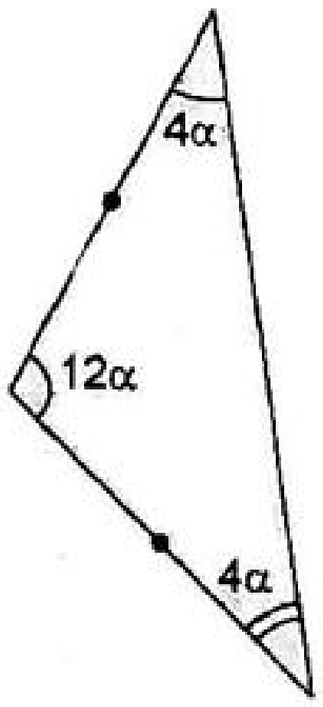


Scanned by CamScanner

Luego:

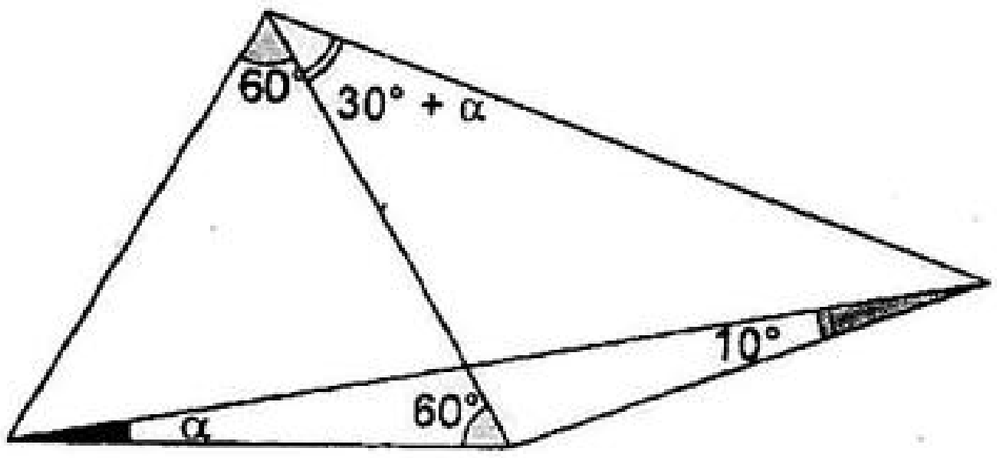


Paso N° 5. Observando el triángulo tenemos:



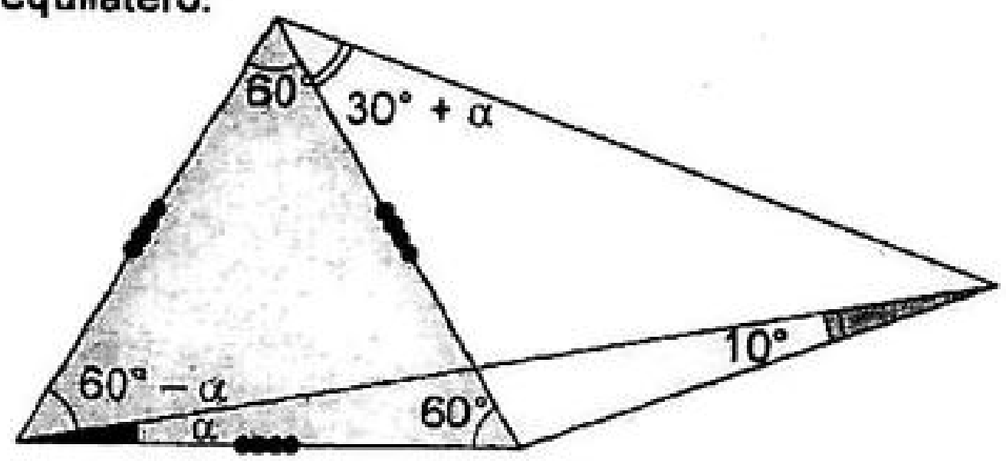
$$12\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$$
$$20\alpha = 180°$$
$$\alpha = 9°$$

Problema 34. Calcular α.

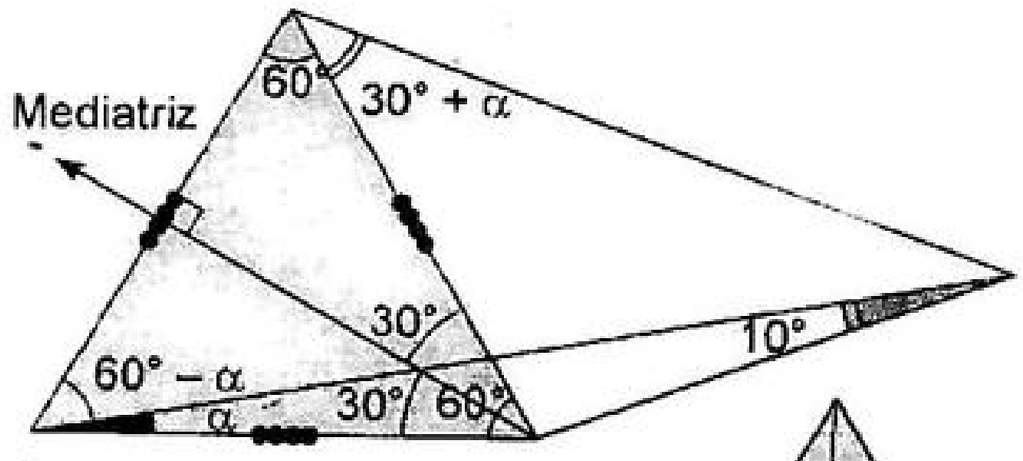


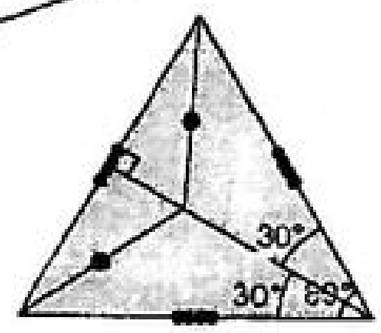
Resolución:

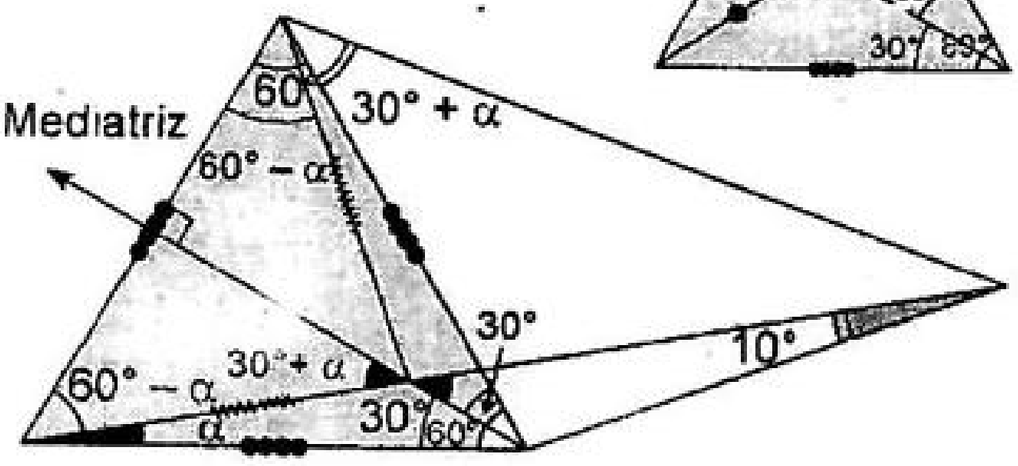
Paso N° 1. En la figura observamos un triángulo equilátero:



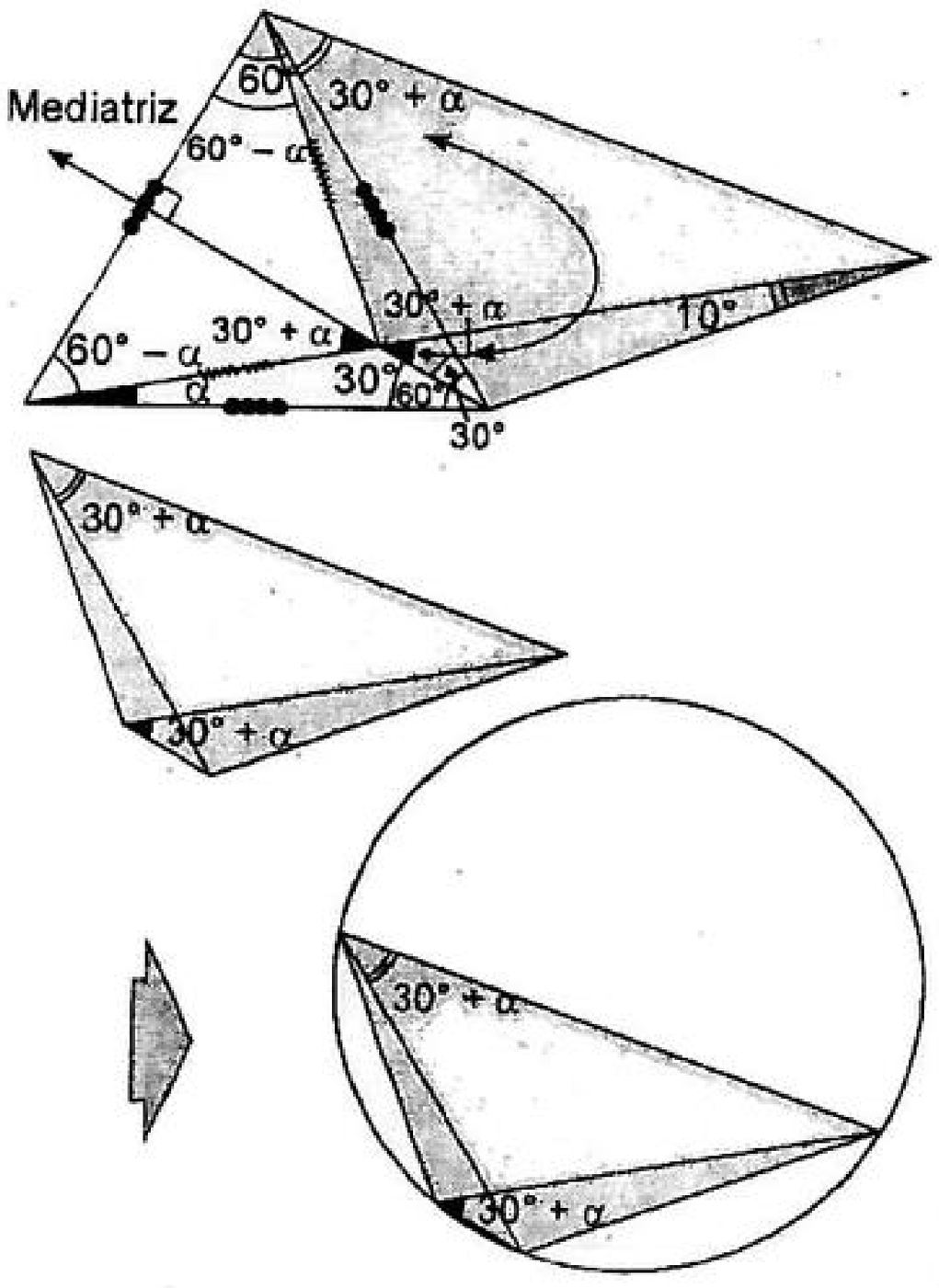
Paso N° 2. Trazamos la mediatriz de dicho triángulo equilátero, donde se cumple:





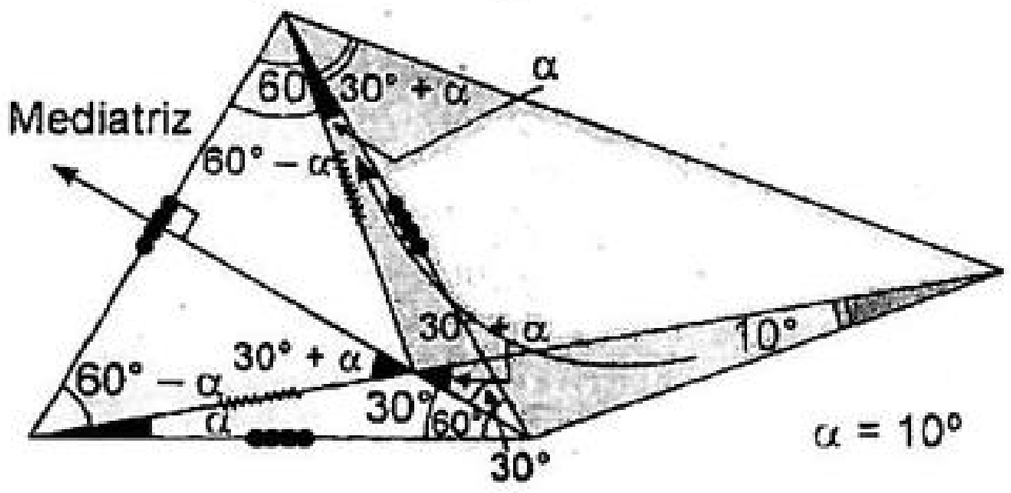


Paso N° 3. Ahora tenemos un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:



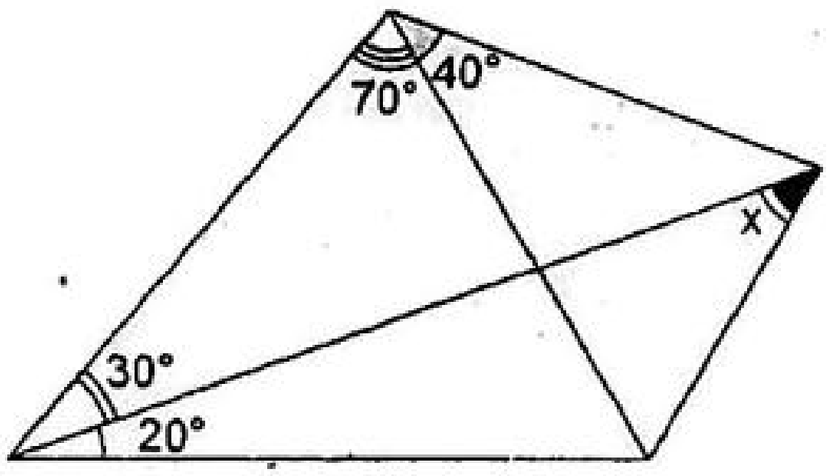
Scanned by CamScanner

También:



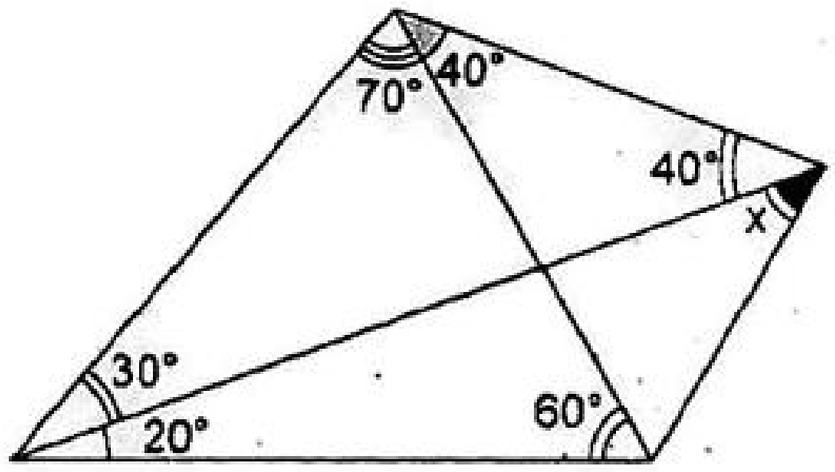
$\alpha = 10°$

Problema 35. Calcular x.

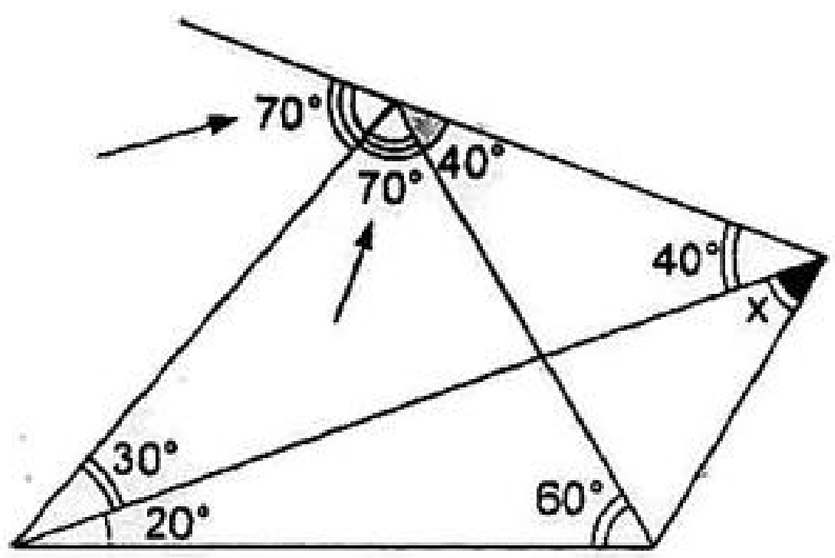


Resolución:

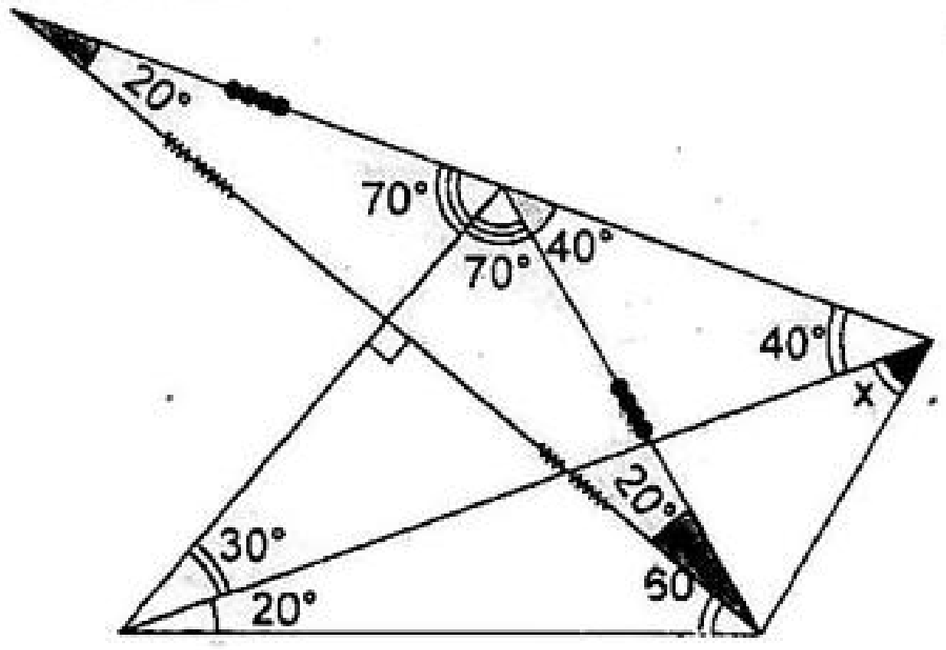
Paso N° 1. Completando los ángulos internos de la figura:



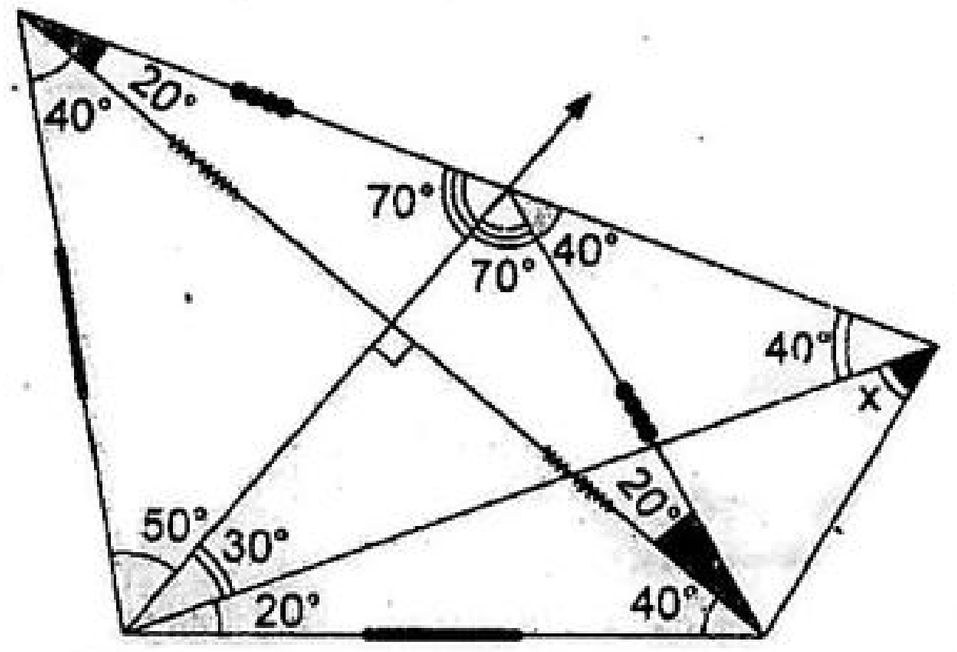
Paso N° 2. Observamos en un ángulo exterior, tener bisectriz exterior:



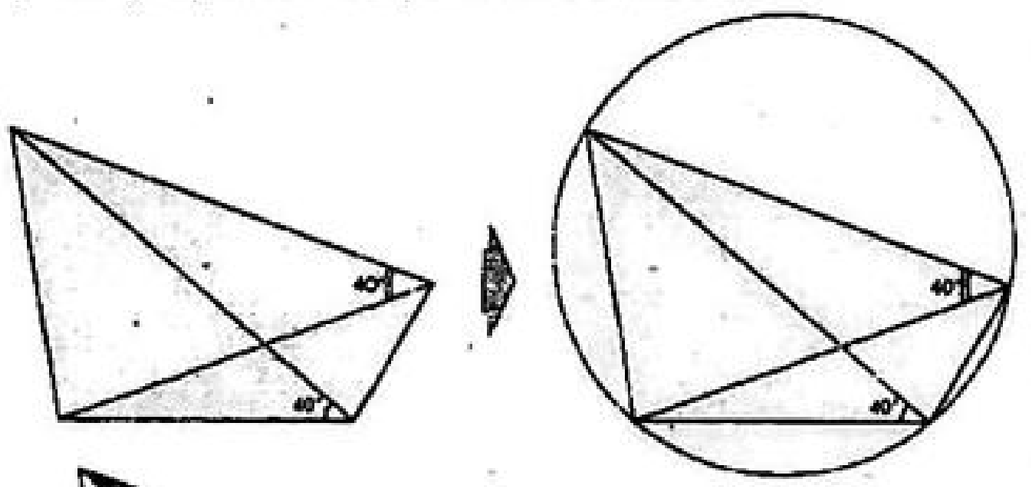
Paso N° 3. Formamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:

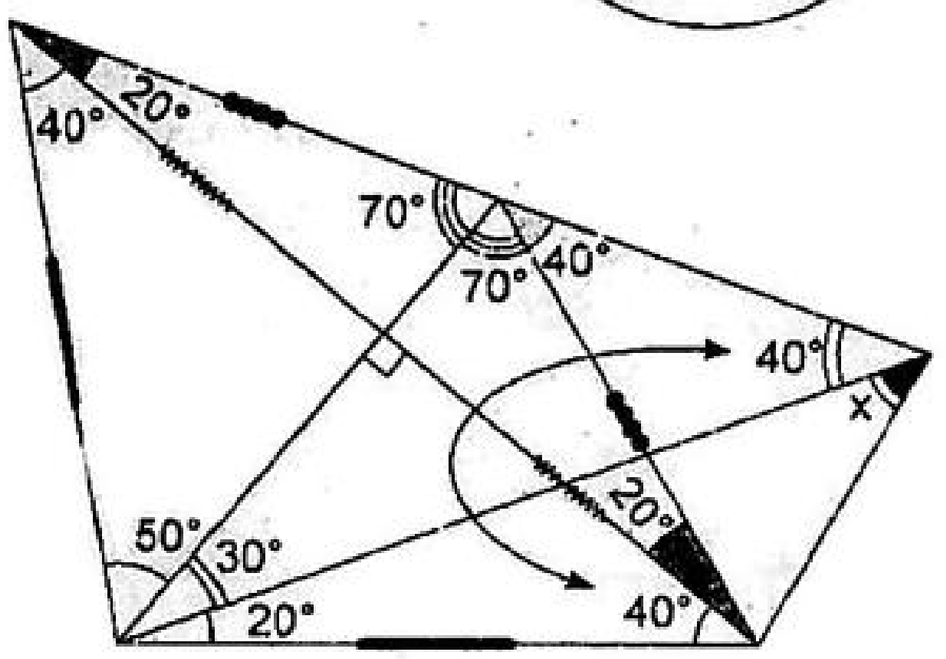


Paso N° 4. Se observa una mediatriz en el triángulo isósceles, entonces empleamos sus propiedades:

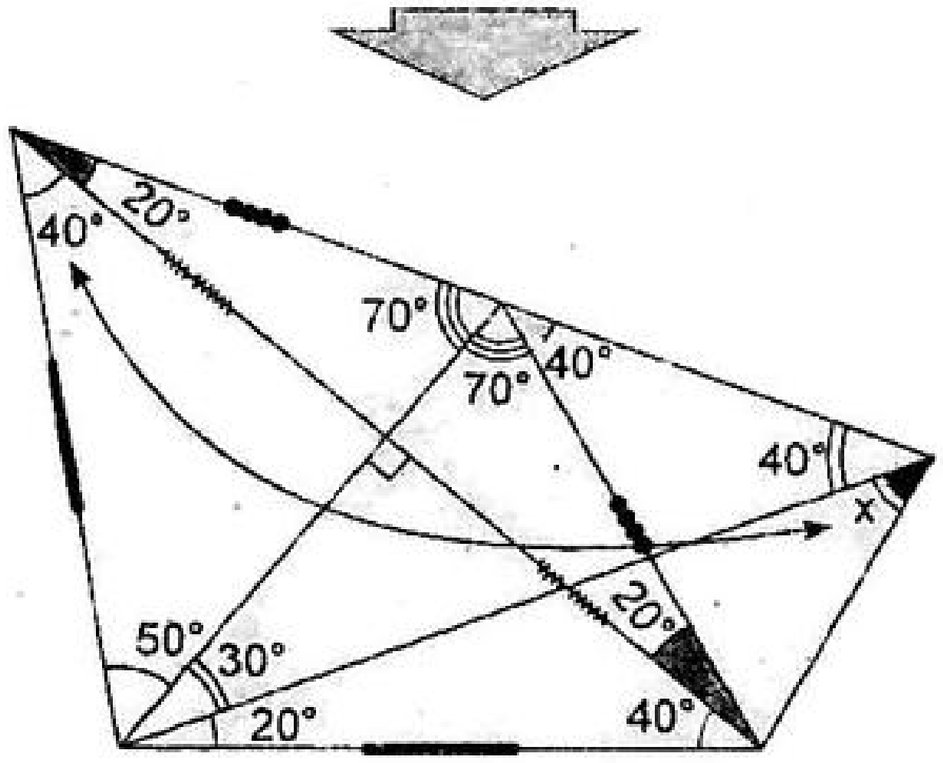


Paso N°5. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebóte:



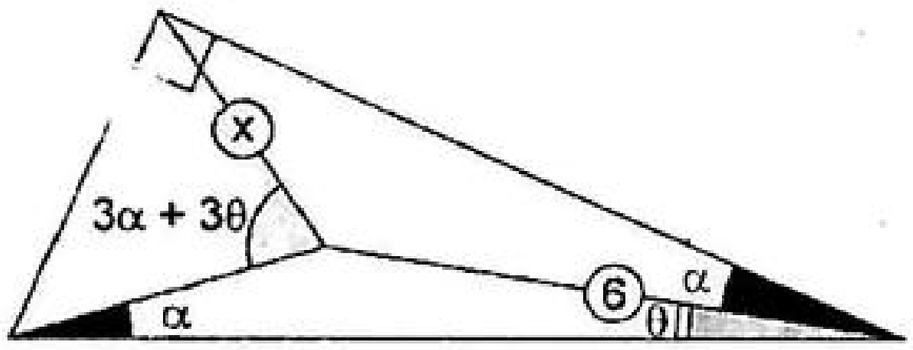


Scanned by CamScanner



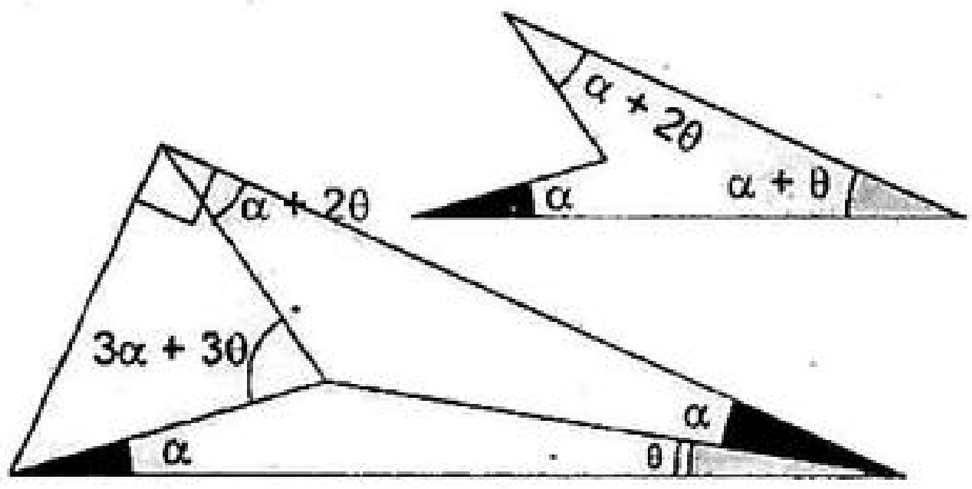
$\therefore x = 40°$

Problema 36. Calcular el valor de x.

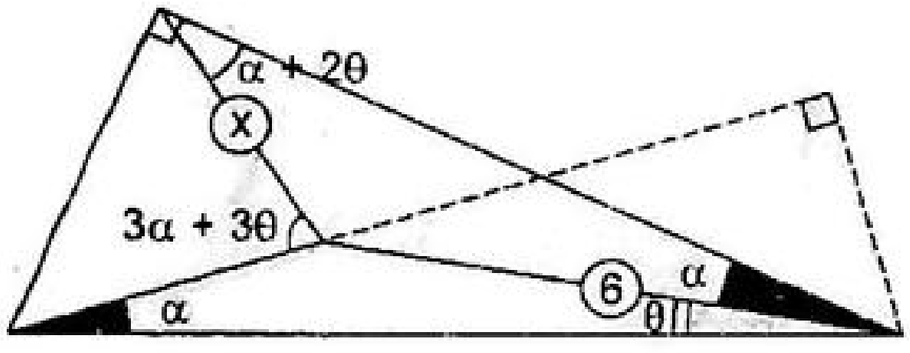


Resolución:

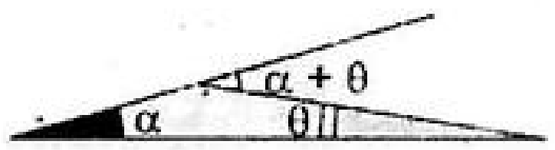
Paso N° 1 Completamos los ángulos interiores de la figura:

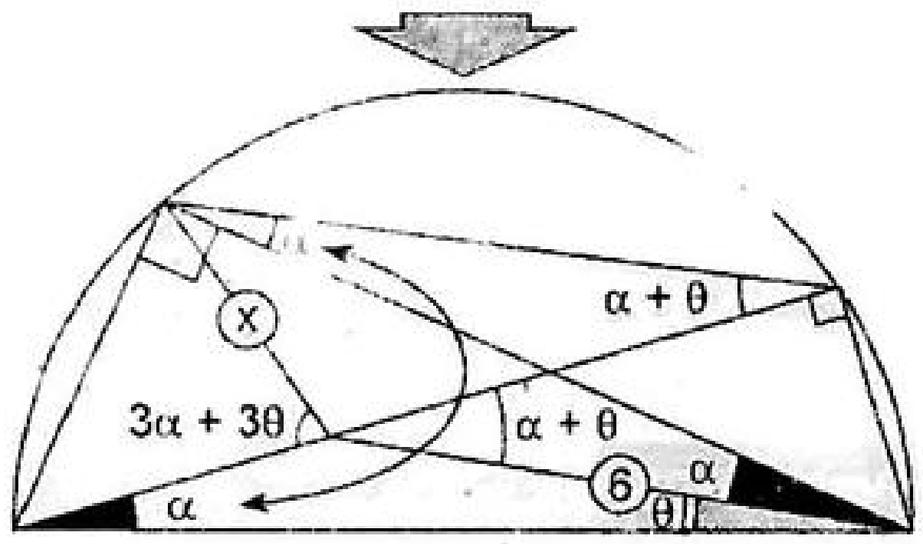


Paso N° 2. Completamos externamente un triángulo rectángulo para obtener un cuadrilátero inscriptible:

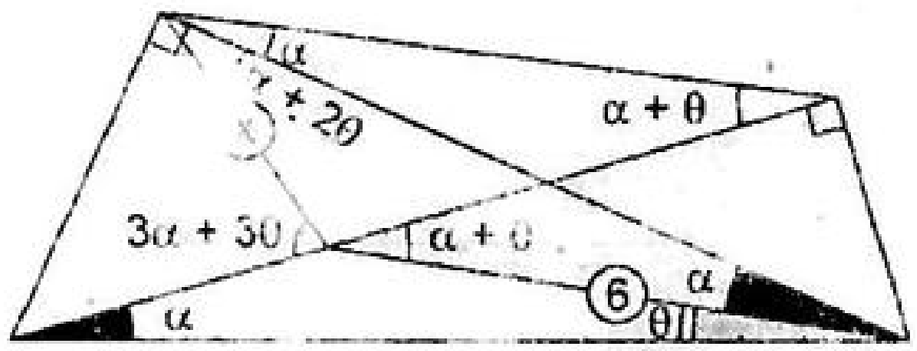


O sea que cumple la propiedad del pantalón o de rebote

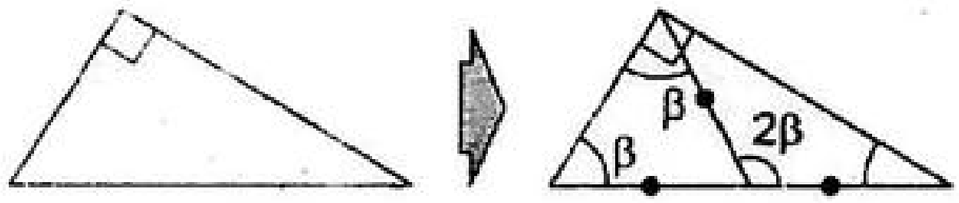




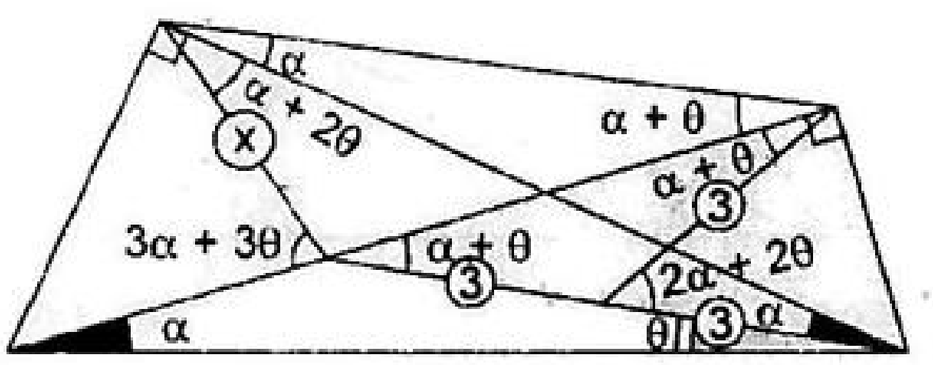
Paso N° 3. Se observa un triángulo rectángulo donde podemos aplicar la siguiente propiedad:



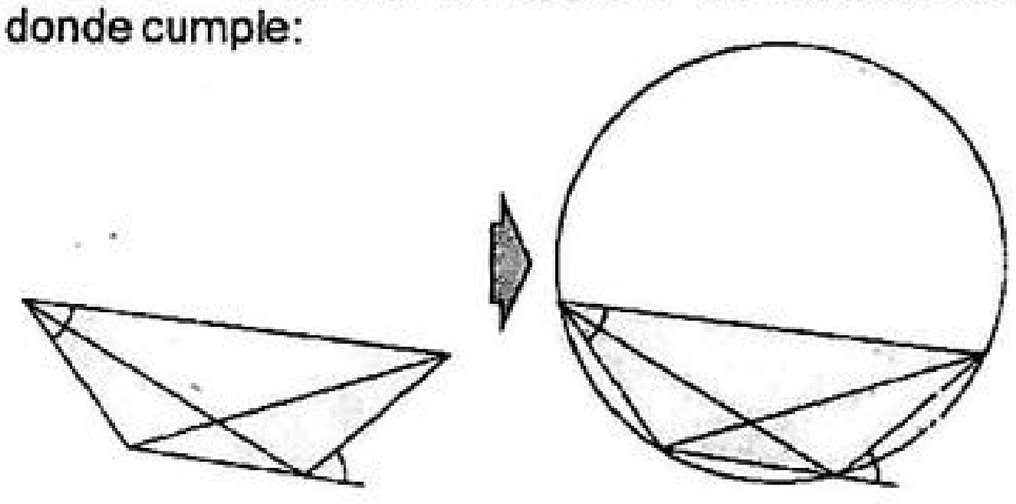
Sabemos



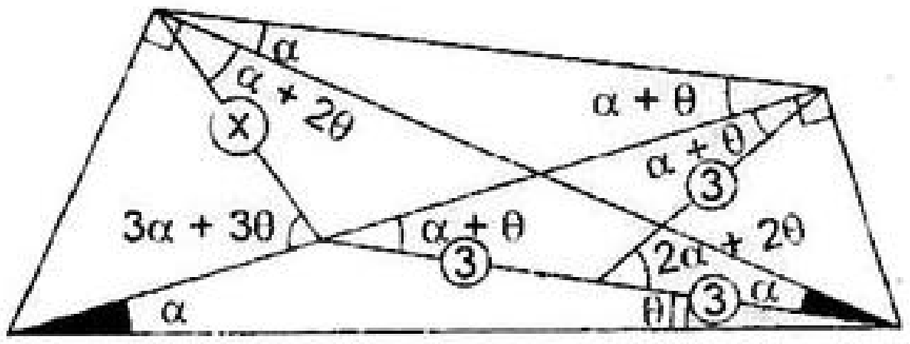
hacemos en el problema:



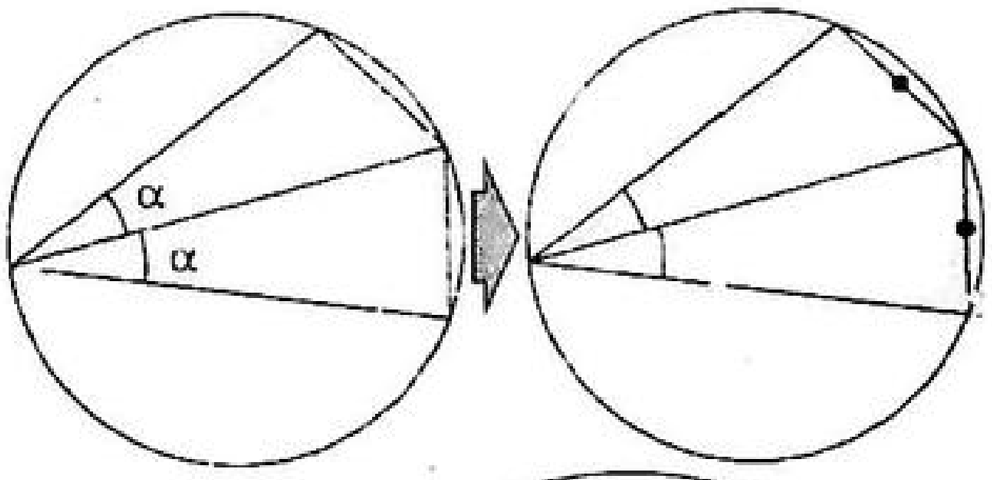
Paso N° 4. Ahora se observa un cuadrilátero donde cumple:



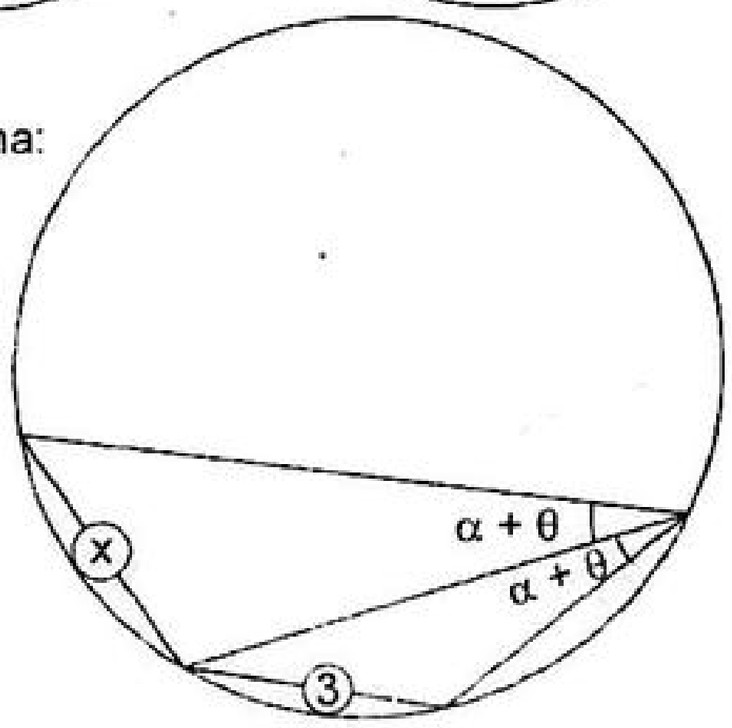
Scanned by CamScanner



Paso N° 5. En dicho cuadrilátero cumple:

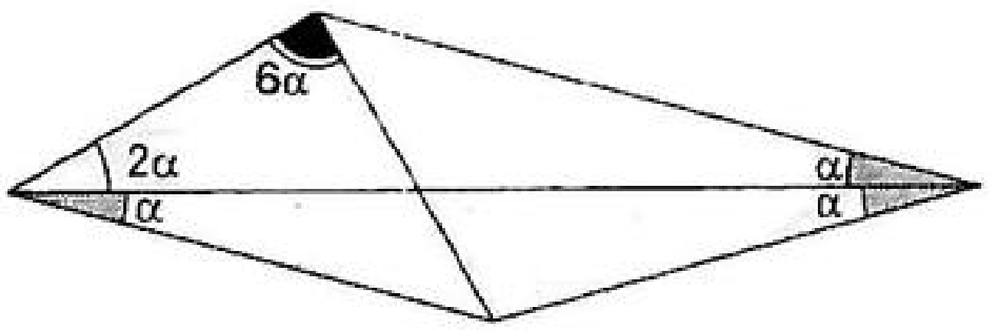


En el problema:



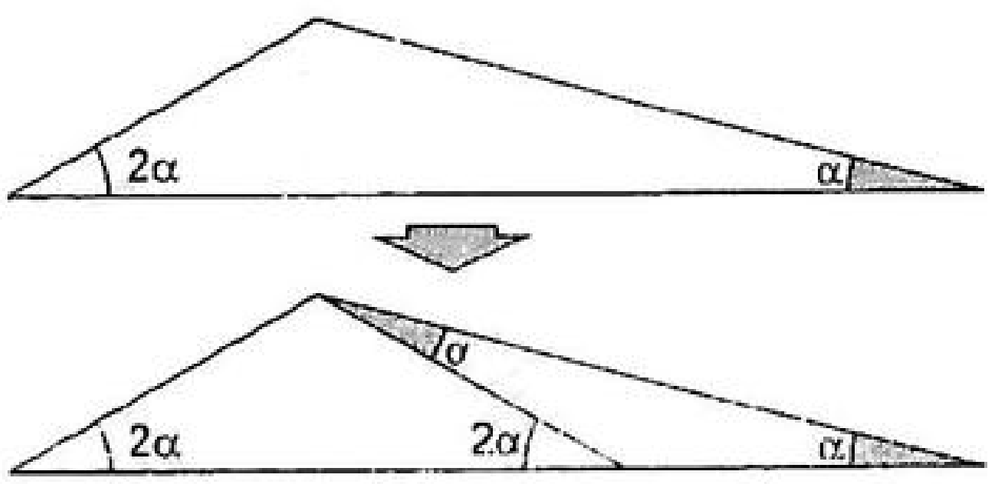
.. x = 3

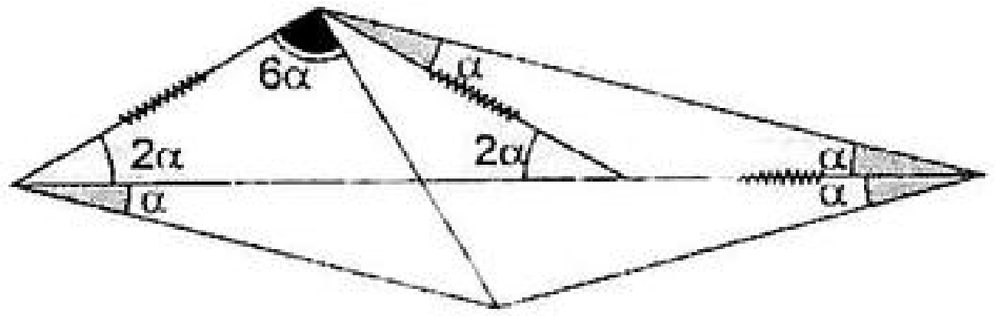
Problema 37. Caso general. Calcular x.



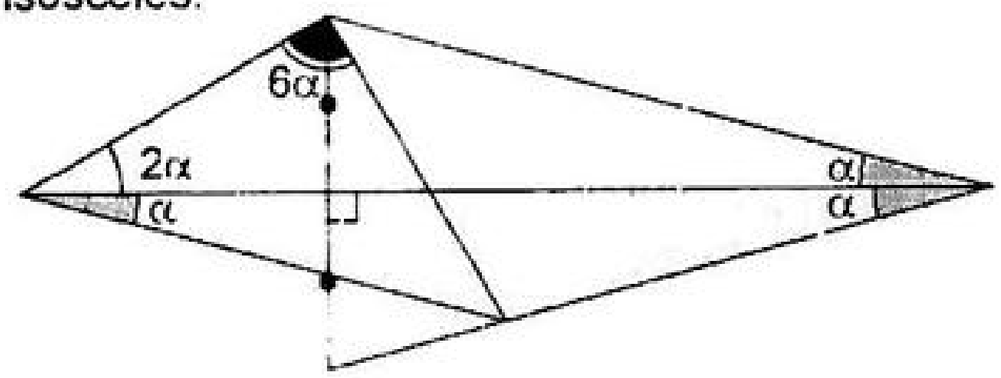
Resolución:

Paso N° 1 Observamos la siguiente figura:

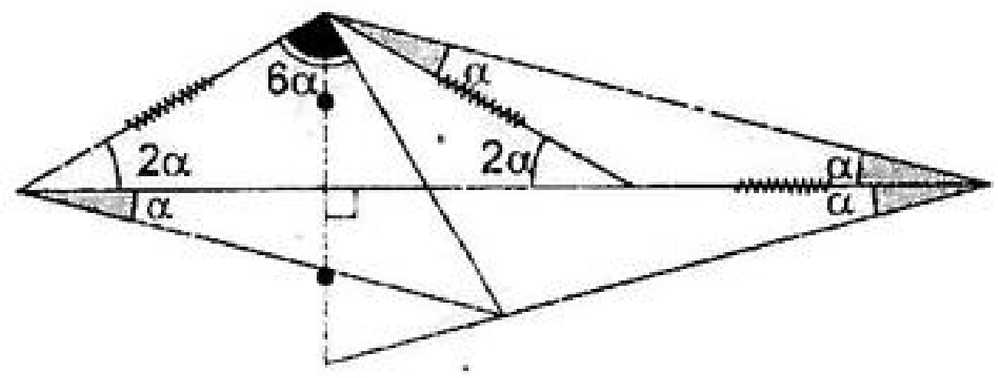




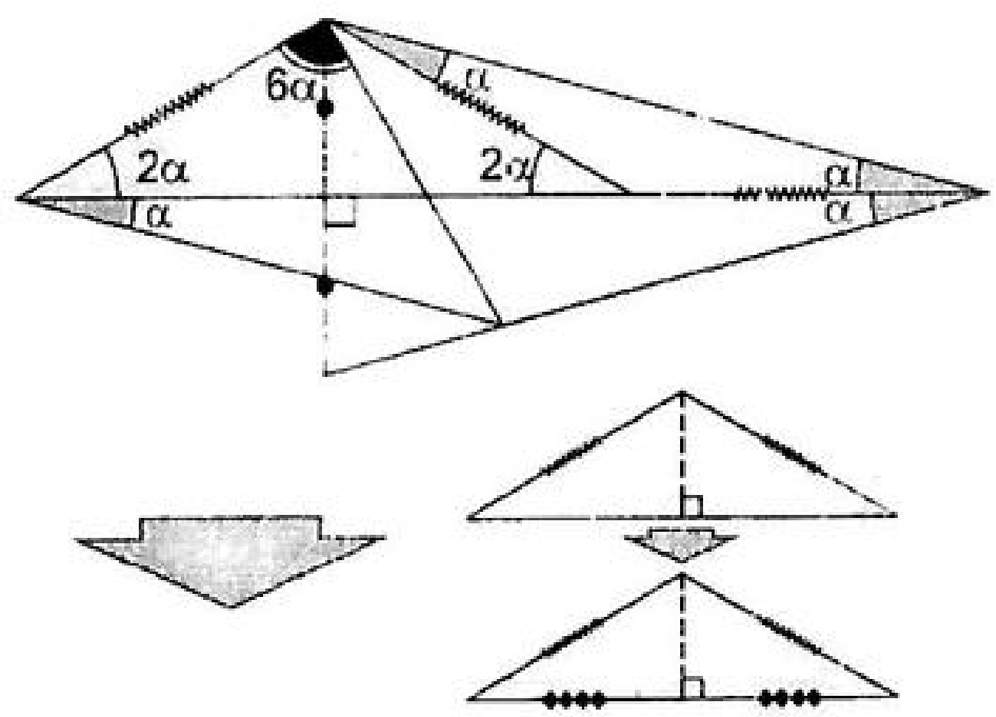
Paso N° 2. También se observa una bisectriz interior en la figura, entonces formamos un triángulo isósceles:

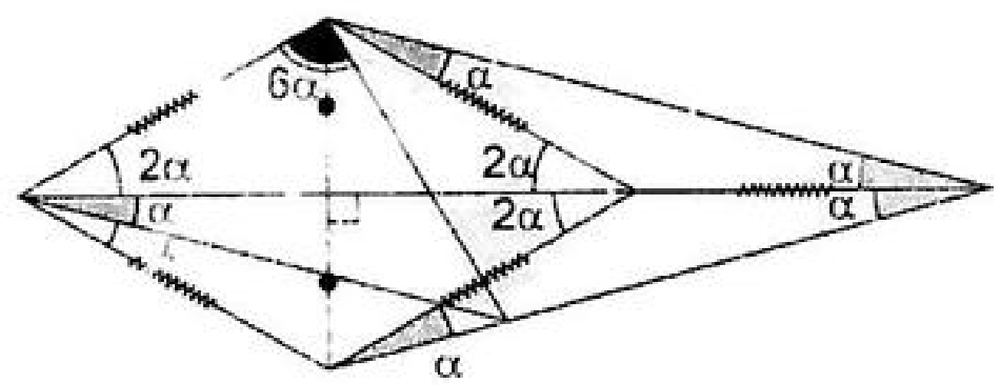


Paso N° 3. Obtenemos la siguiente figura con los siguientes trazos:



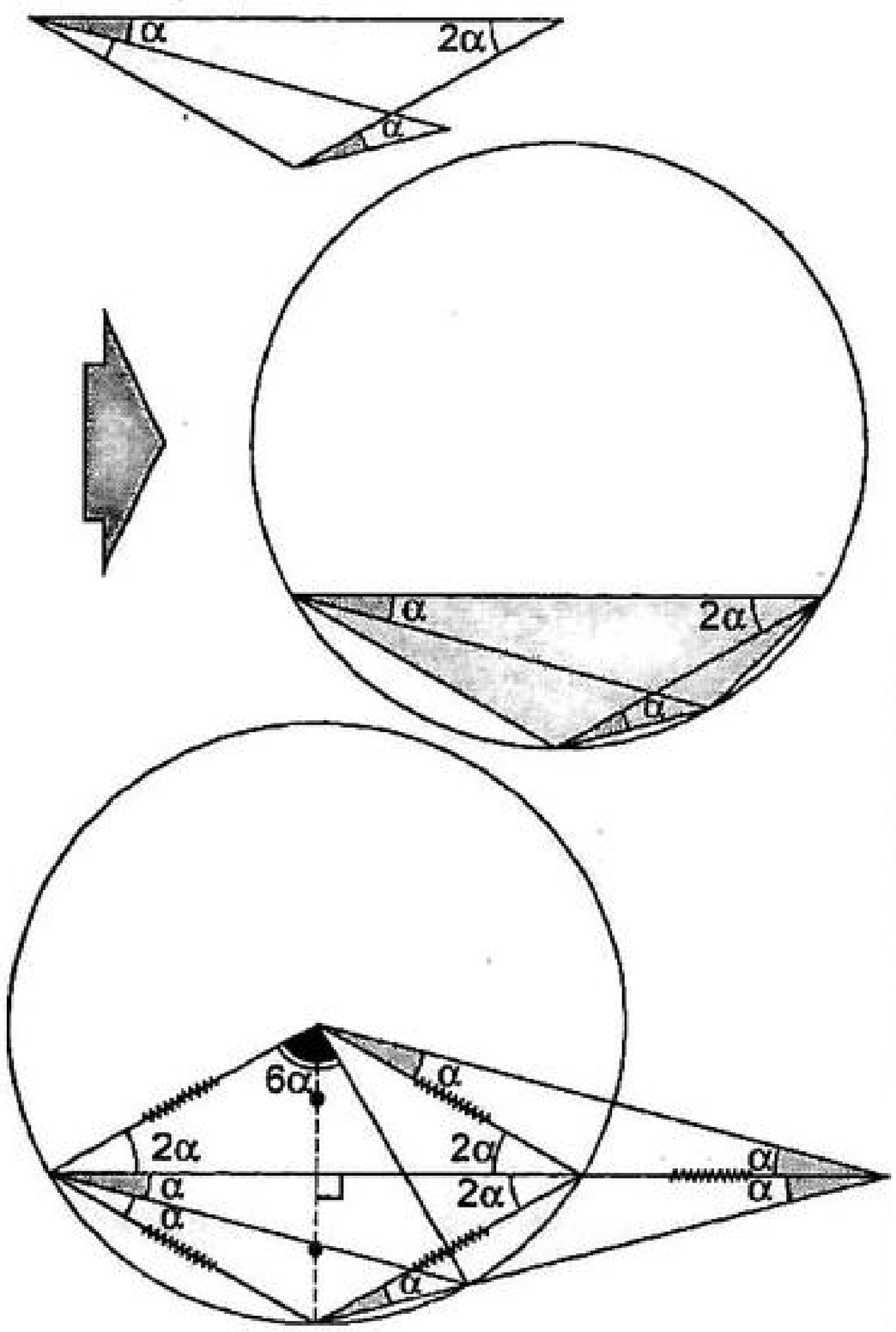
Paso N° 4. Se observa la siguiente figura (un triángulo isósceles:



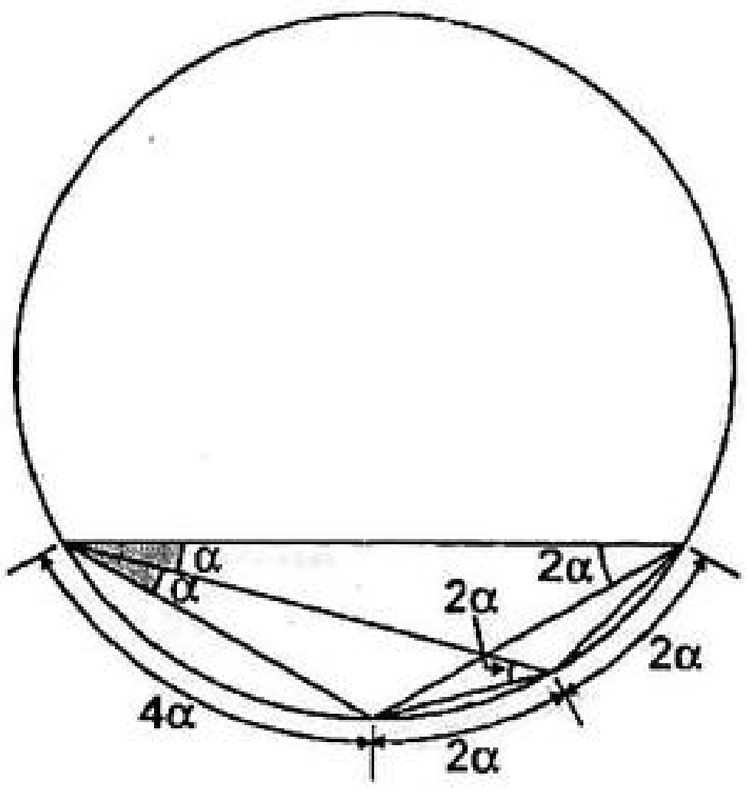


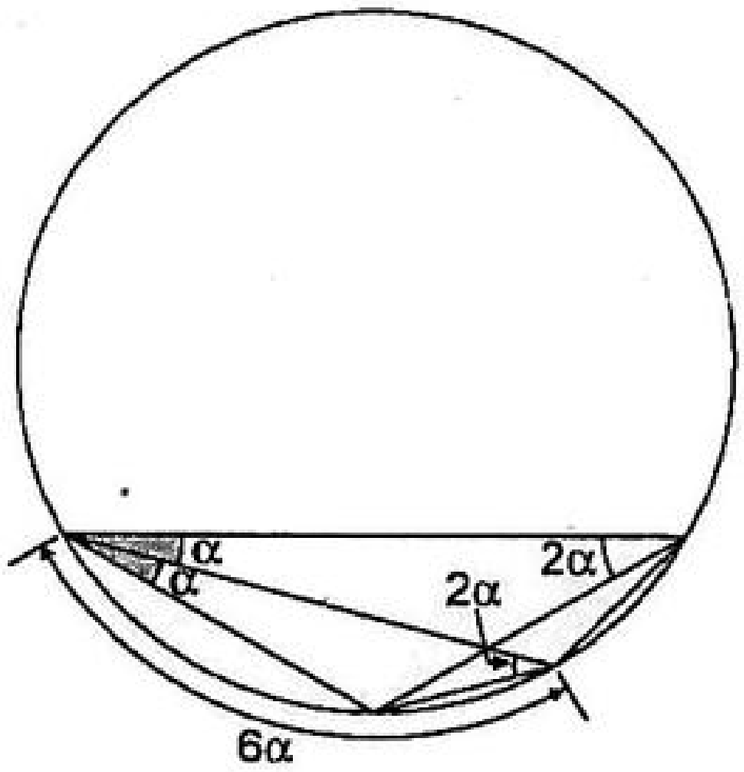
Scanned by CamScanner

Paso N° 5. Ahora se observa un cuadrilátero donde se cumple:

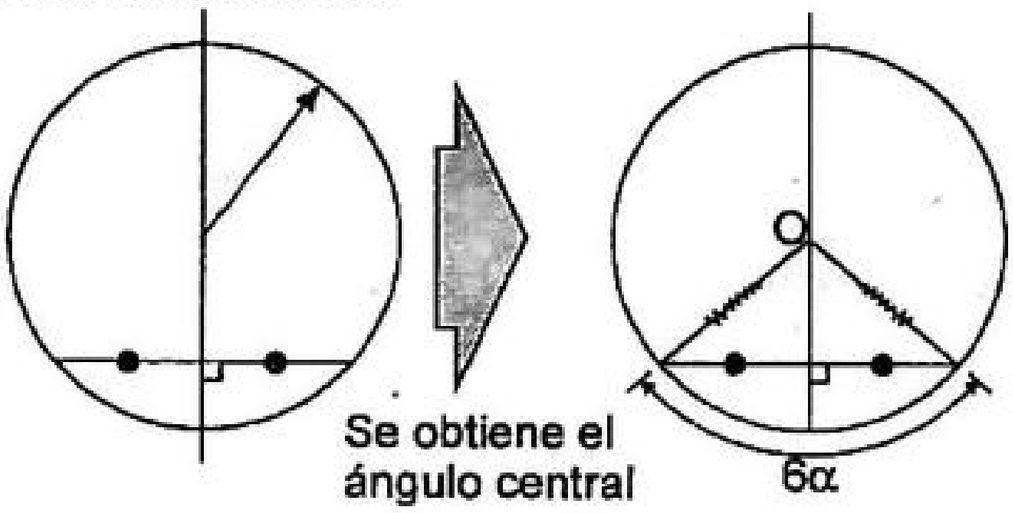


Aquí observamos:

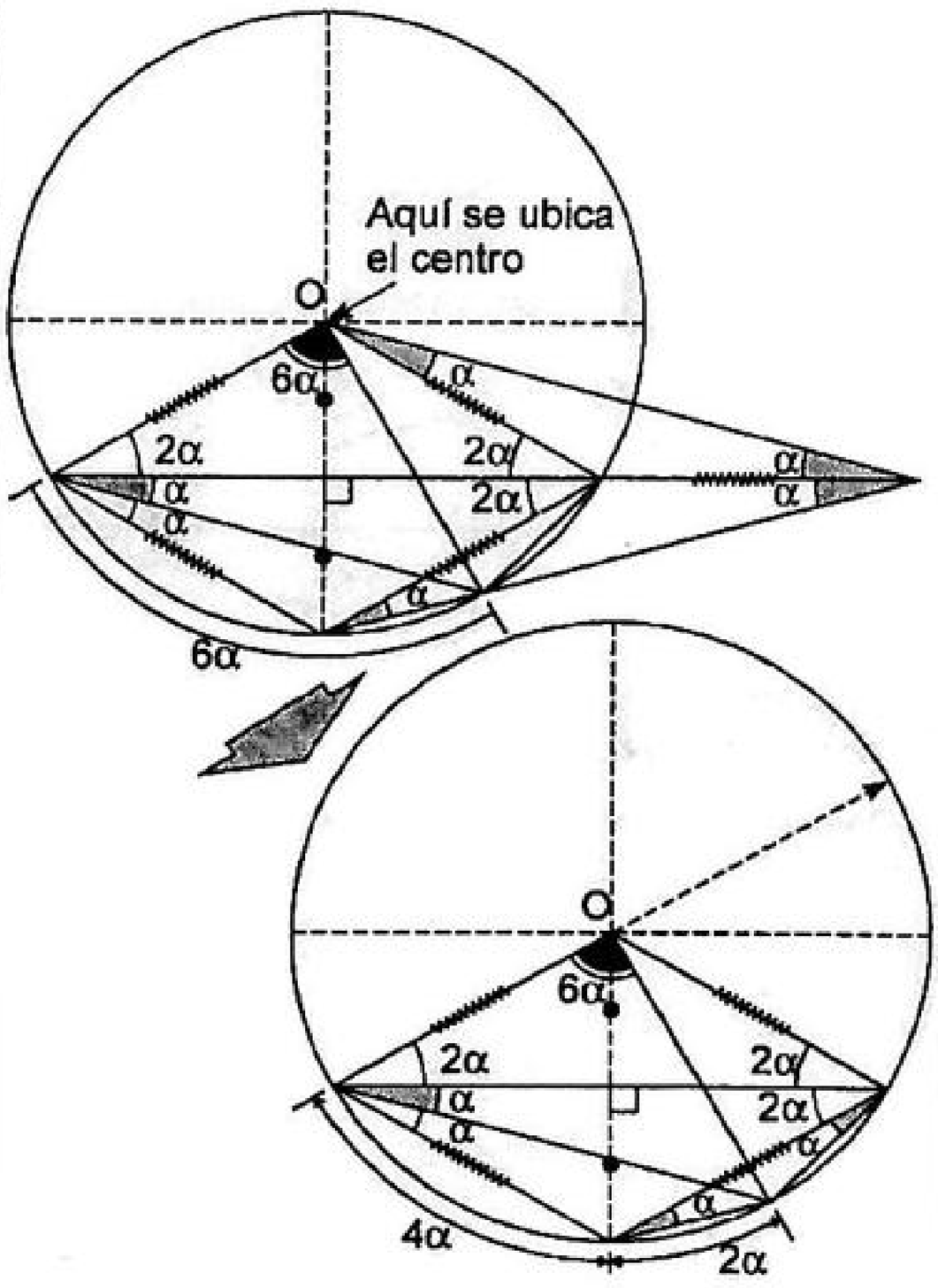




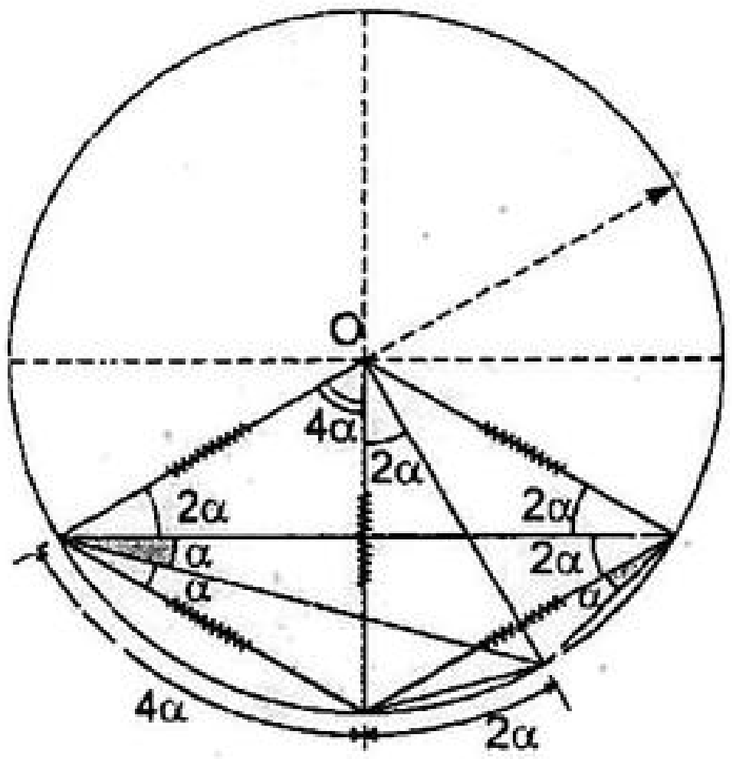
También sabemos:



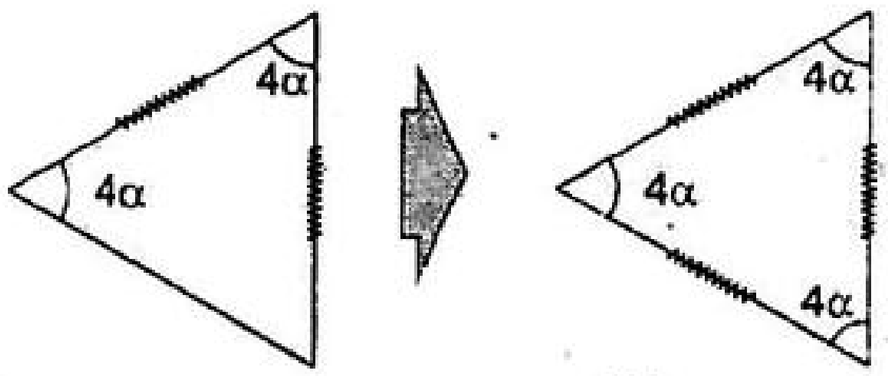
Paso N° 6. Observando la figura:



Scanned by CamScanner



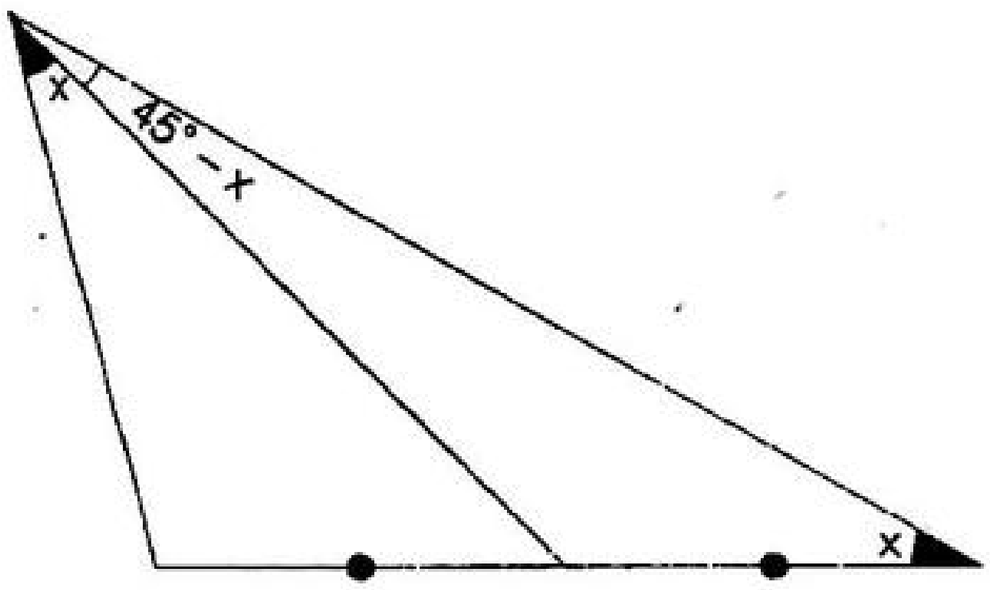
Se observa un triángulo:



$\therefore \alpha = 60°$

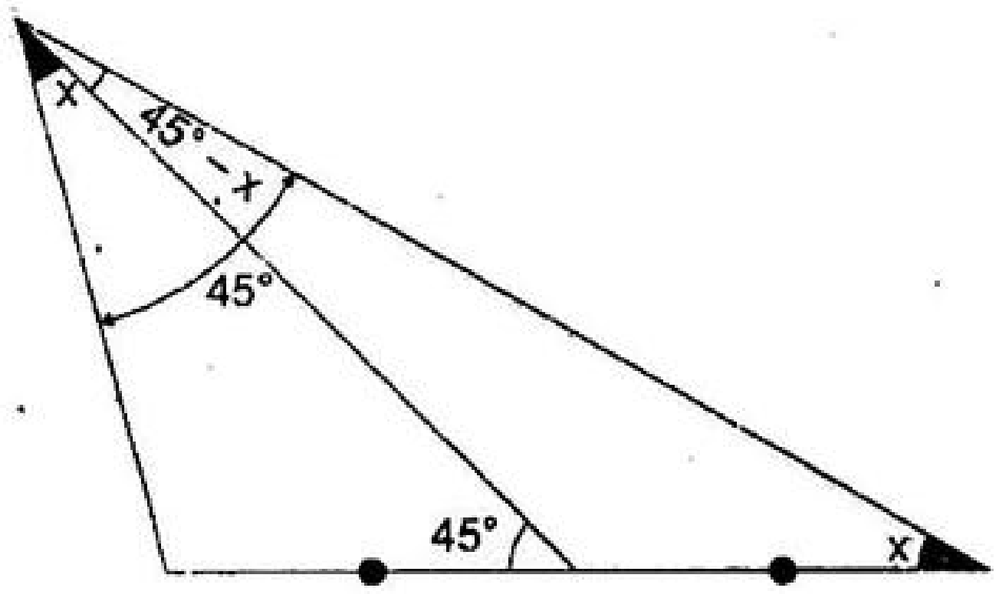
$\alpha = 15°$

Problema 38. Calcular x.

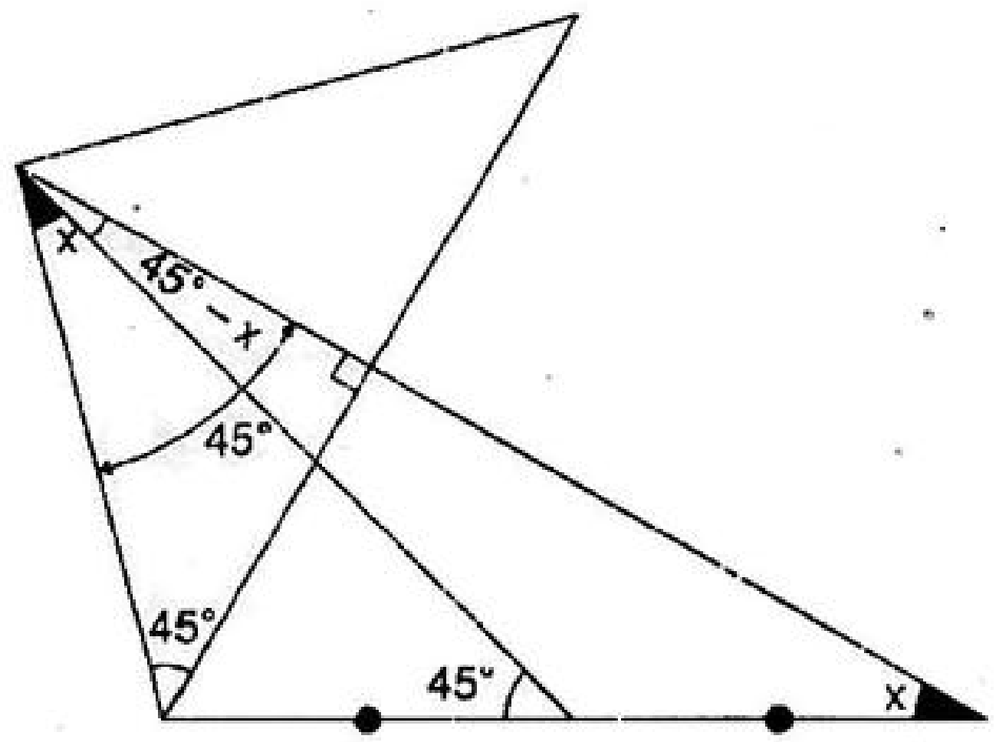


Resolución:

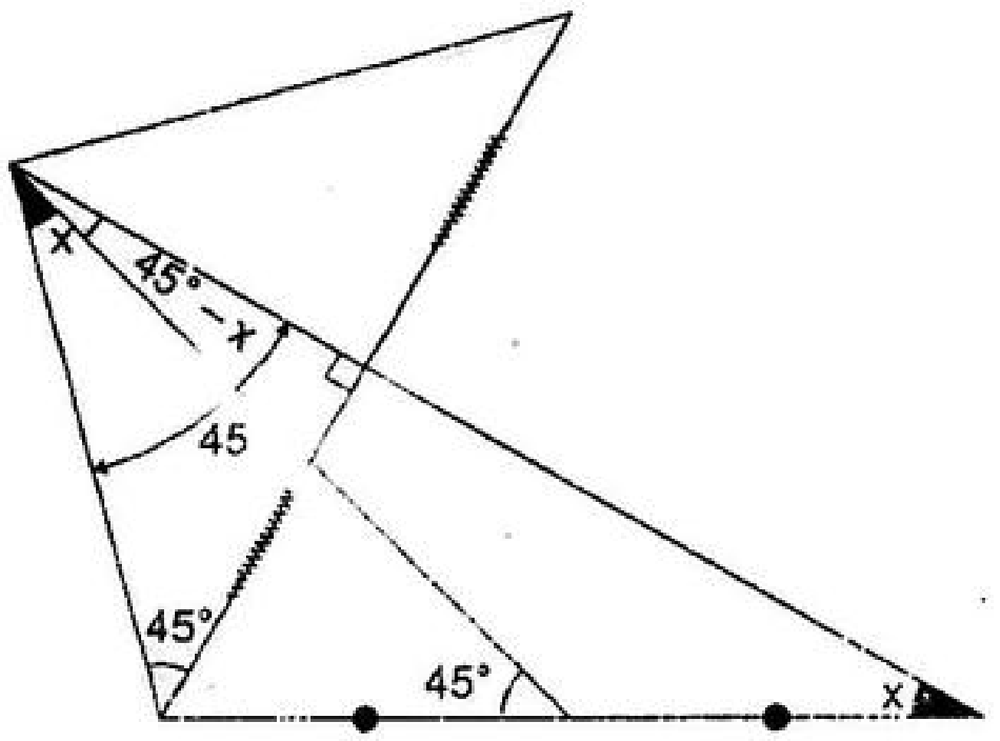
Paso N° 1. Observando los ángulos internos de la figura, tenemos:



Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo para obtener un ángulo de 45°:

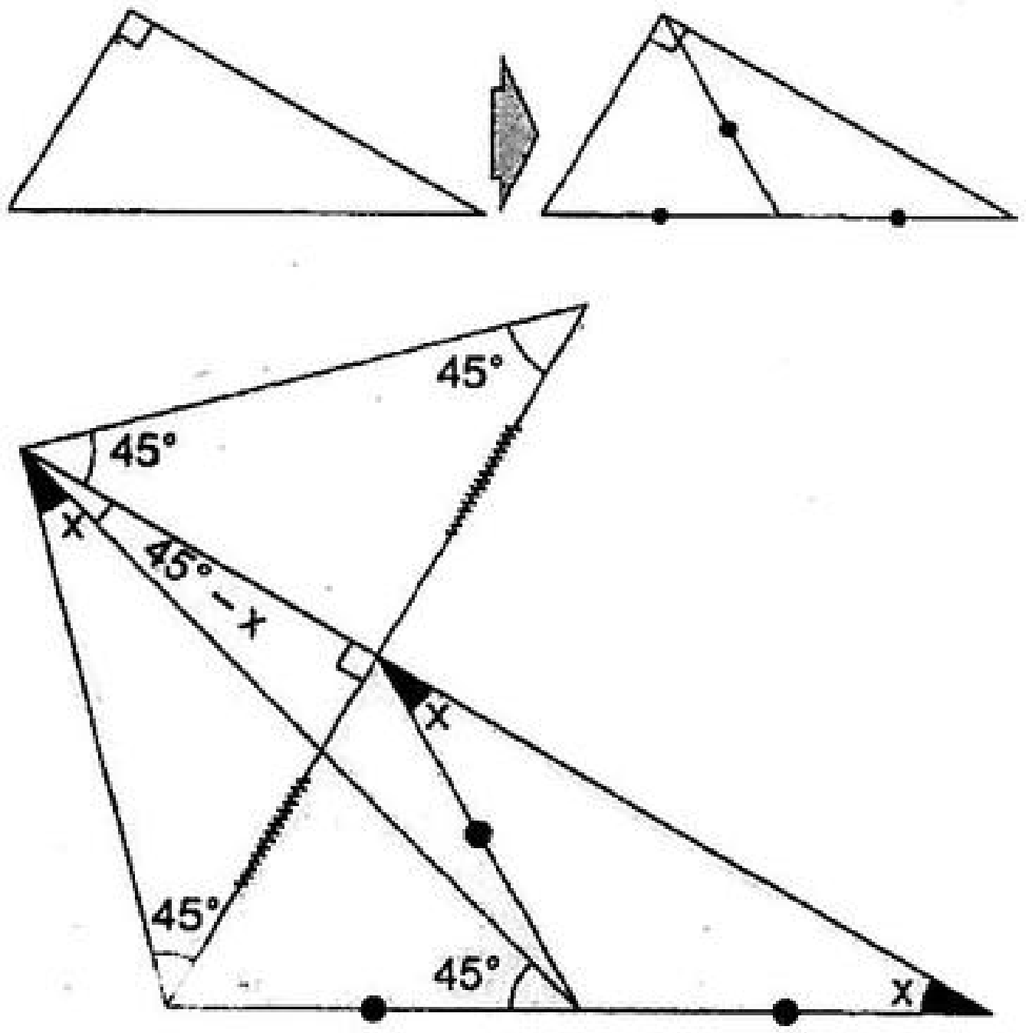


Completamos el trazo realizado de la siguiente manera:

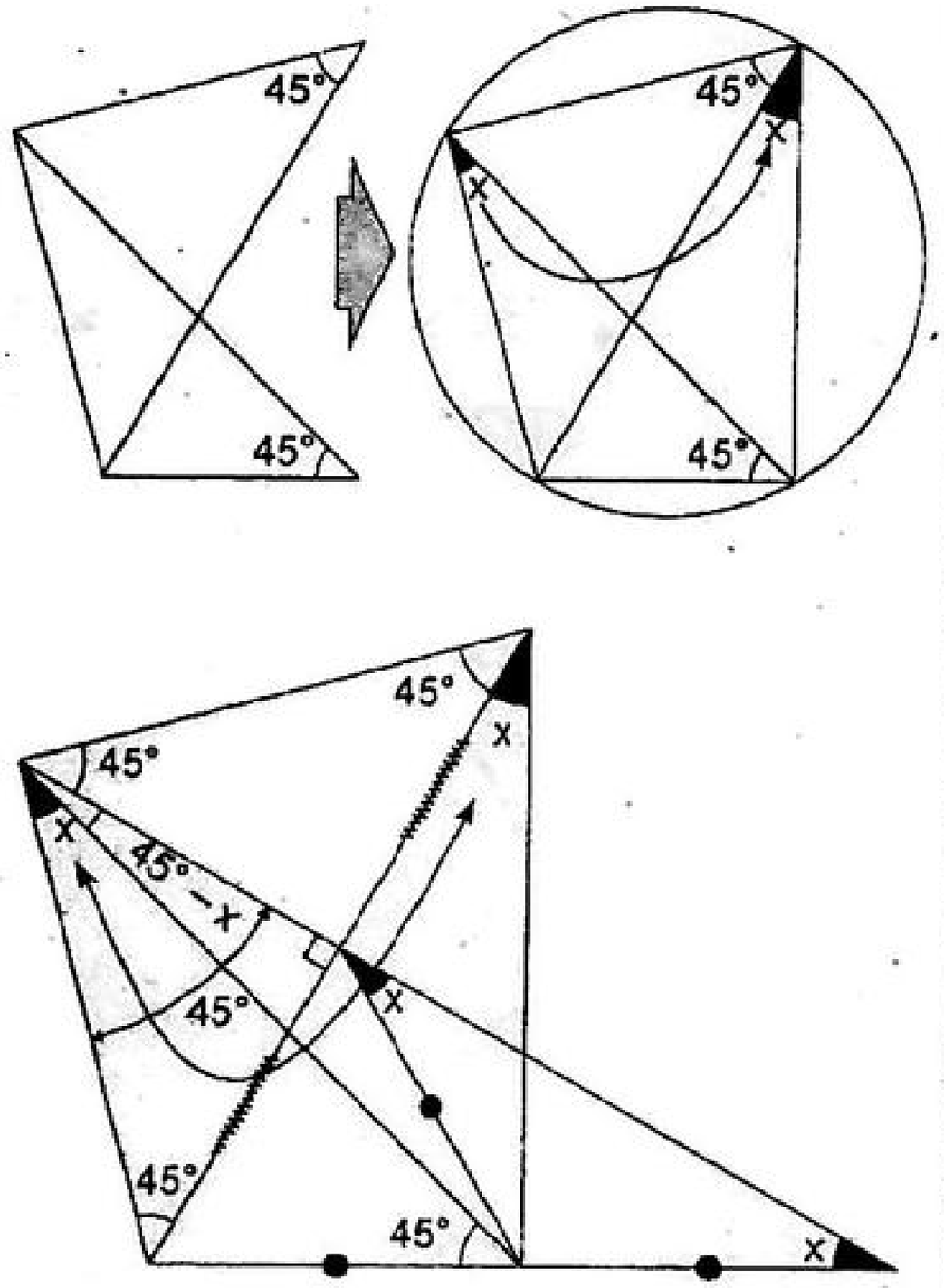


Scanned by CamScanner

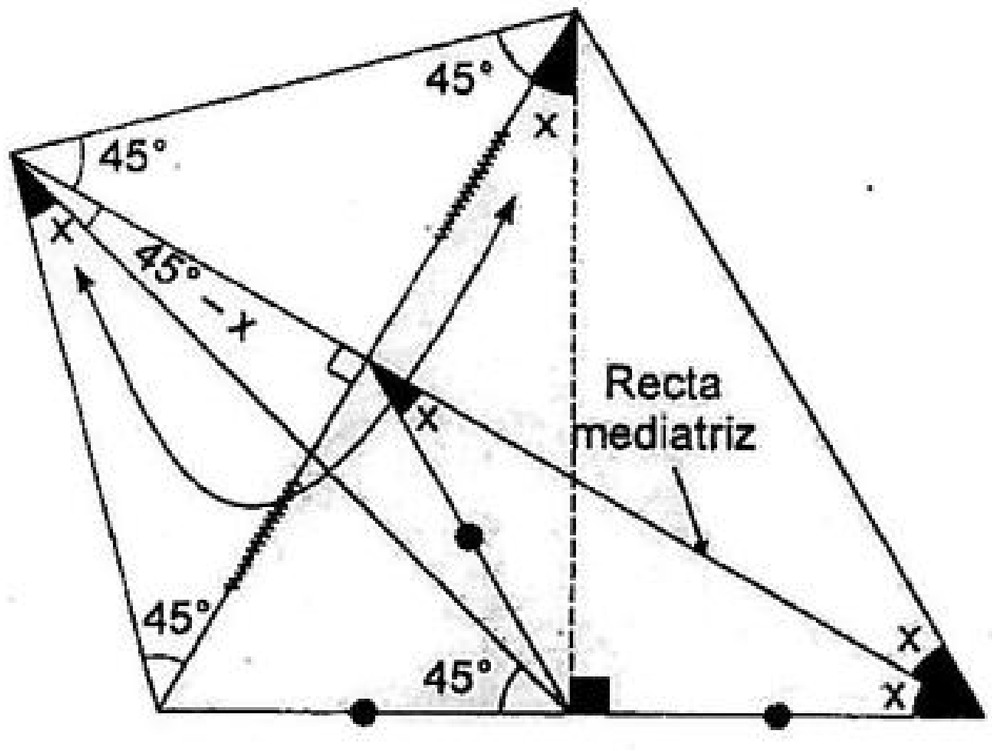
Paso N° 3. Se observa que se tiene la siguiente propiedad:



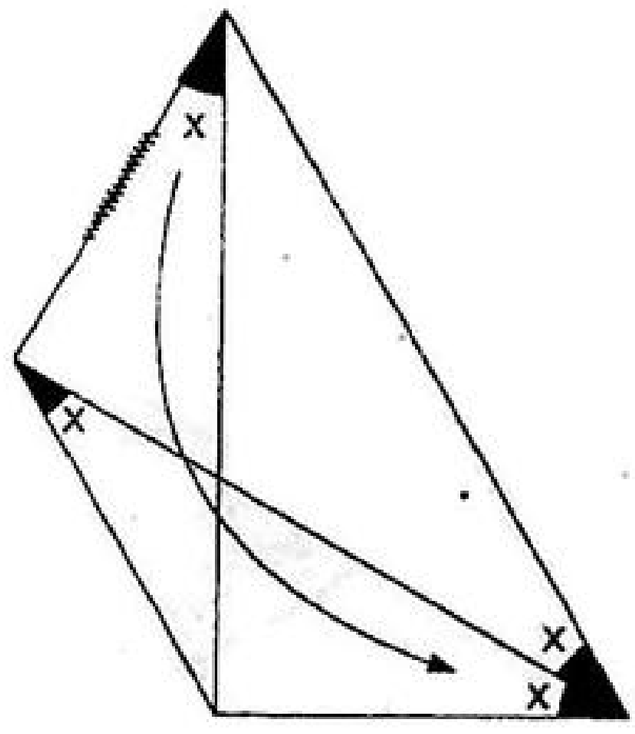
Paso N° 4. También se observa un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del pantalón o rebote:

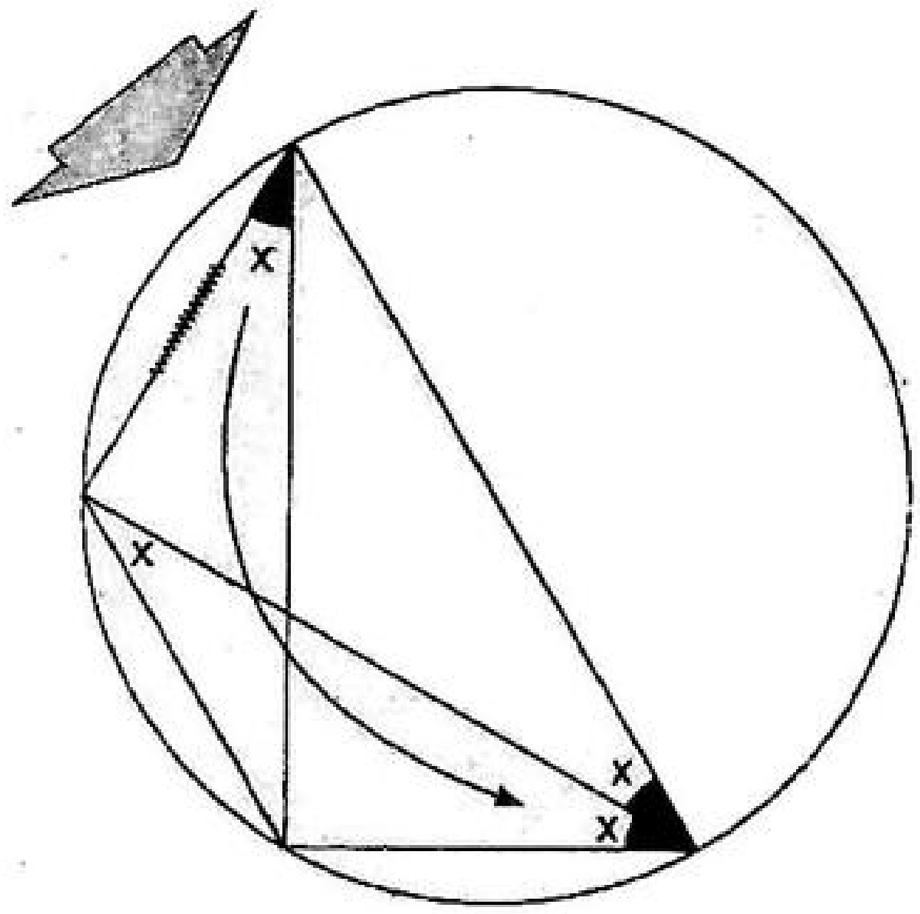


Paso N° 5. Se tiene una recta mediatriz en la figura:

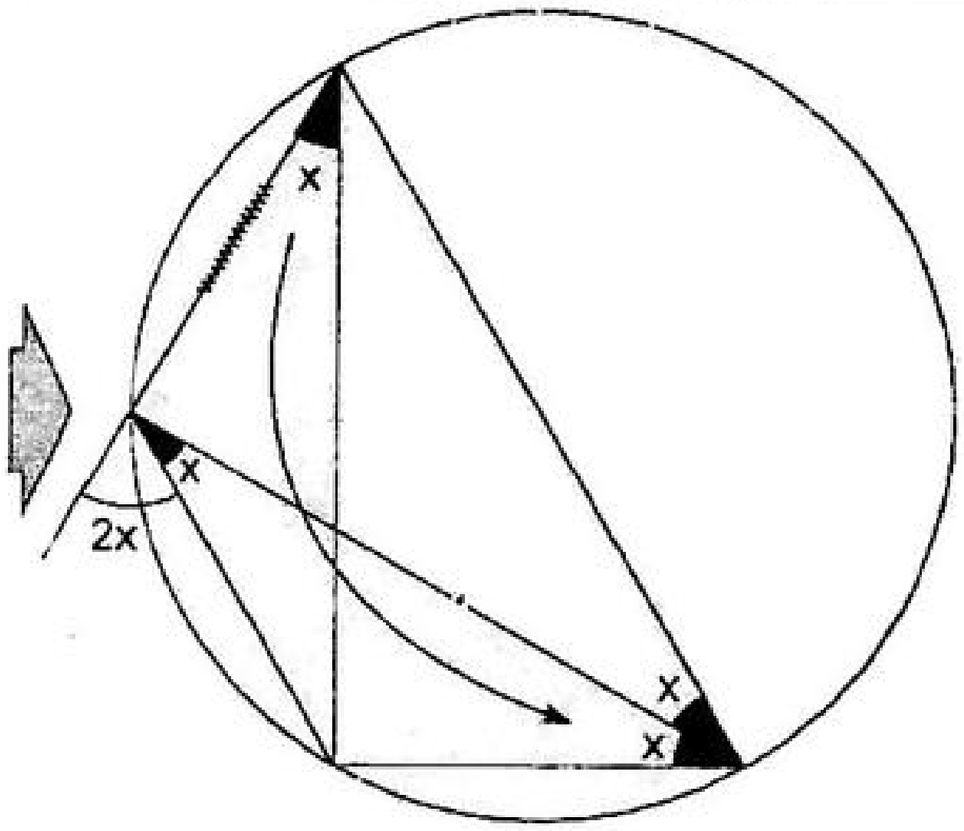


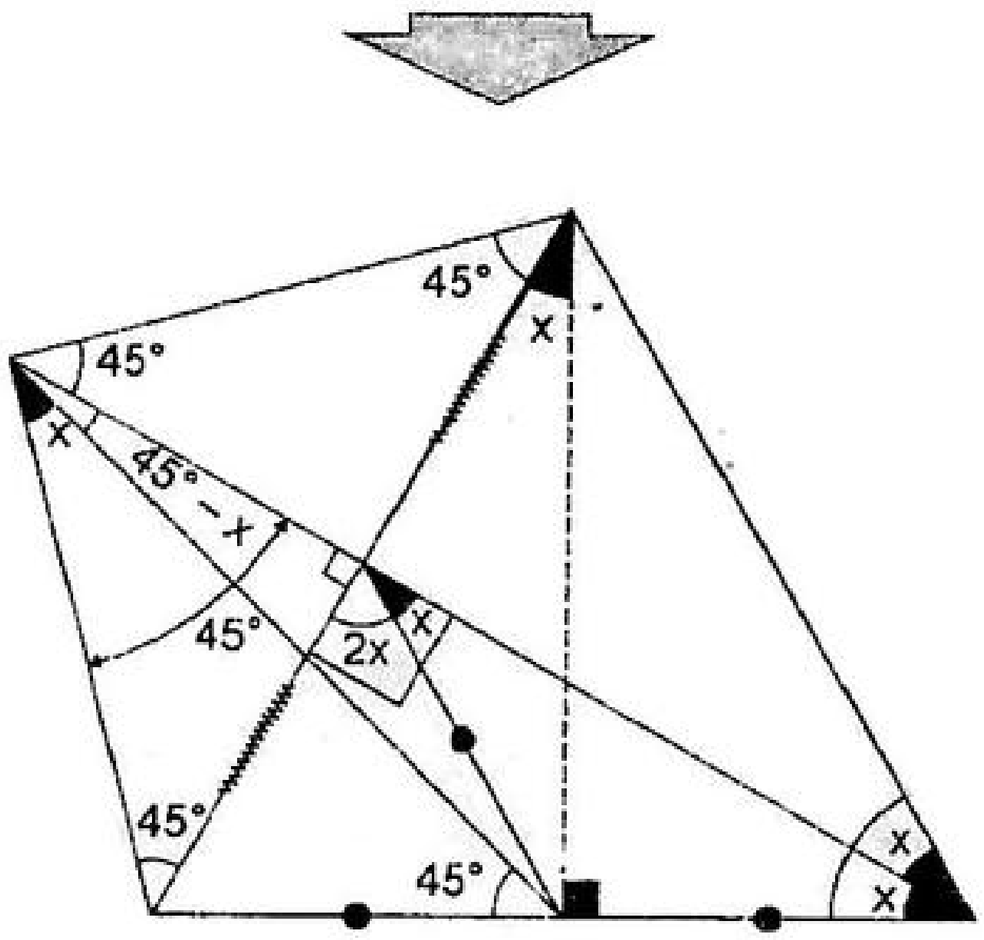
Paso N° 6. También se observa un nuevo cuadrilátero donde también se cumple la propiedad del pantalón o rebote



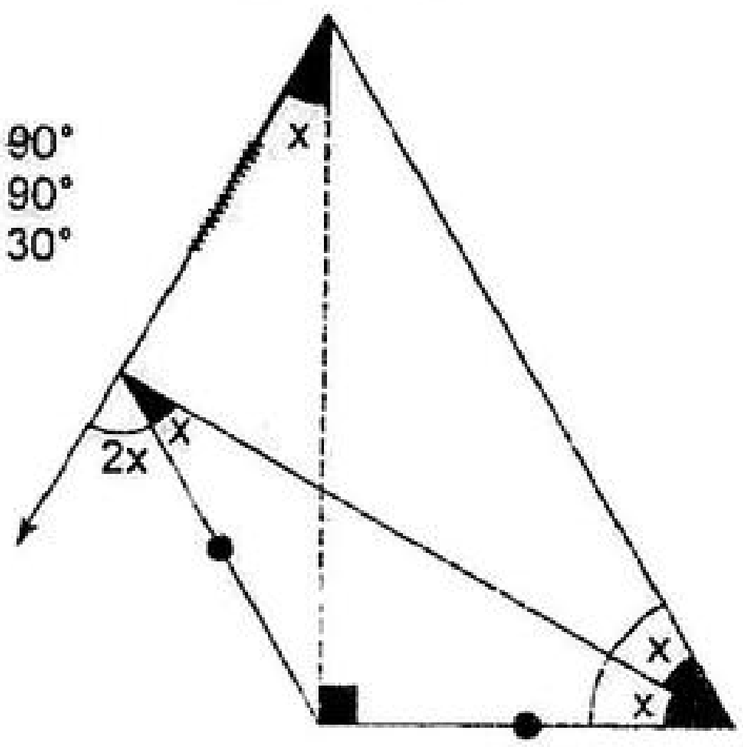


Scanned by CamScanner





Paso N° 7. Tenemos la siguiente figura:

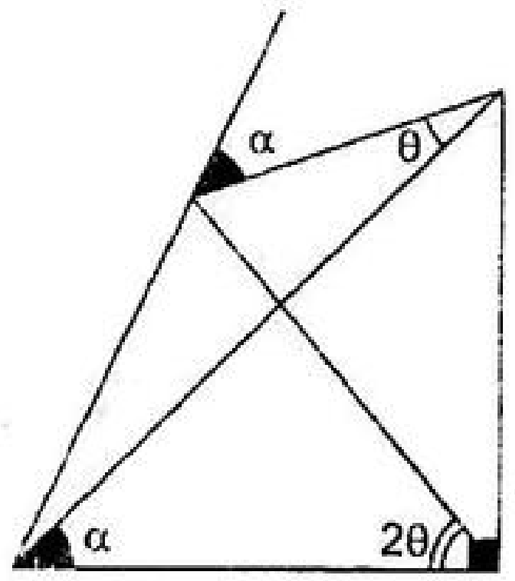


$\therefore x + 2x = 90°$

$3x = 90°$

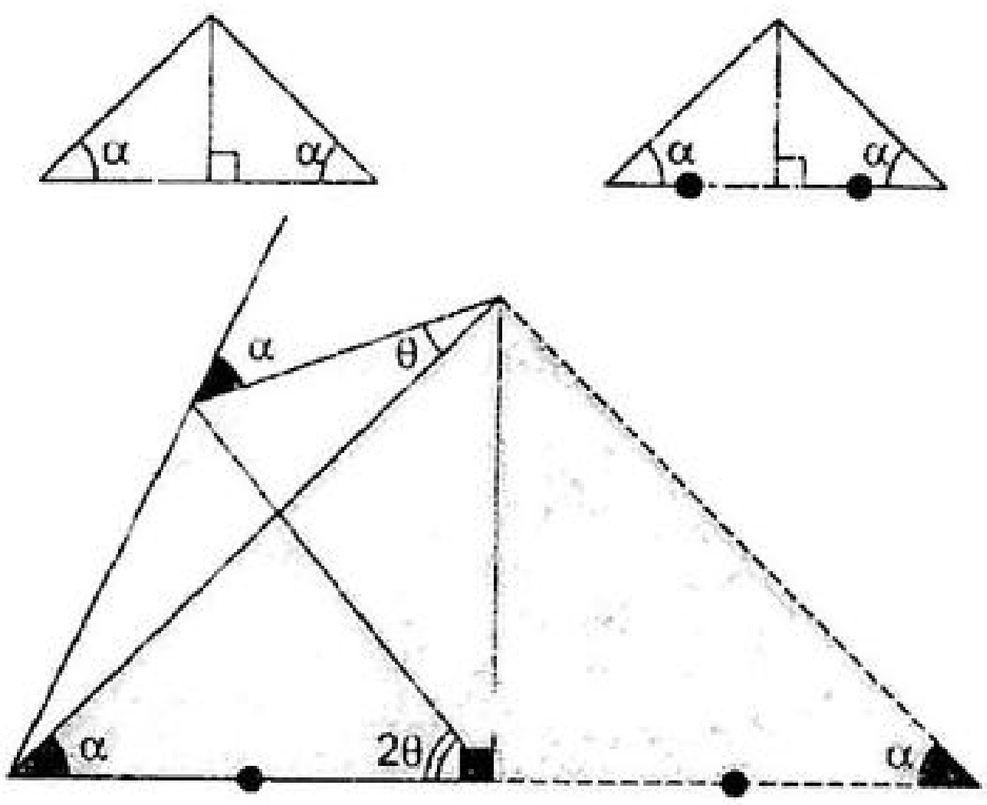
$x = 30°$

Problema 39. Calcular x.

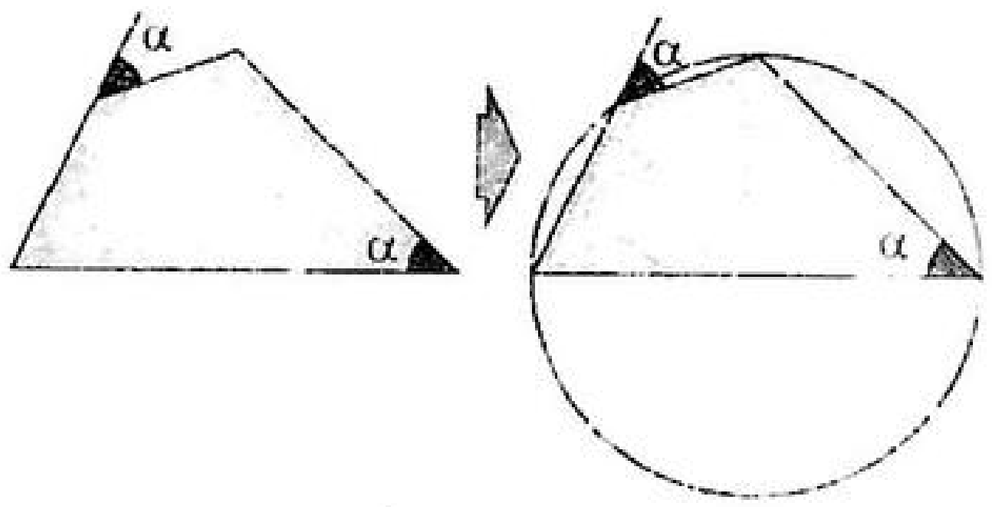


Resolución:

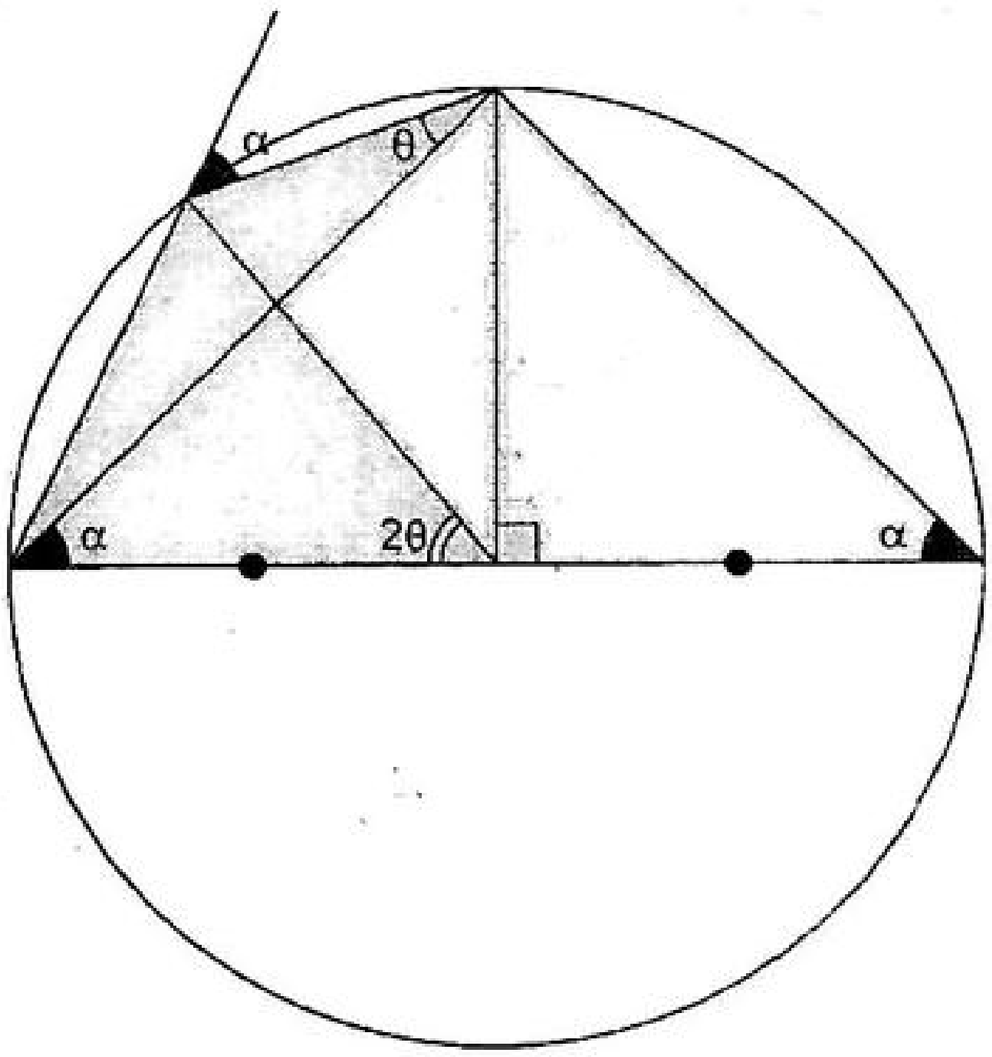
Paso N° 1. Completamos la figura dada a un triángulo isósceles, de la siguiente manera:



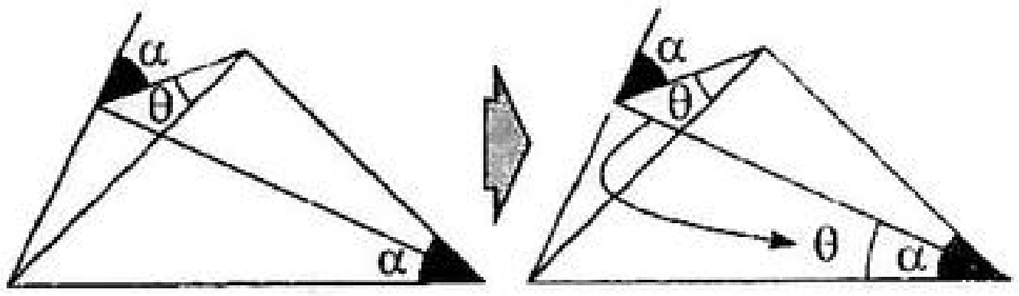
Paso N° 2. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple:

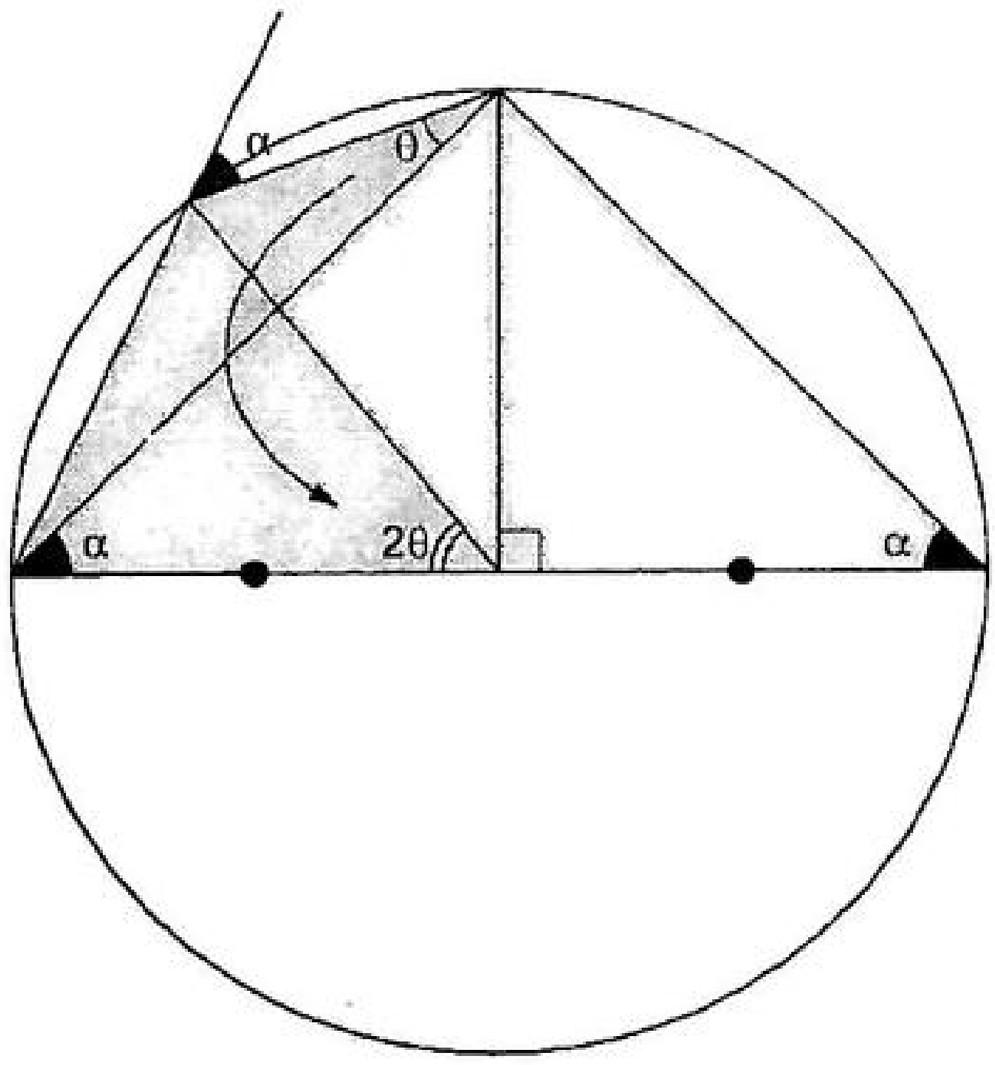


Scanned by CamScanner

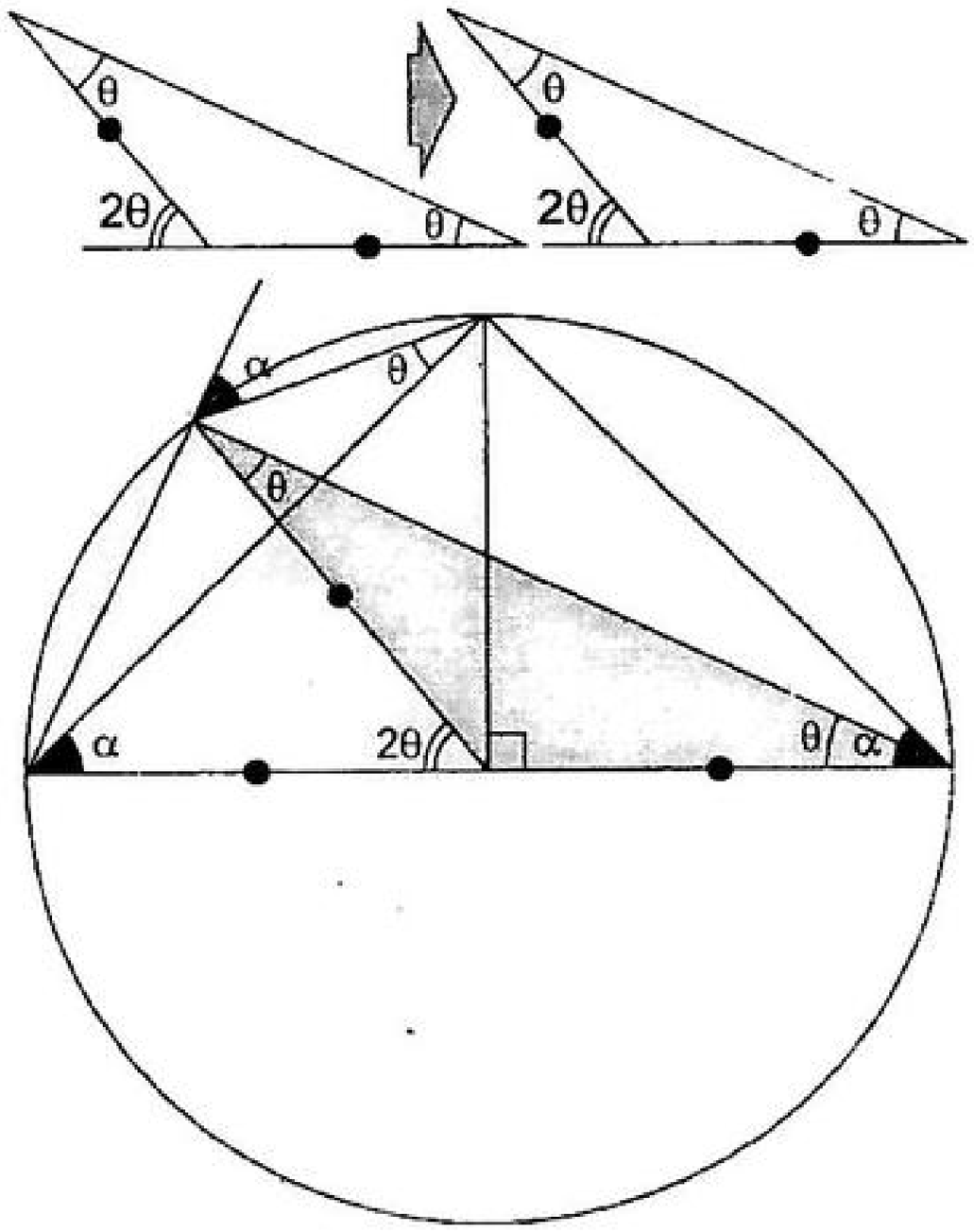


Tambien cumple

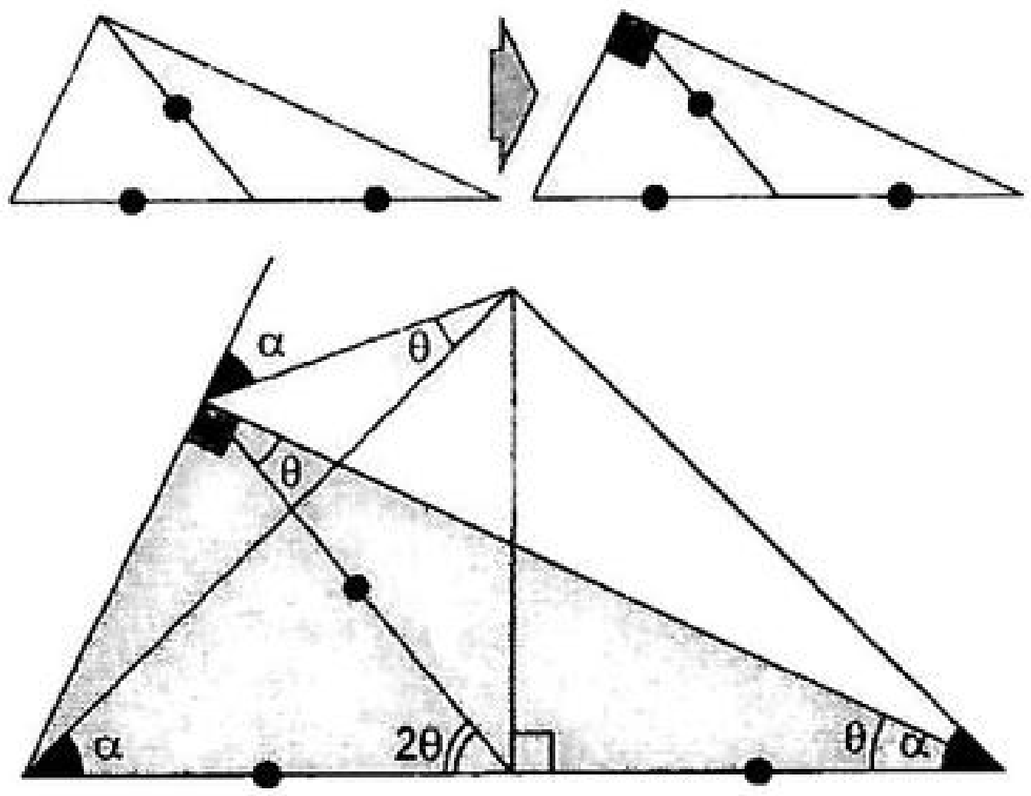




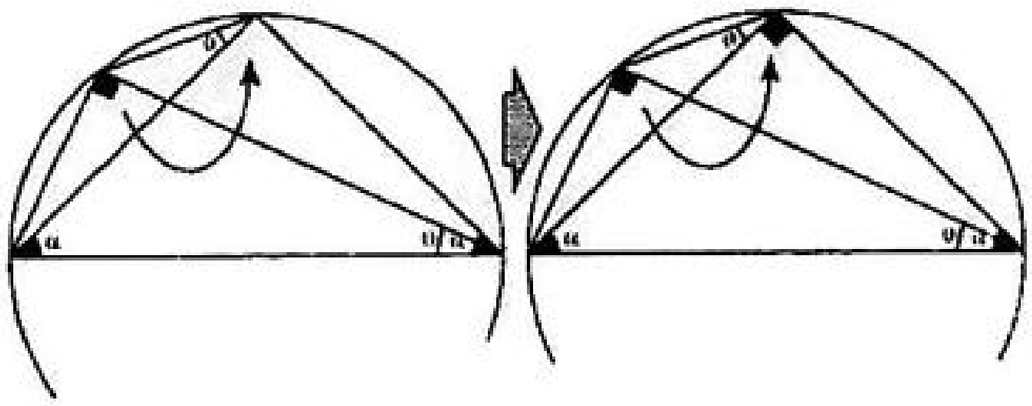
Paso N° 3. Se observa en el interior al cuadrilátero inscriptible, la siguiente figura:



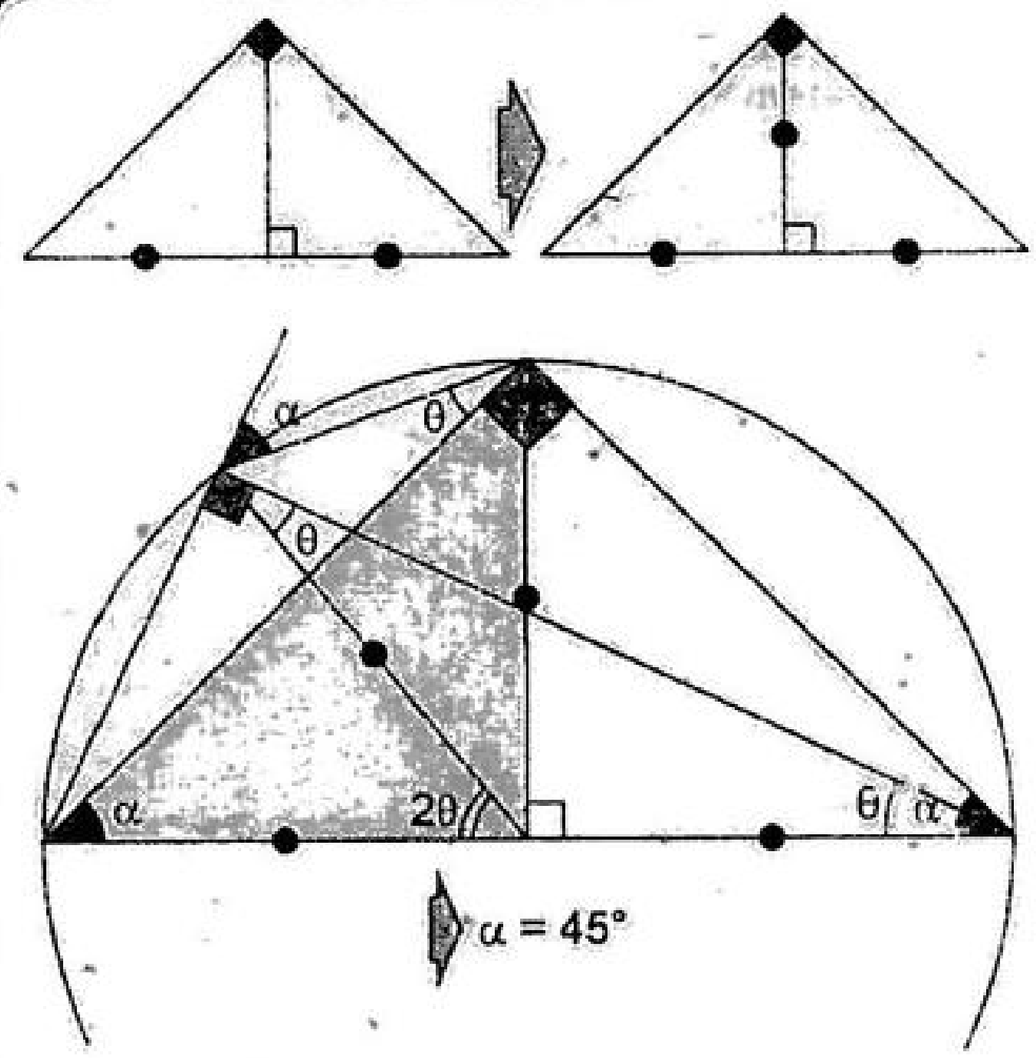
Paso N° 4. Aquí se cumple:



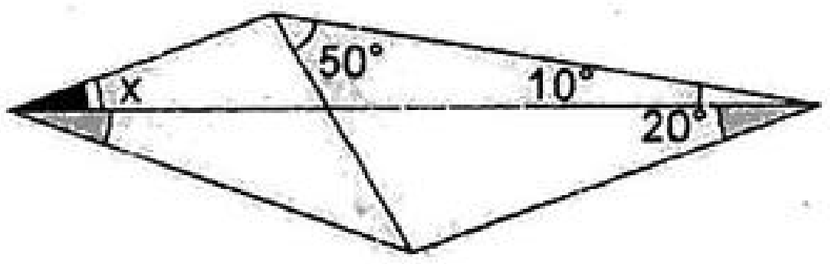
Se observa



Scanned by CamScanner

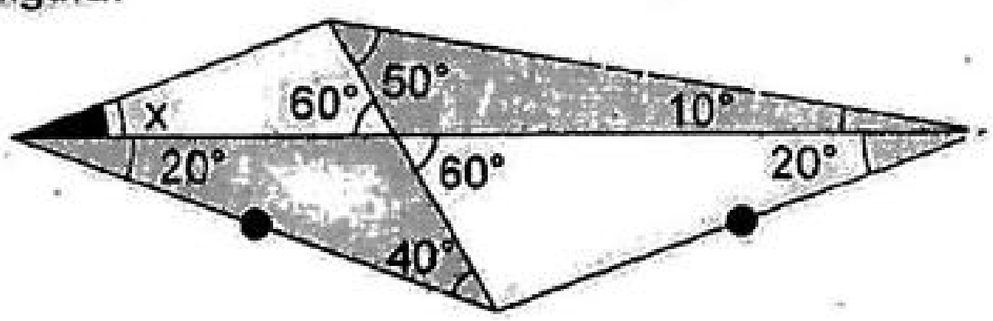


Problema 40. Calcular α.

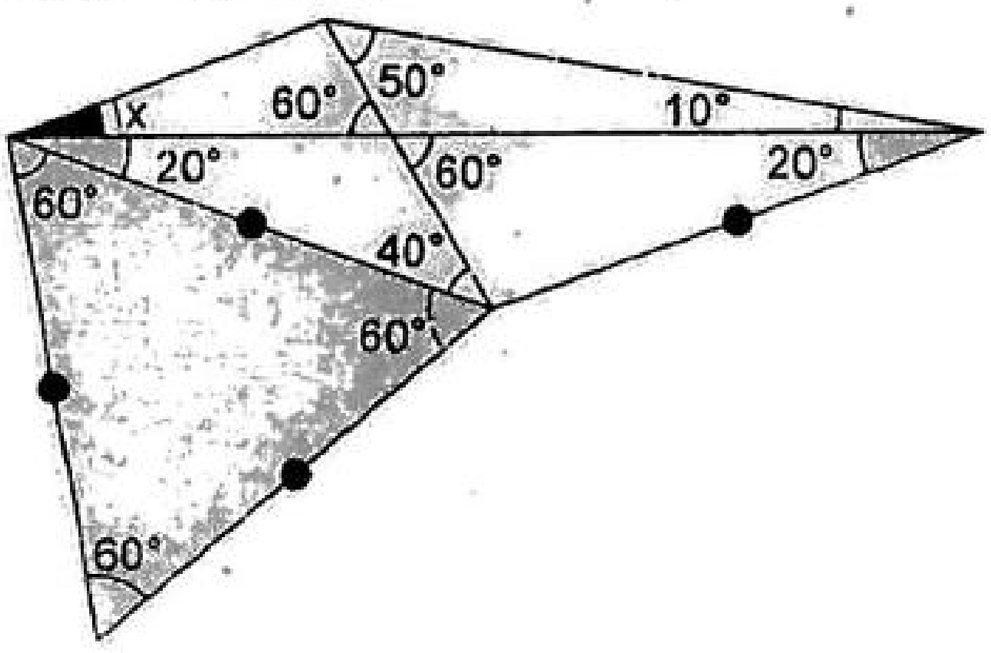


Resolución:

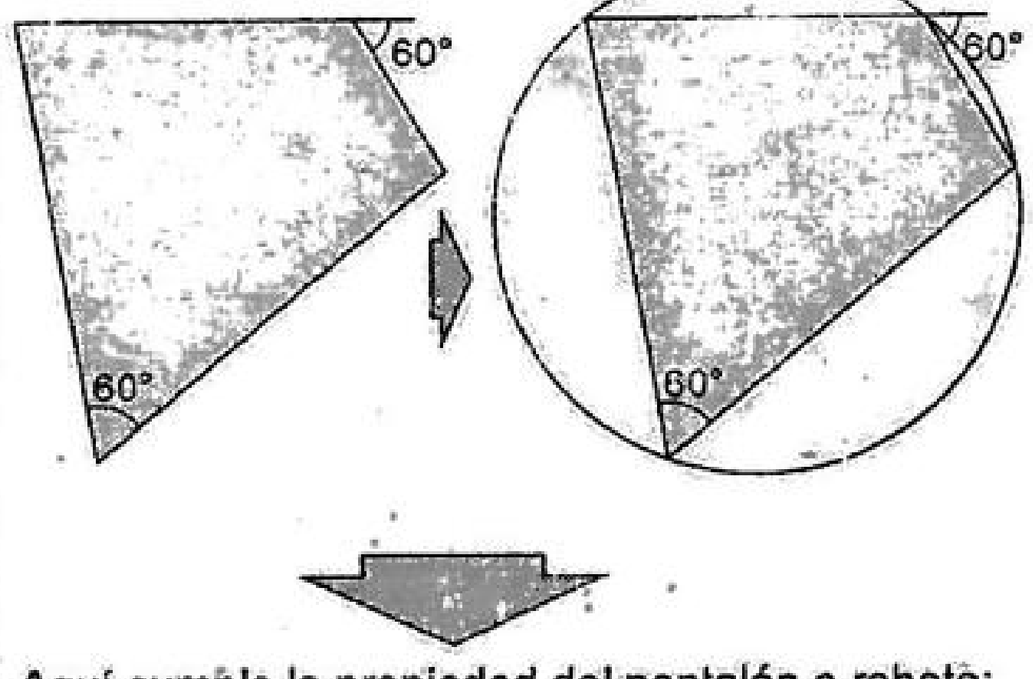
Paso N° 1. Se completa los ángulos internos en la figura:



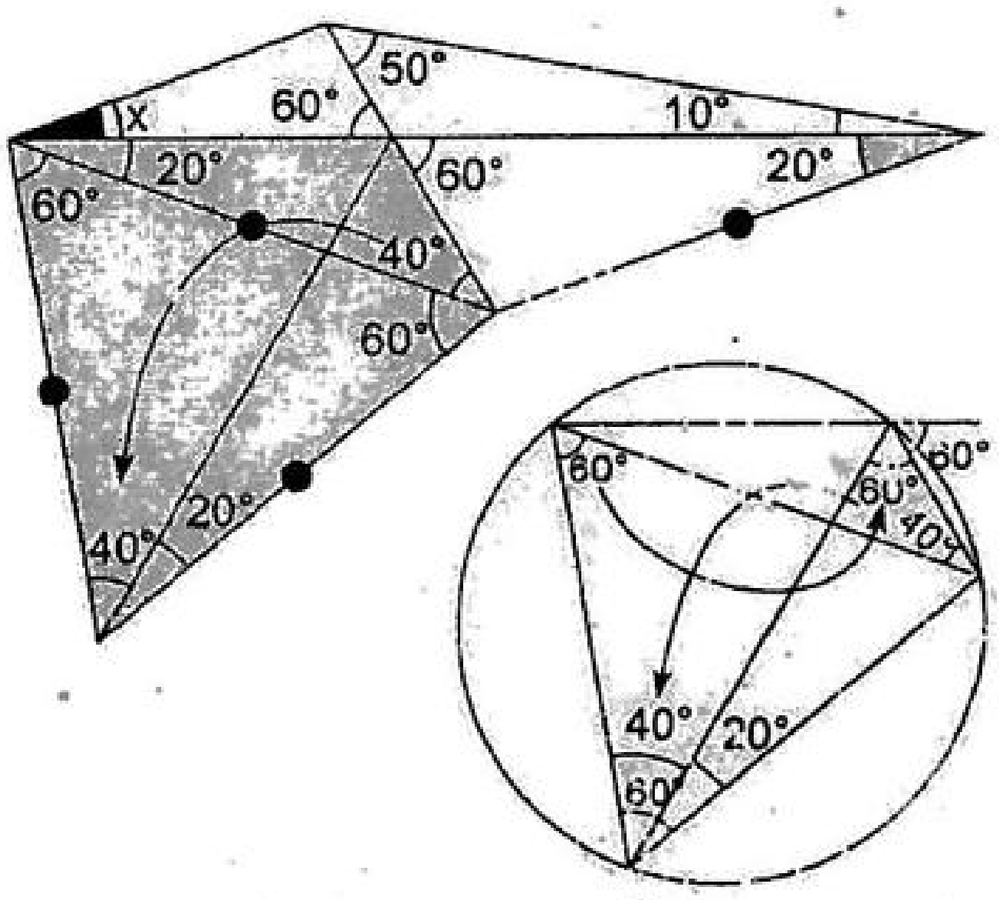
Paso N° 2. Construimos externamente un triángulo equilátero:



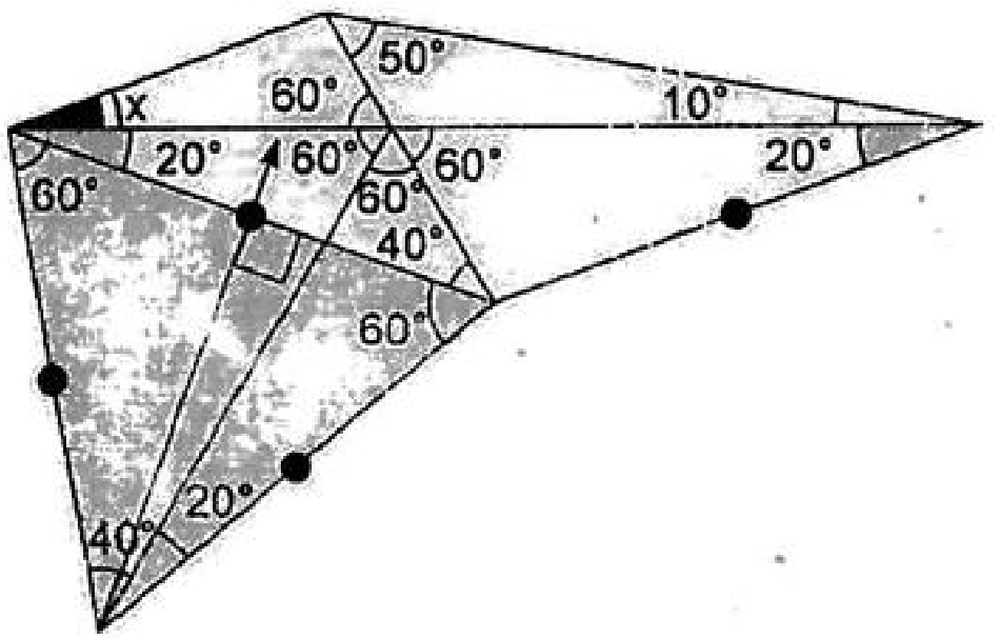
Paso N° 3. Con ello se obtiene un cuadrilátero donde cumple:



Aquí cumple la propiedad del pantalón o rebote:

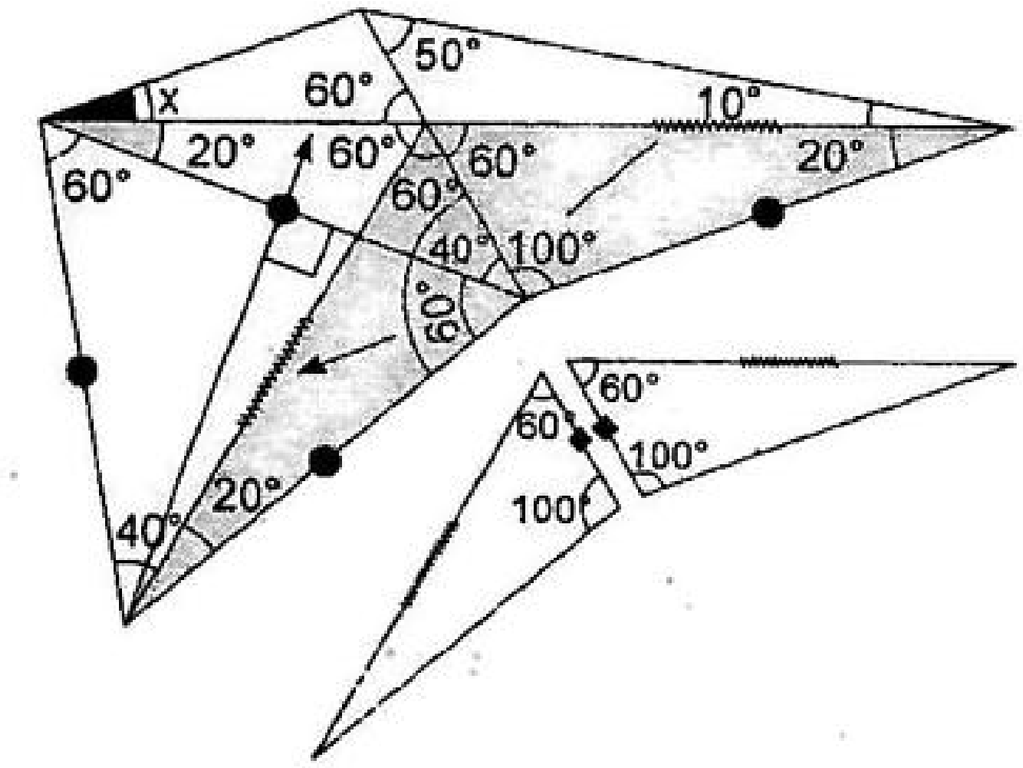


Paso N° 4. Ahora trazamos la mediatriz del triángulo equilátero:

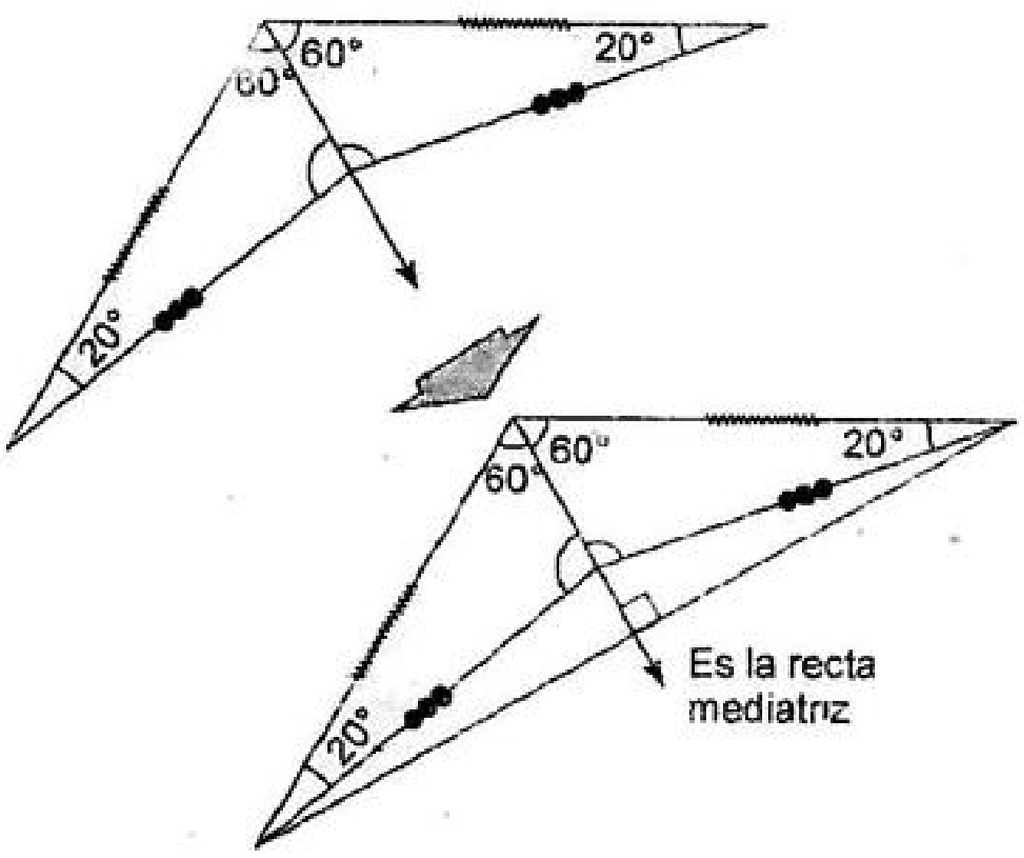


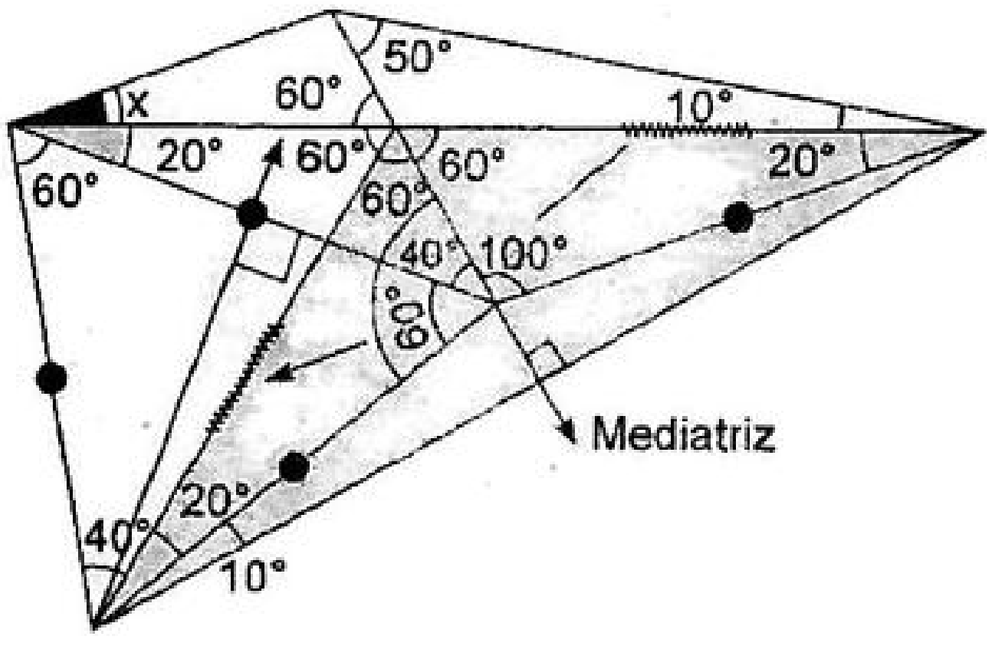
Scanned by CamScanner

Paso N° 5. Se observa congruencia de triángulos:

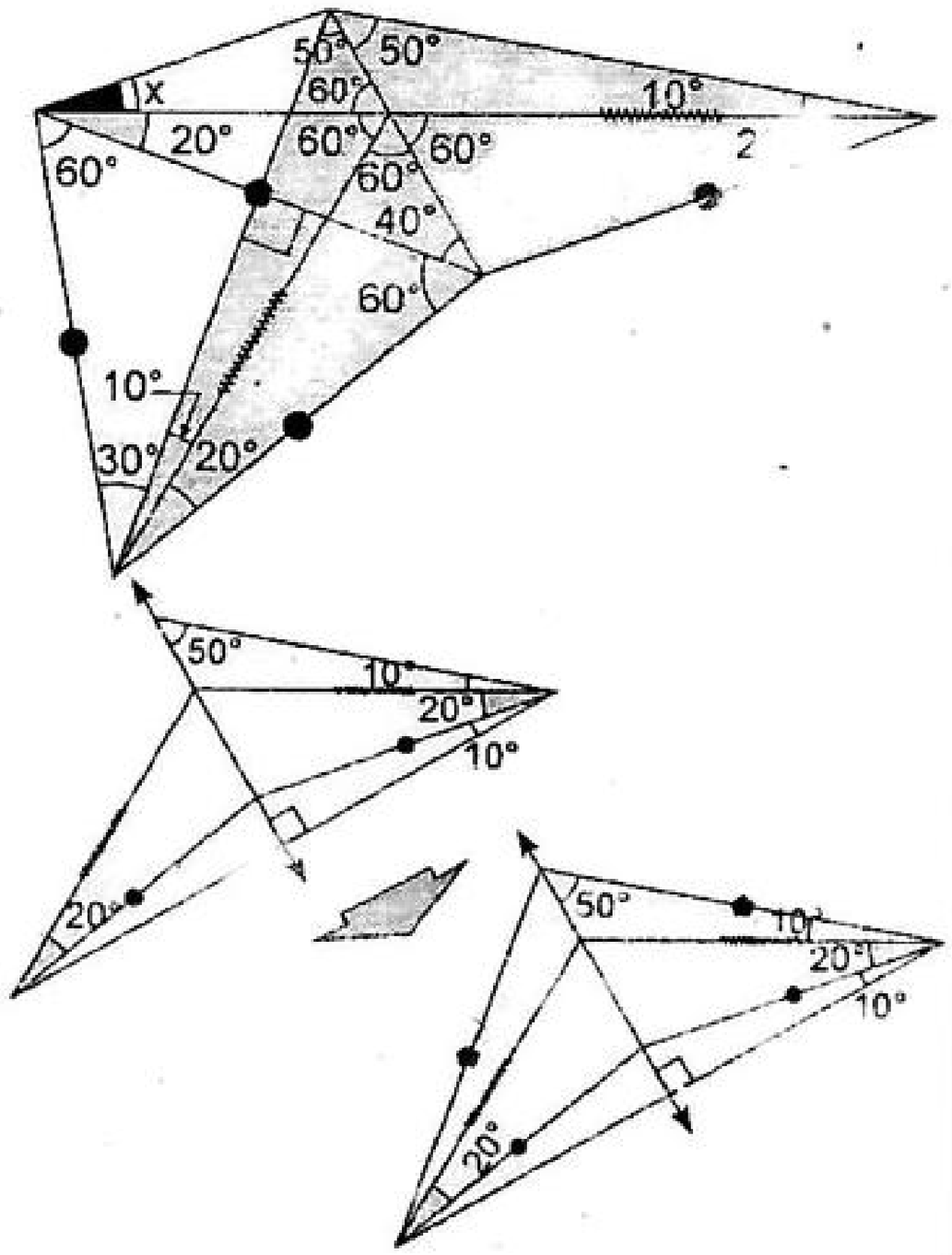


Paso N° 6. Se observa que se cumple la siguiente propiedad:

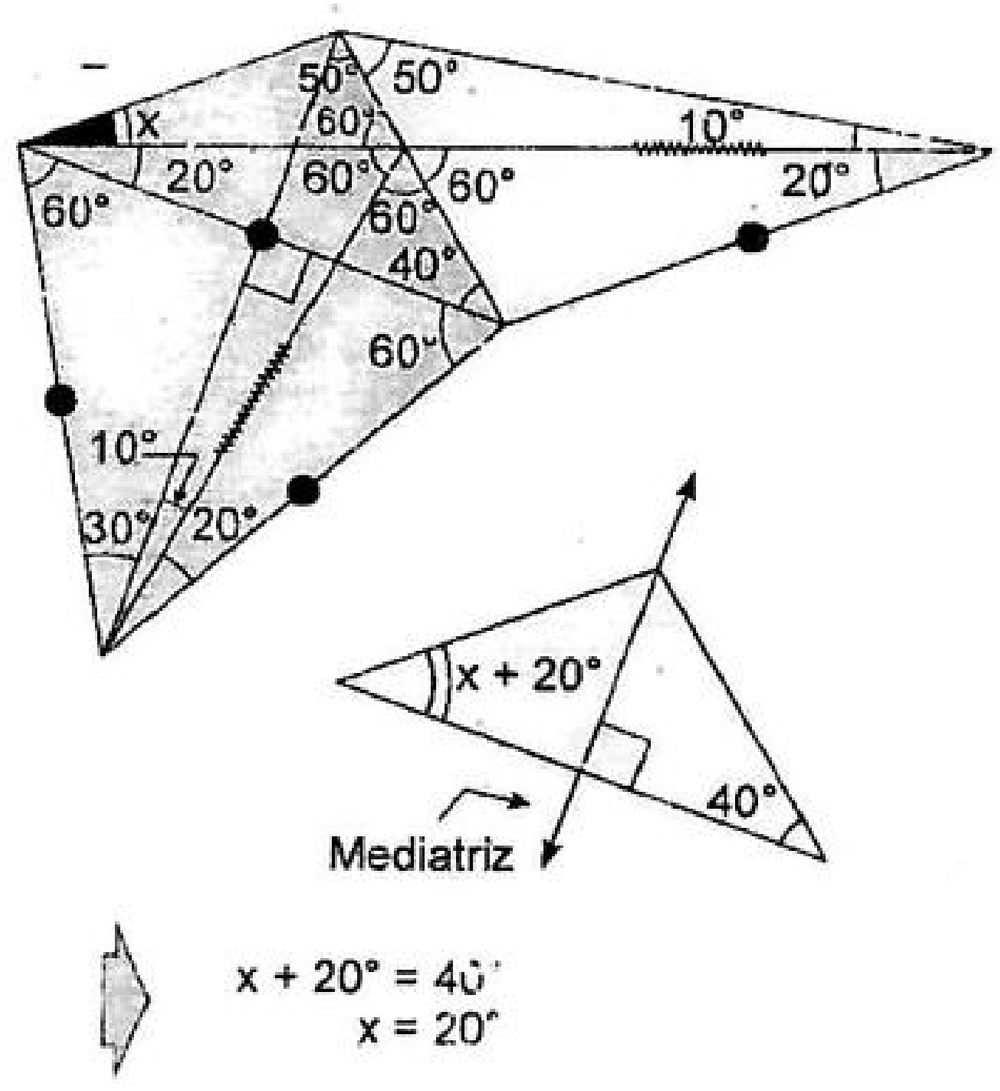




Paso N° 7. Del paso 4, también la altura del triángulo equilátero forma la siguiente figura:



Paso N° 8. Se observa:

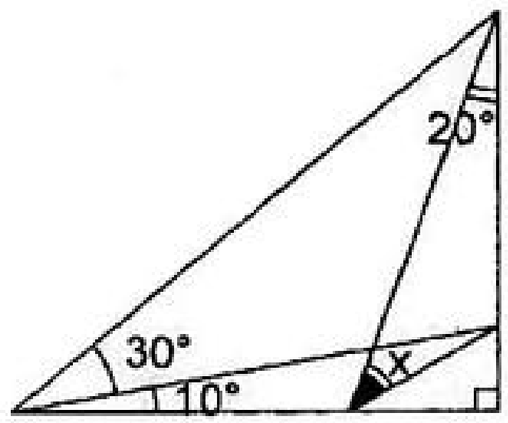


$x + 20° = 40°$

$x = 20°$

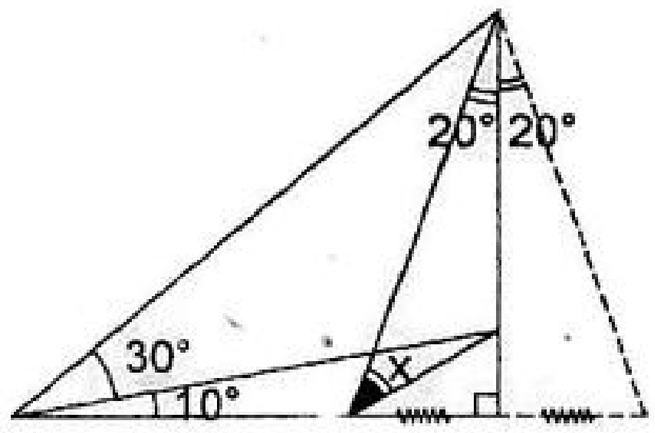
Scanned by CamScanner

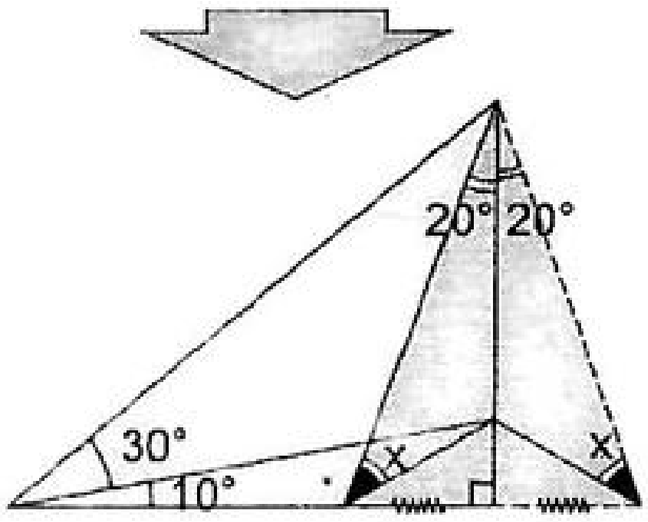
Problema 41. Calcular x.



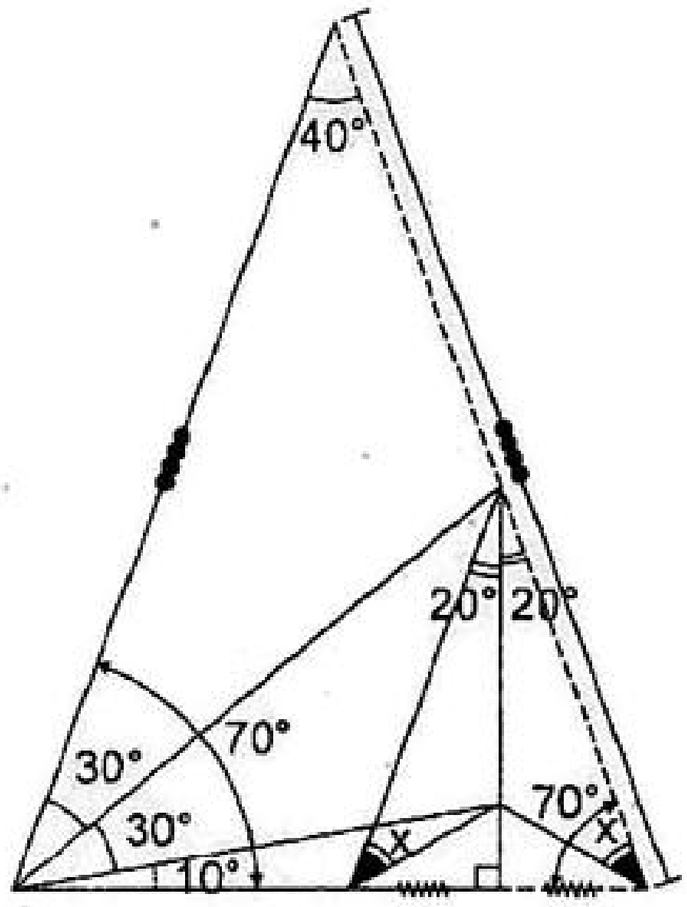
Resolución:

Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo formamos un triángulo isósceles:

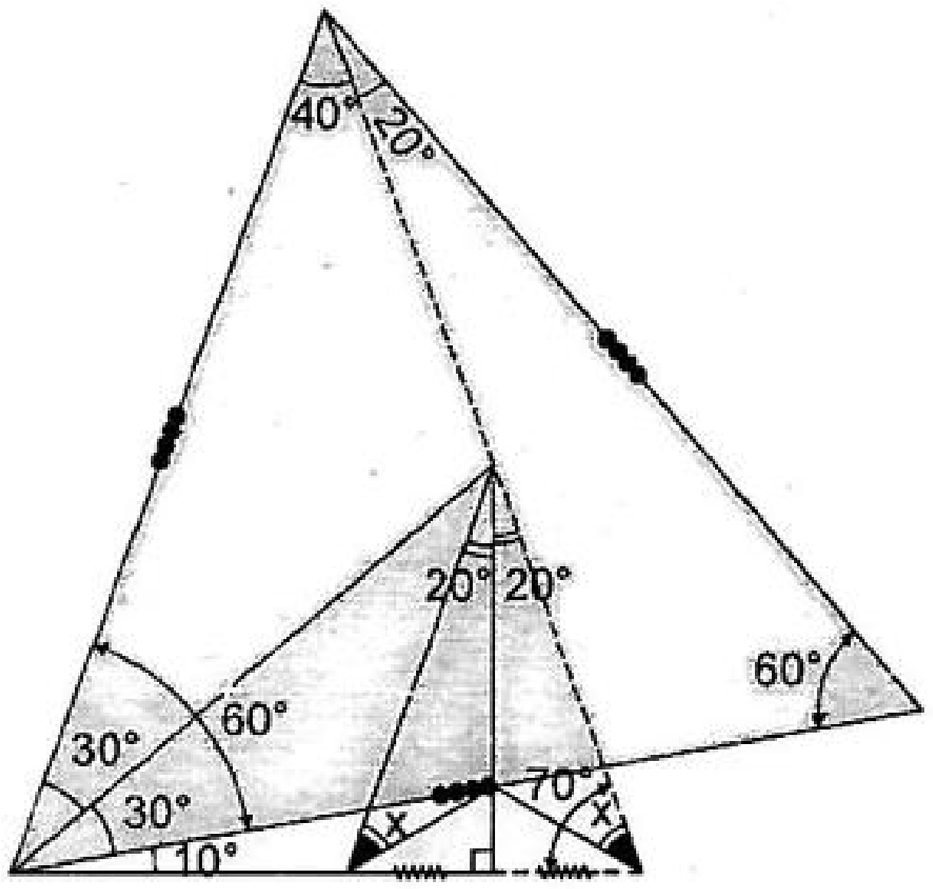


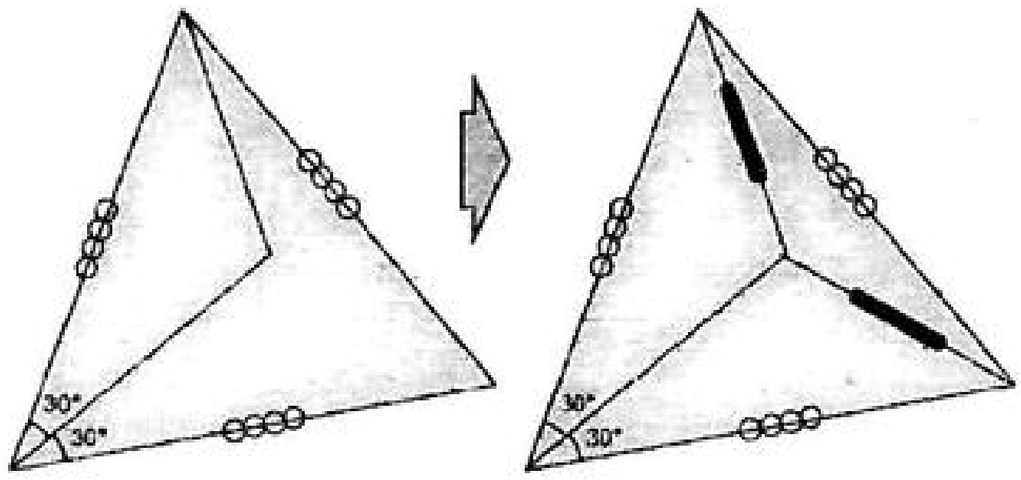


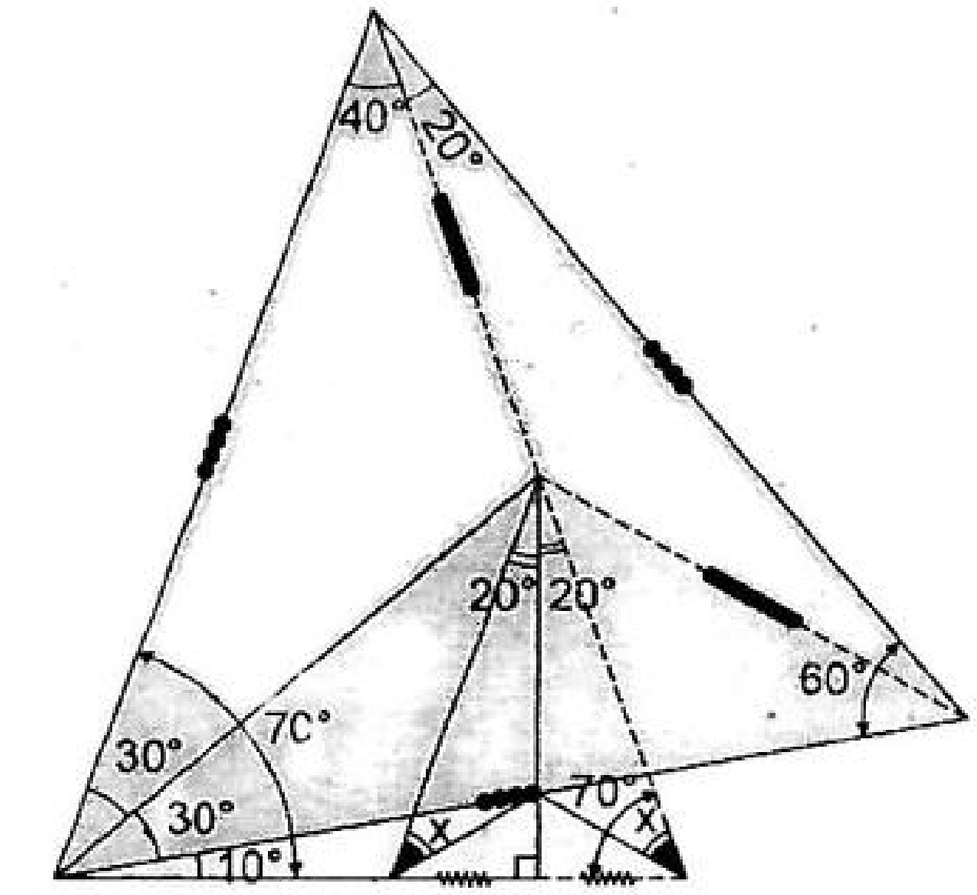
Paso N° 2. Completamos un triángulo isósceles exterior:



Paso N° 3. Se observa un ángulo de 60°, entonces formamos un triángulo equilátero:

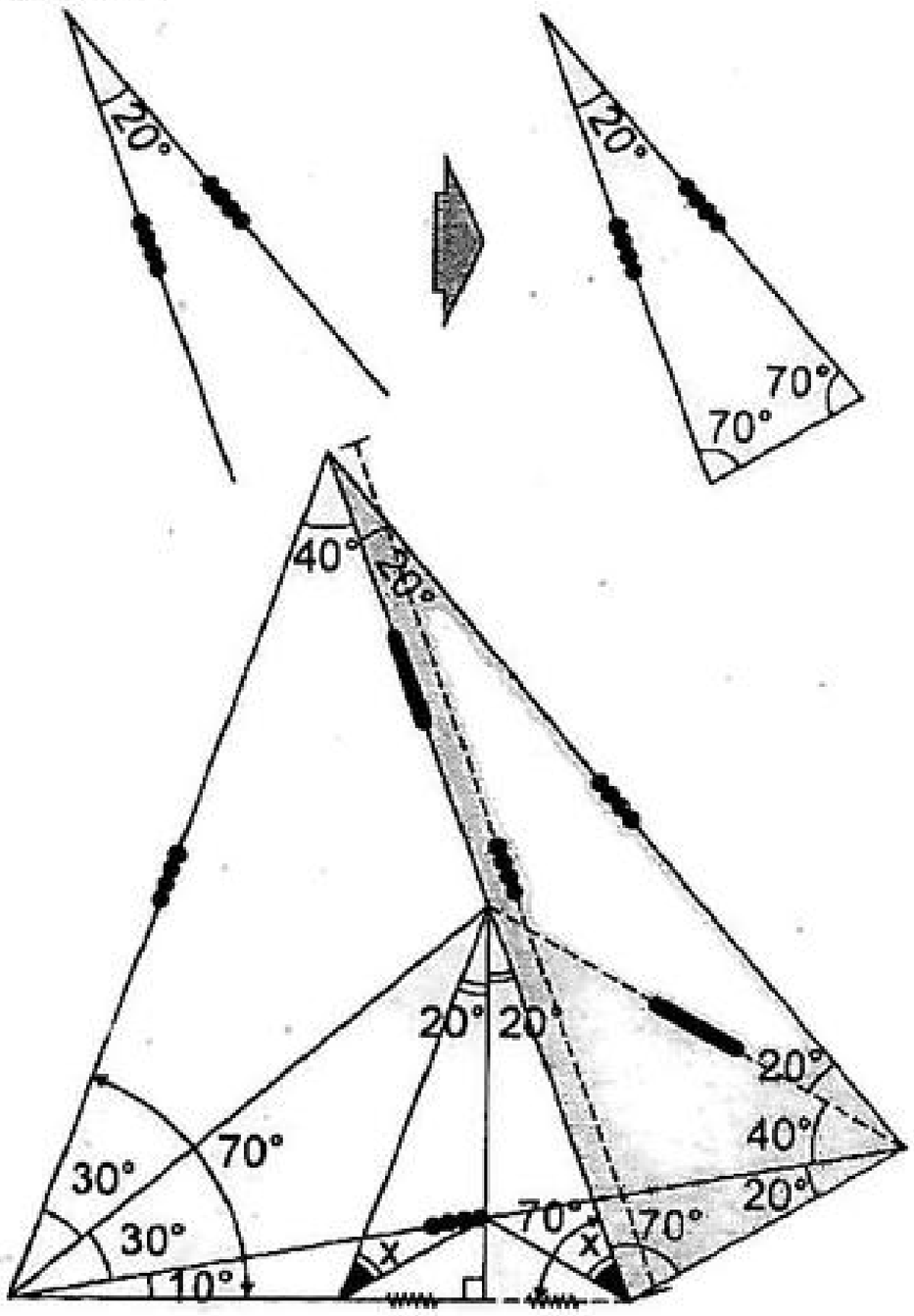




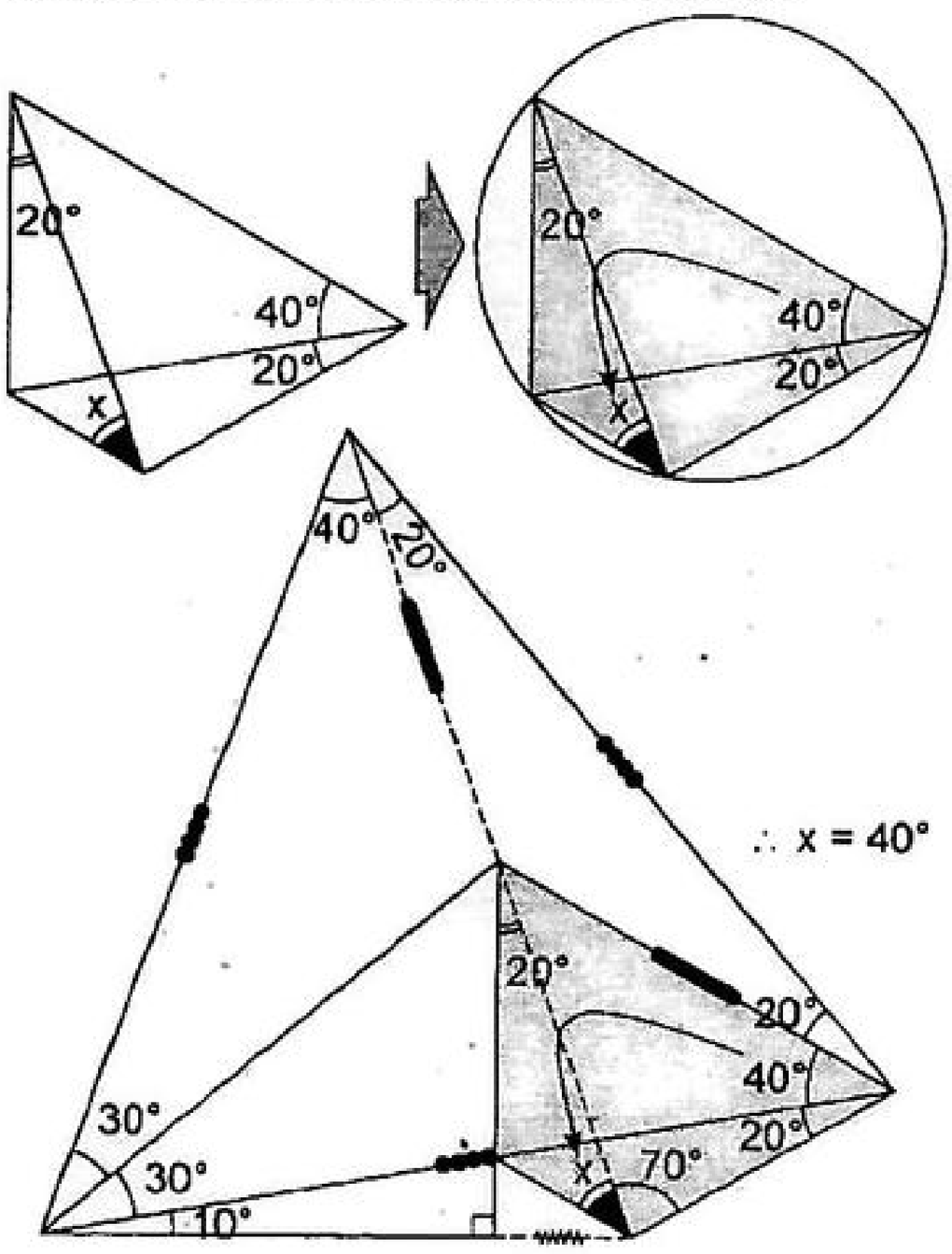


Scanned by CamScanner

Paso N° 4. Ahora se obtiene un nuevo triángulo isósceles:

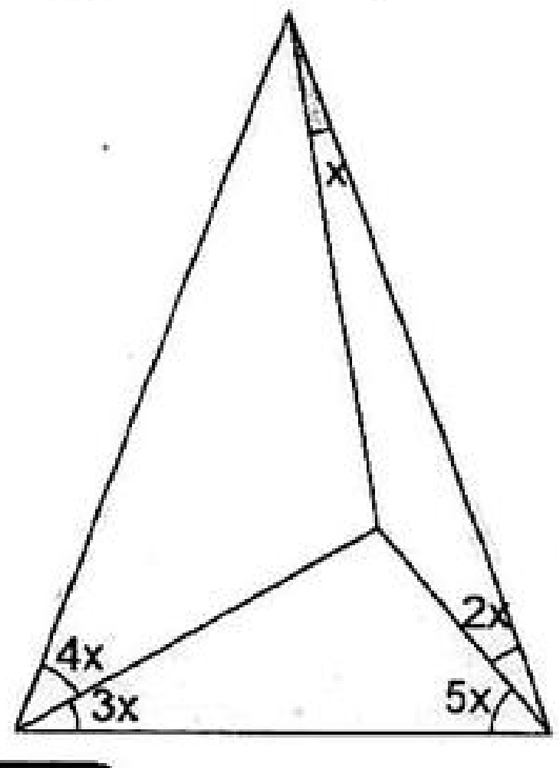


Paso N° 5. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:



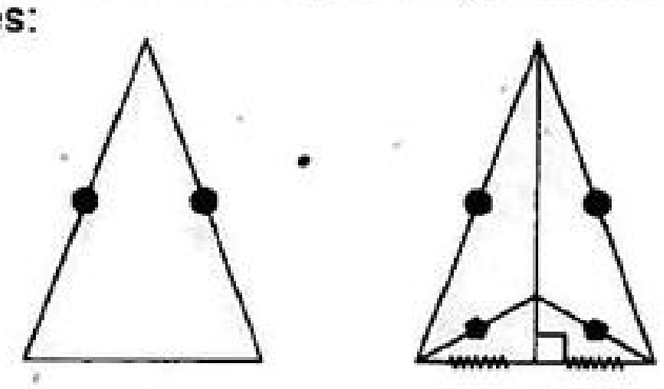
∴ x = 40°

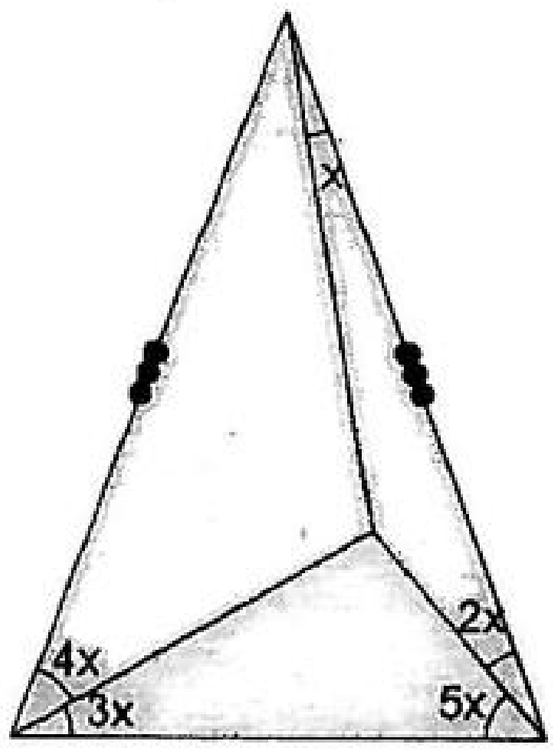
Problema 42. Calcular x.

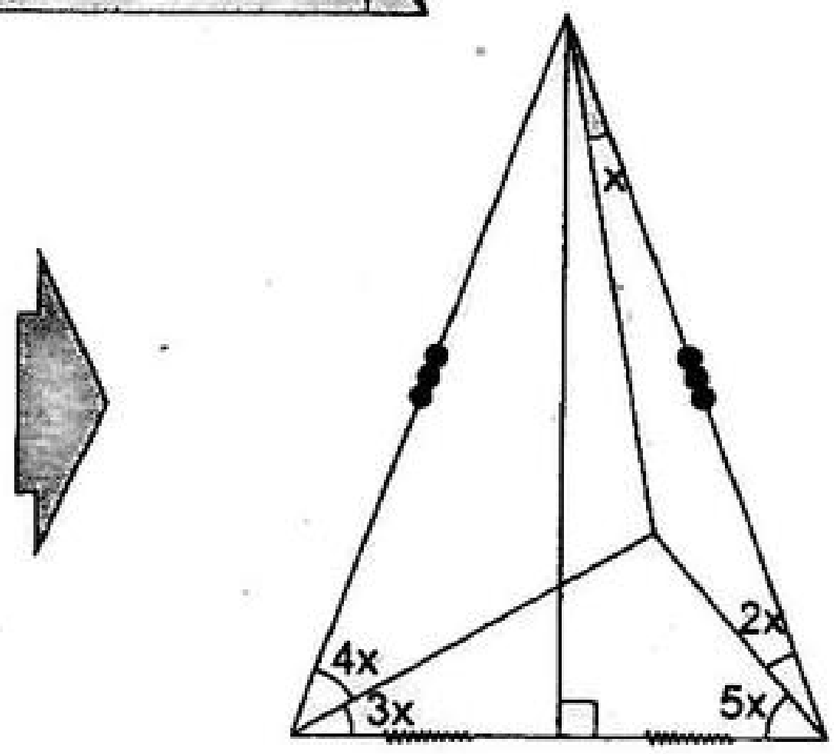


Resolución:

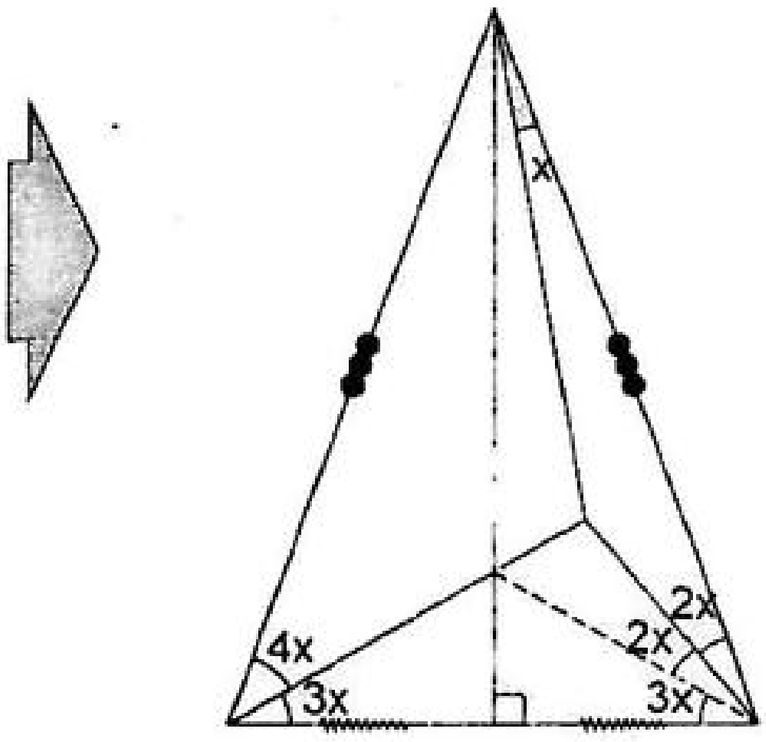
Paso N° 1. Se observa que la figura es un triángulo isósceles:



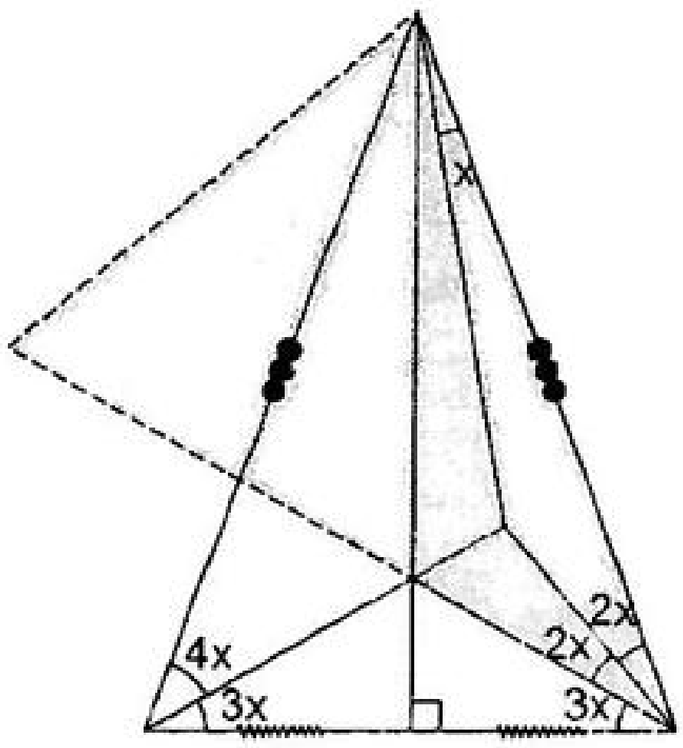


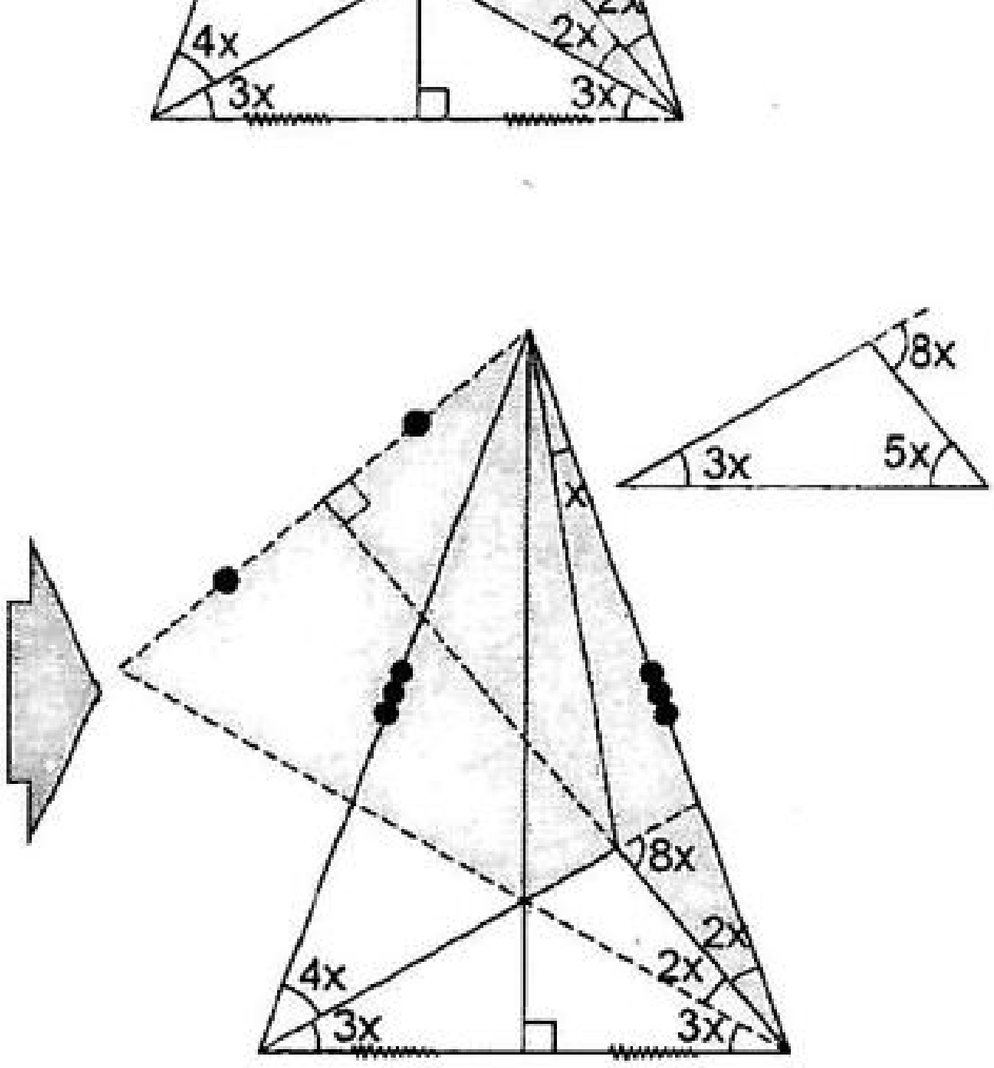


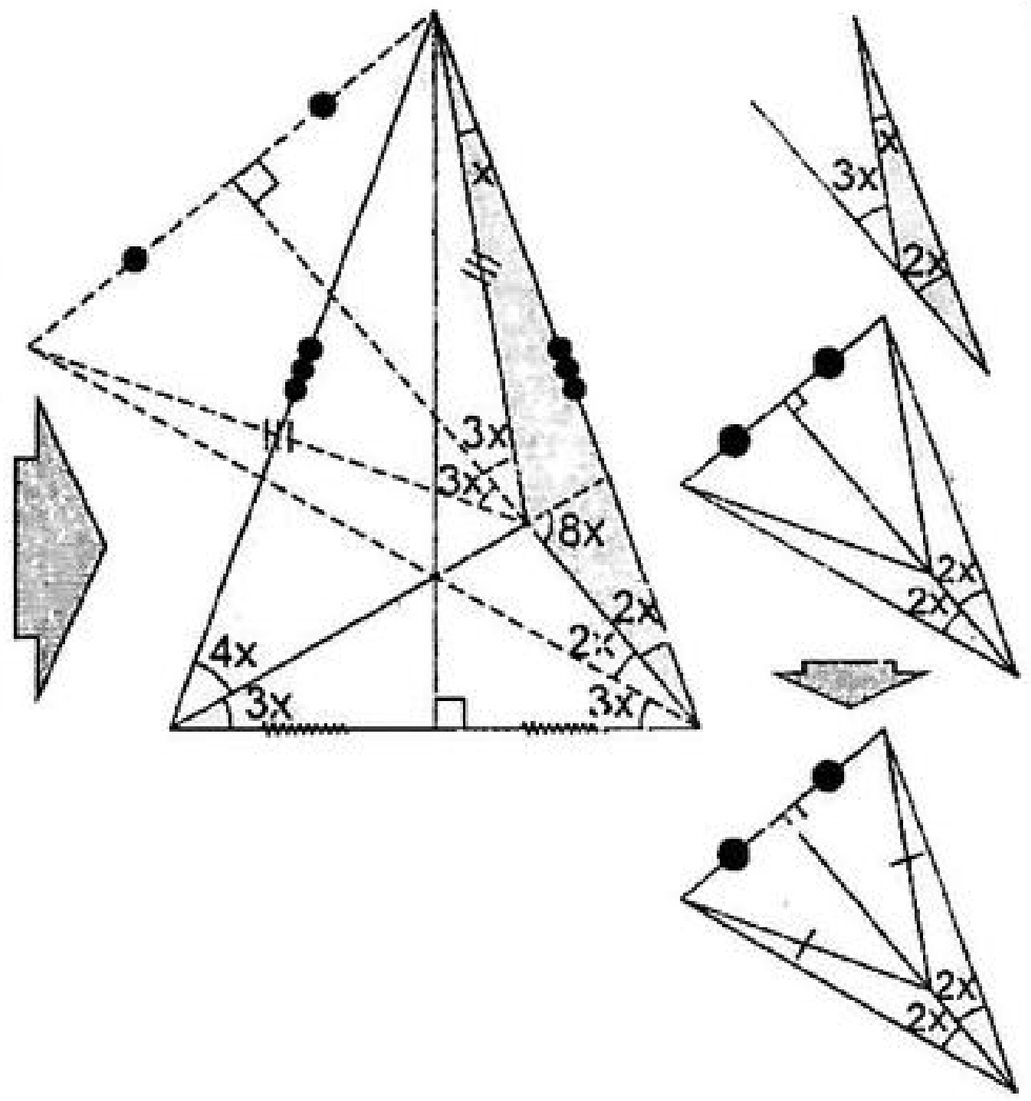
Scanned by CamScanner



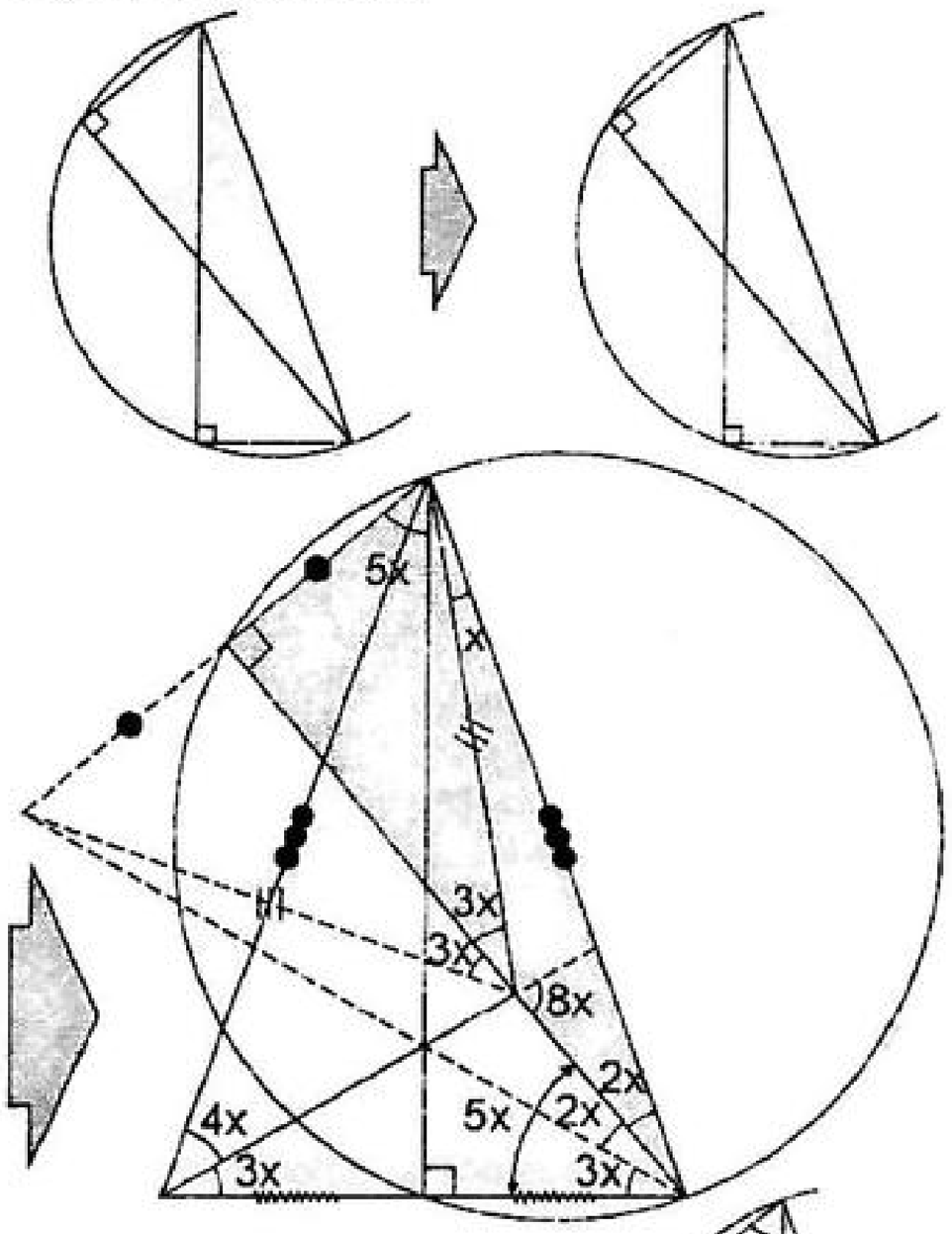
Paso N° 2. Observamos una bisectriz en la figura, entonces completamos a un triángulo isósceles, donde cumple:



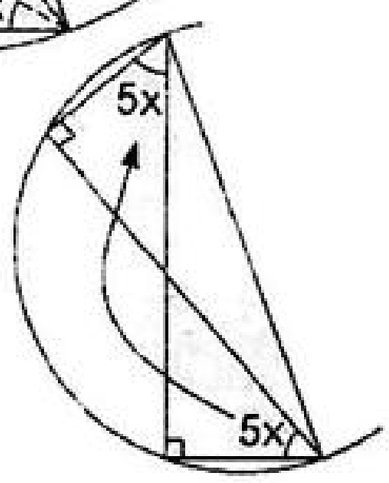




Paso N° 3. Se observa que se tiene en la figura la siguiente propiedad:

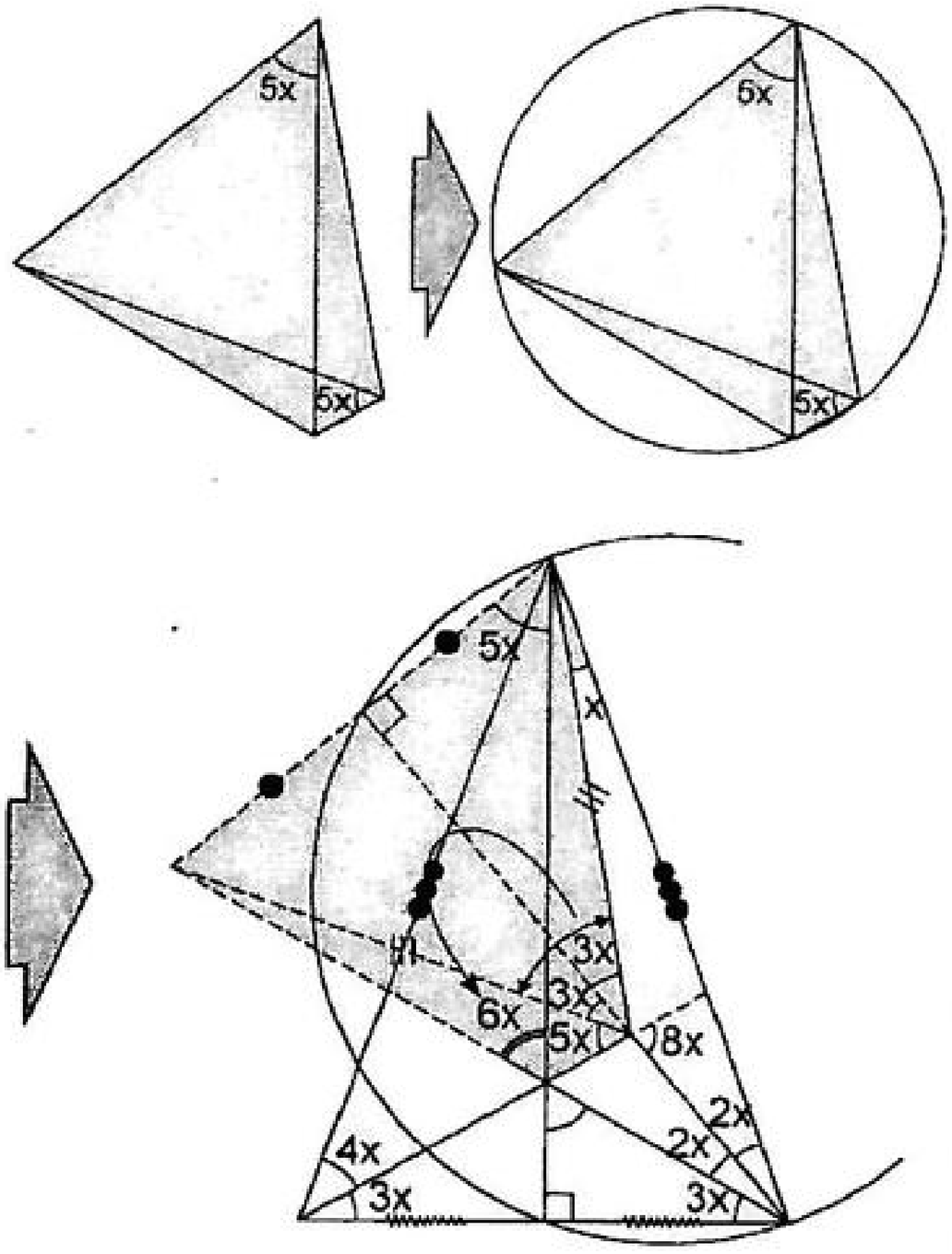


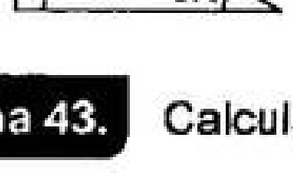
Aquí se cumple.



Scanned by CamScanner

Paso N° 4. Ahora se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:





$\therefore\ 6x + 3x = 90°$

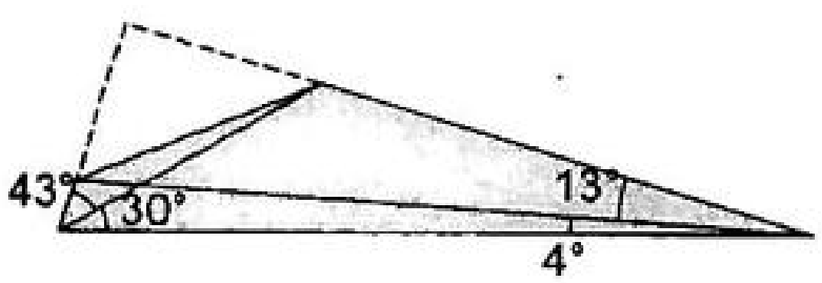
$9x = 90°$

$x = 10°$

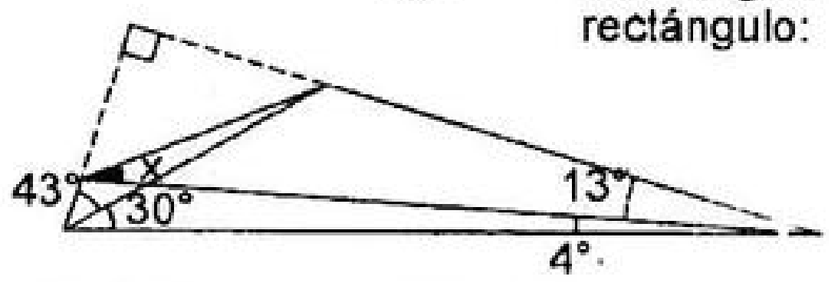
Problema 43. Calcular x.

Resolución:

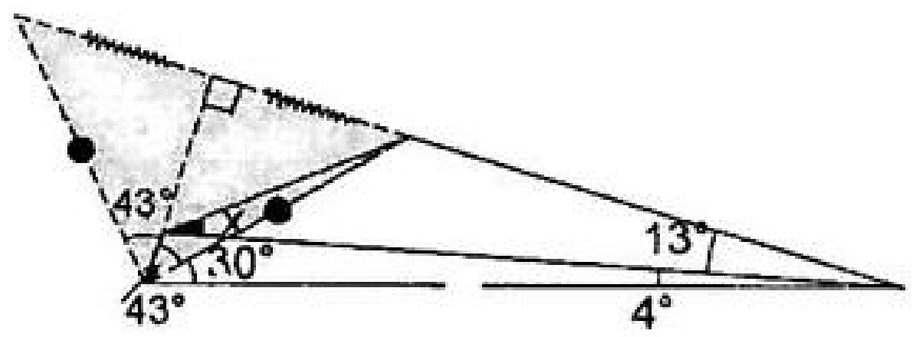
Paso N° 1. Observamos dos ángulos complementarios:

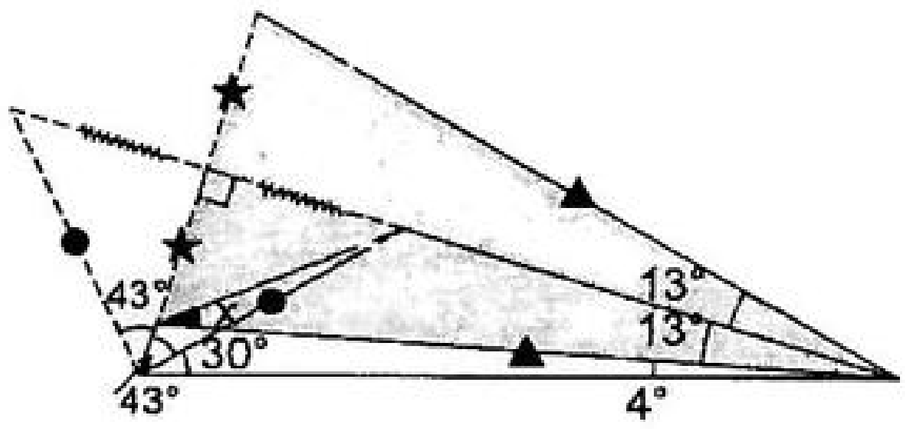


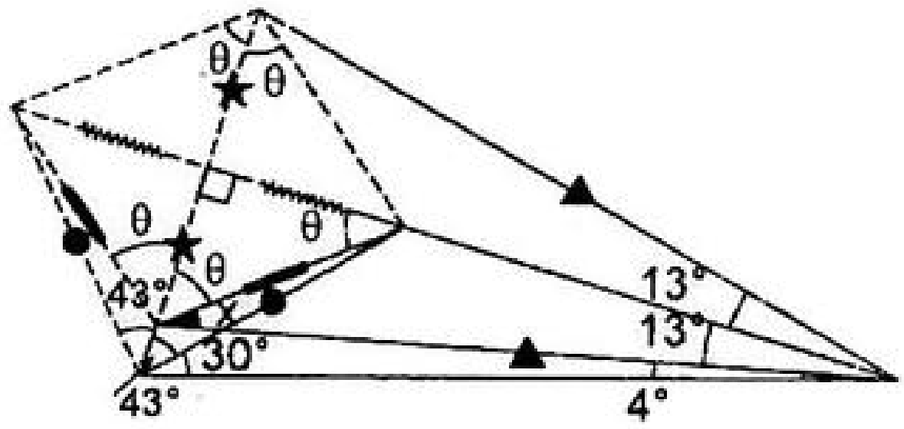
Completamos a un triángulo rectángulo:



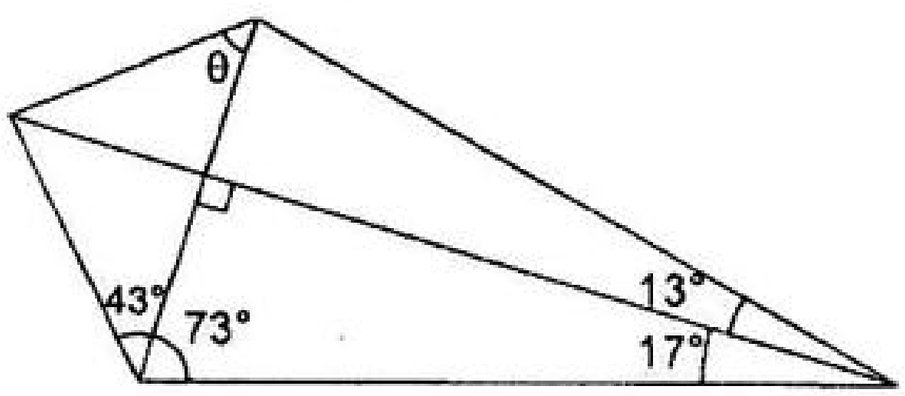
Paso N° 2. Buscamos triángulos isósceles de la siguiente manera:





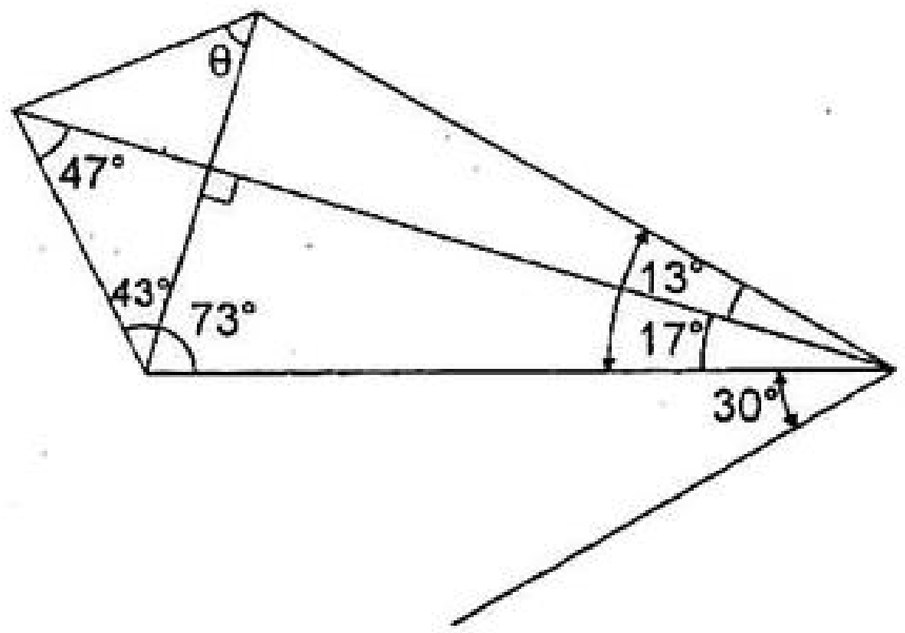


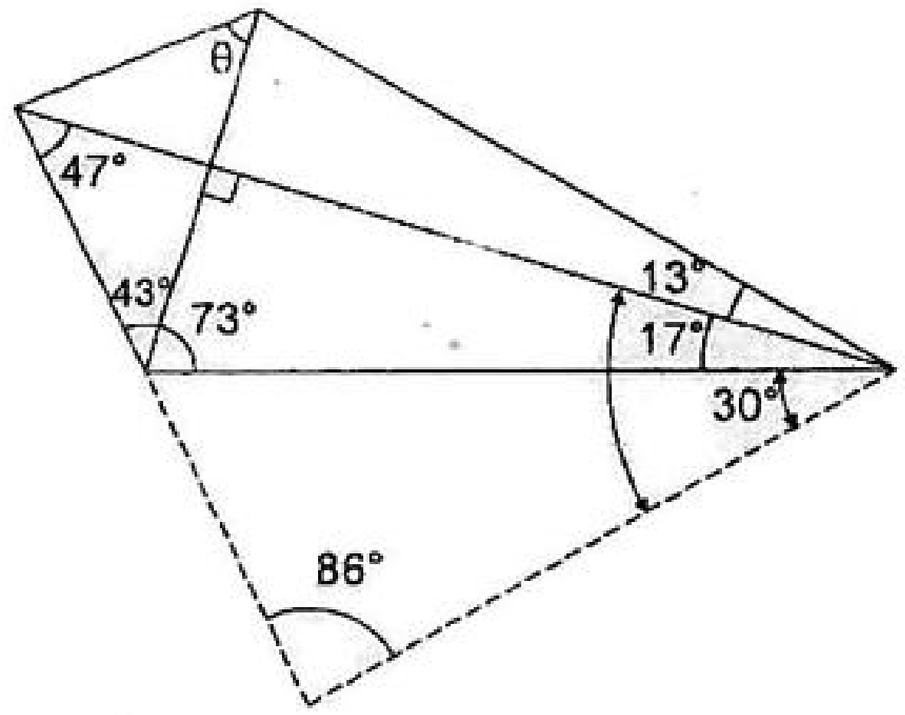
Obtenemos la siguiente figura:



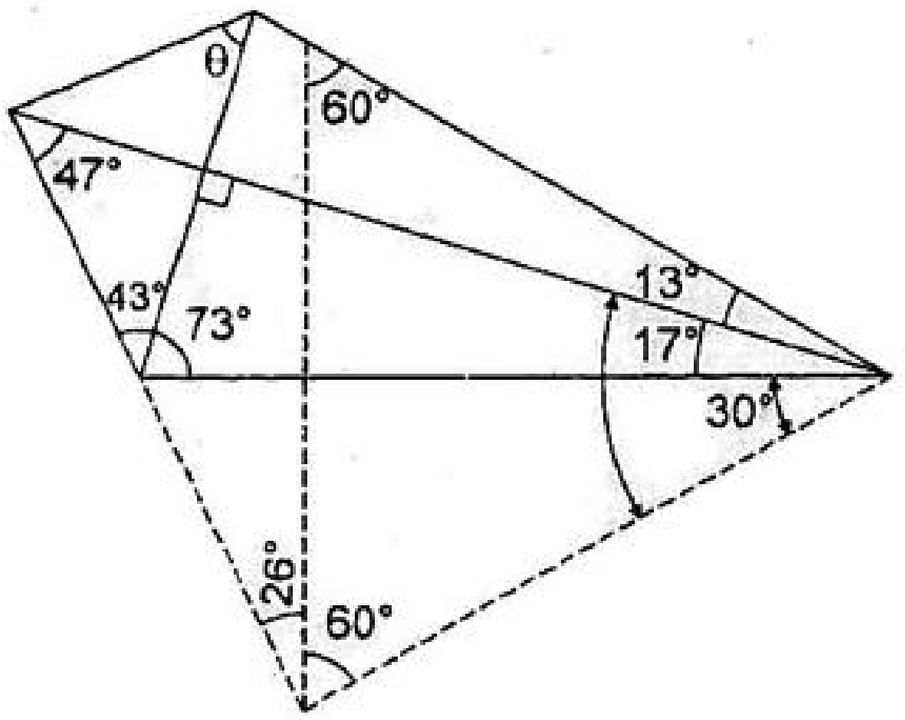
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Agregamos un ángulo de 30° para llegar a 47° y así formamos externamente un triángulo isósceles:

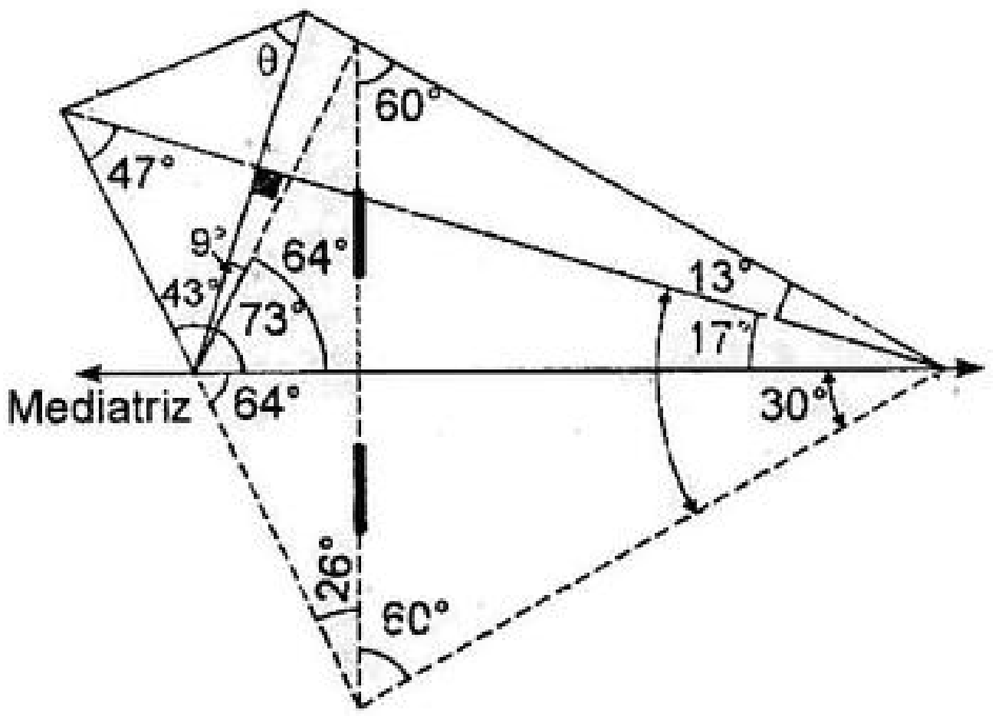




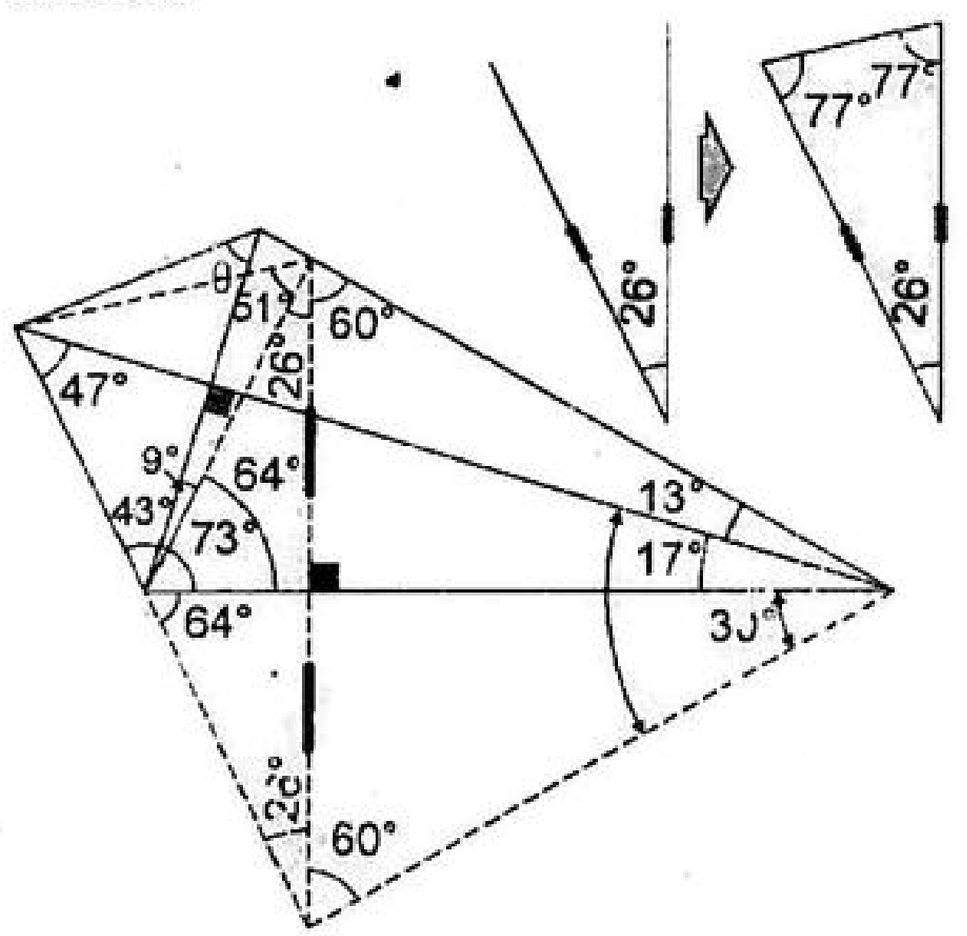
Paso N° 4. Con el trazo anterior también se obtuvo un ángulo de 60° y con ello formaremos un triángulo equilátero:



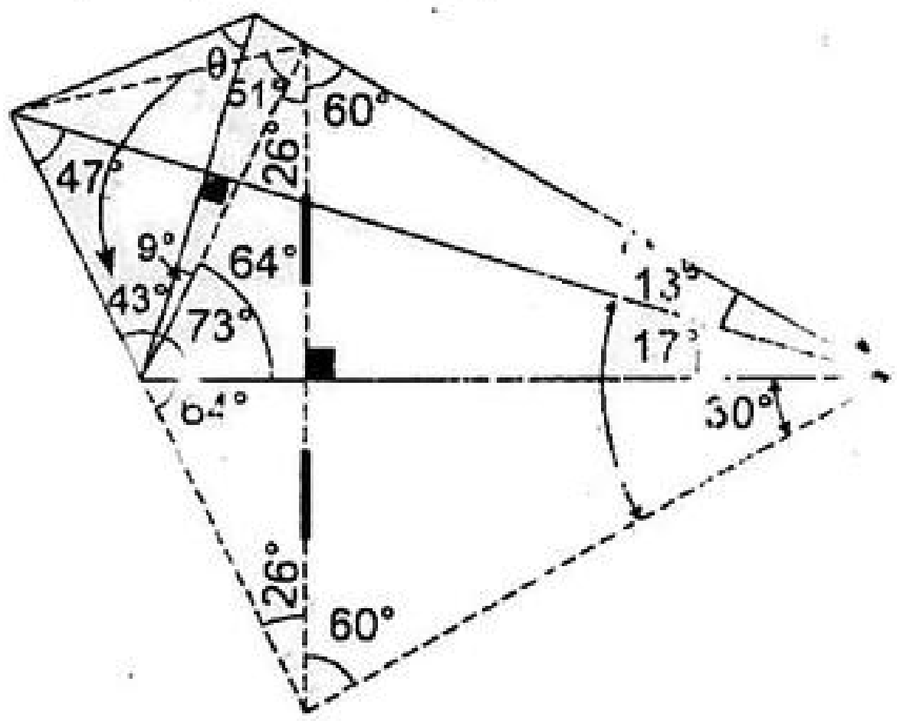
Paso N° 5. Tenemos una recta mediatriz donde cumple:



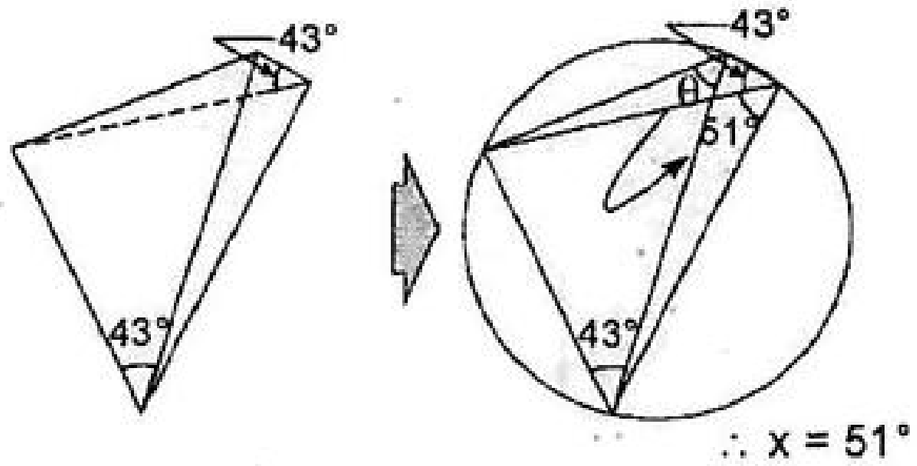
Paso N° 6. También se observa un triángulo isósceles:



Paso N° 7. Se observa un cuadrilátero donde cumple al propiedad del pantalón o rebote:

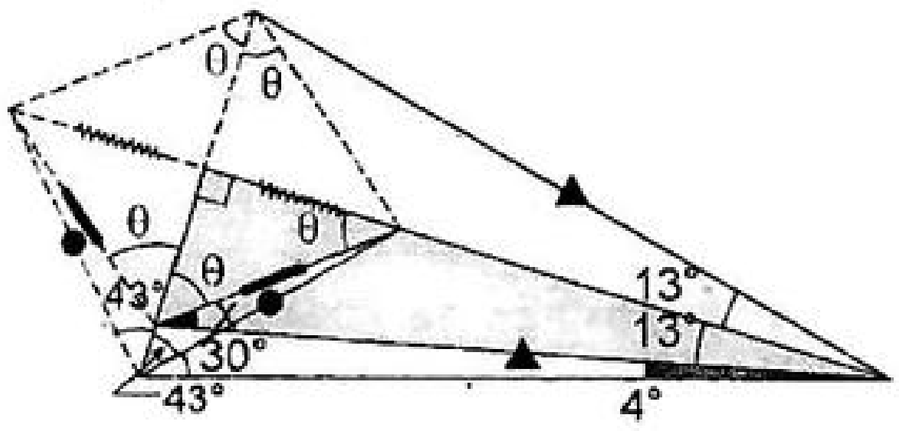


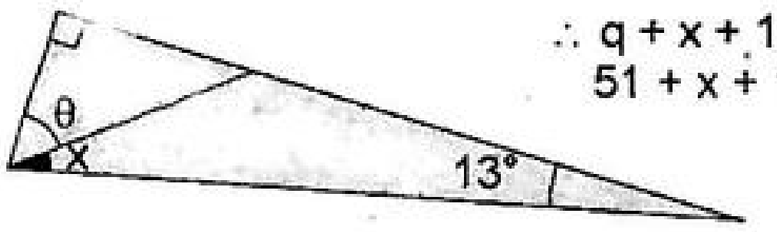
Scanned by CamScanner



$\therefore x = 51°$

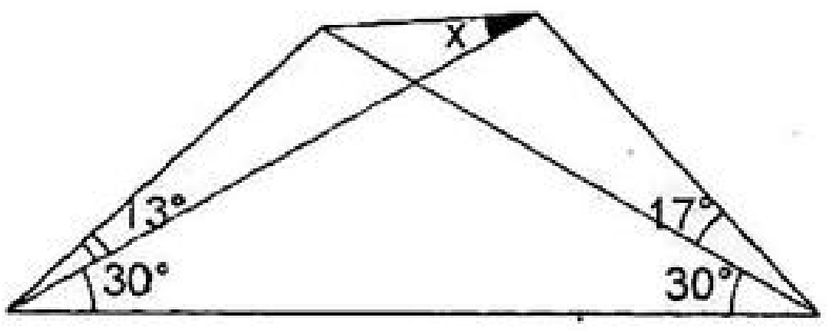
Paso N° 8. Del paso N° 2 se obtuvo una nueva figura, entonces, tenemos:





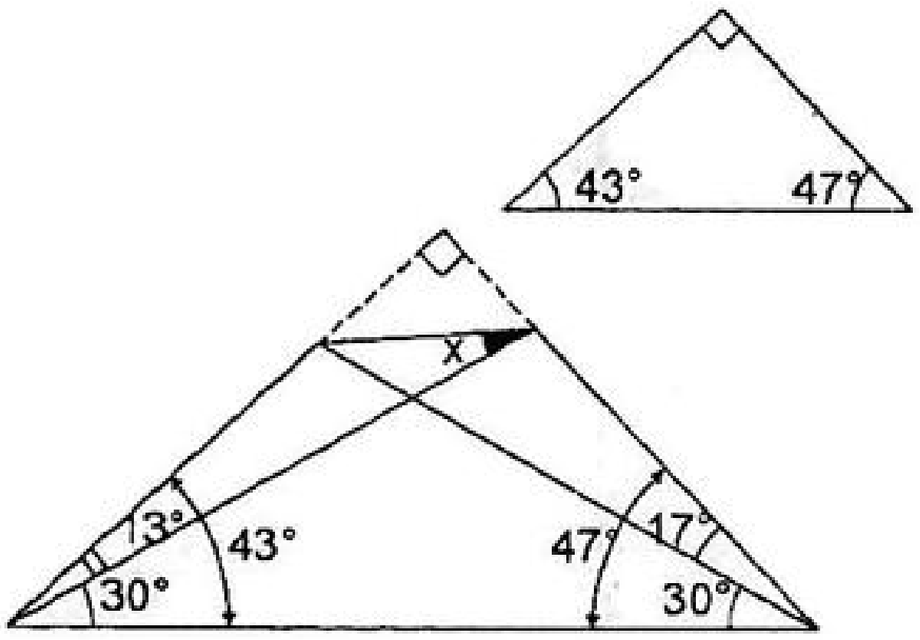
$\therefore q + x + 13° = 90°$
$51 + x + 13 = 90°$
$x = 26°$

Problema 44. Calcular x.

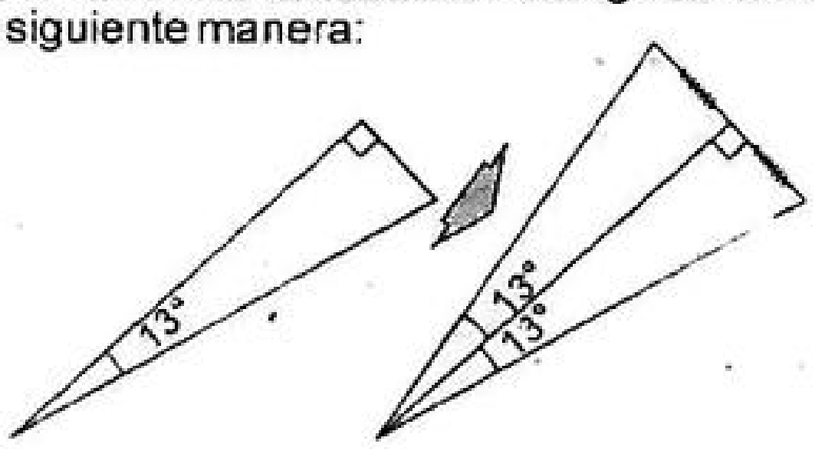


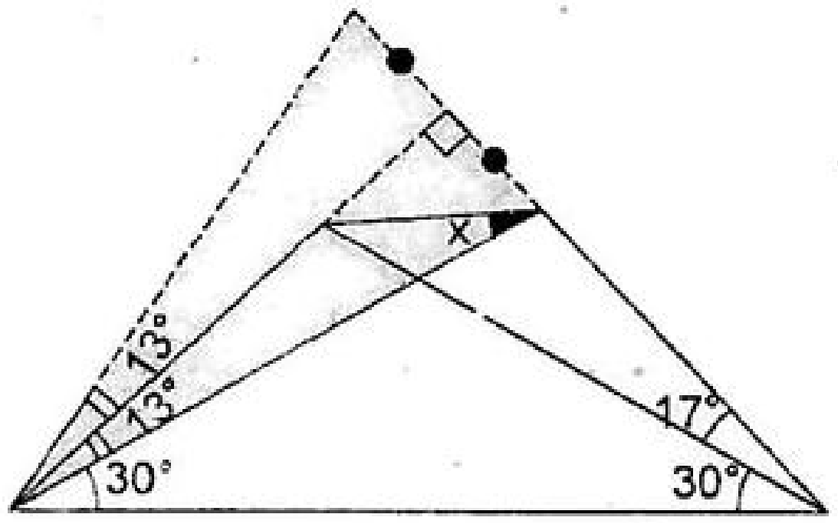
Resolución:

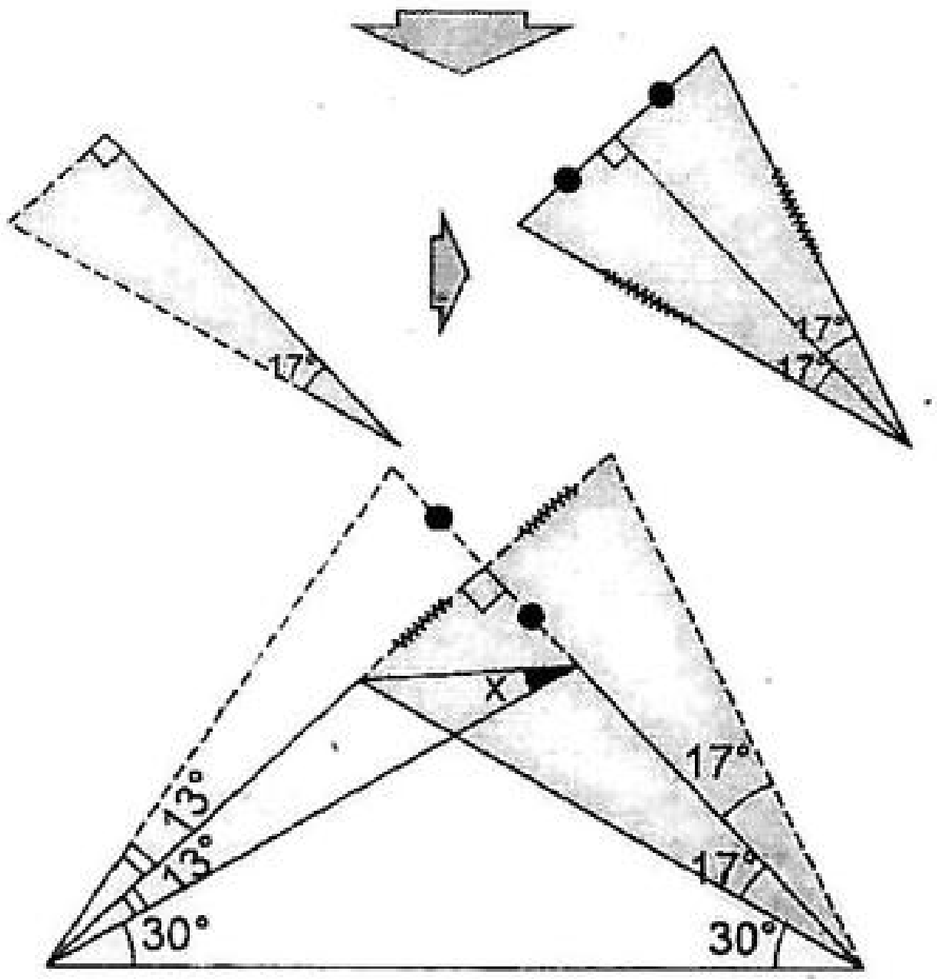
Paso N° 1. Aquí se cumple:



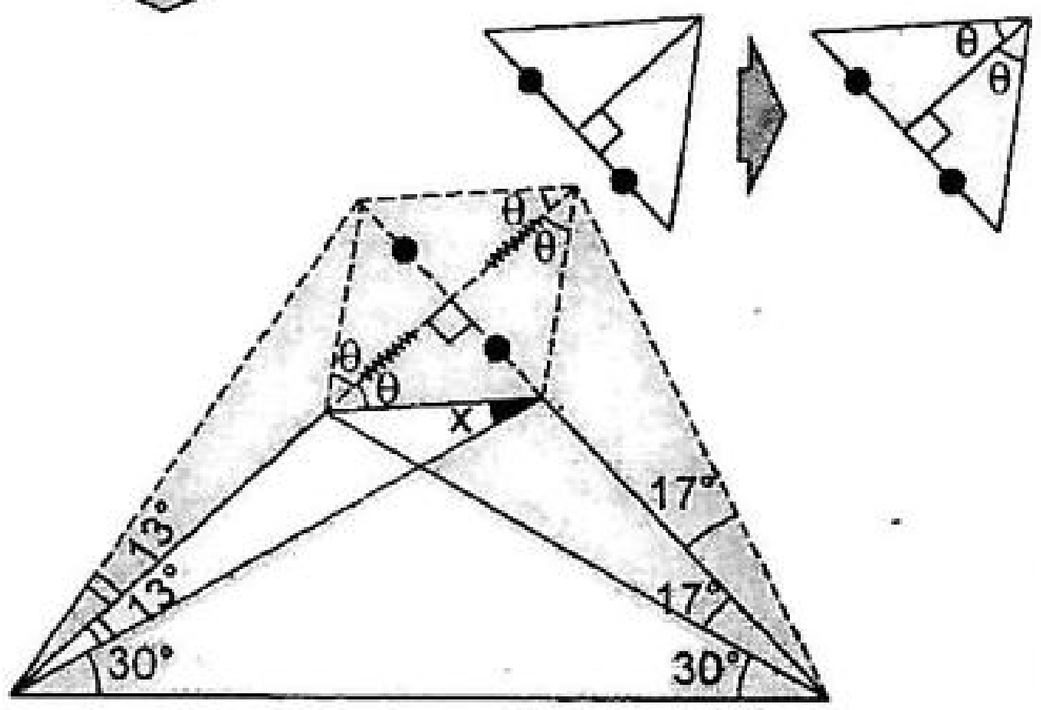
Paso N° 2. Ahora construimos triángulos isósceles de la siguiente manera:



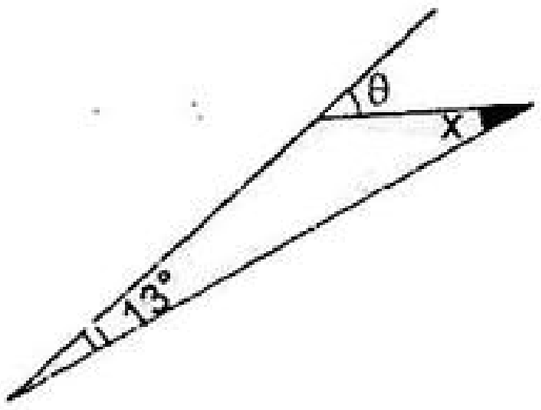




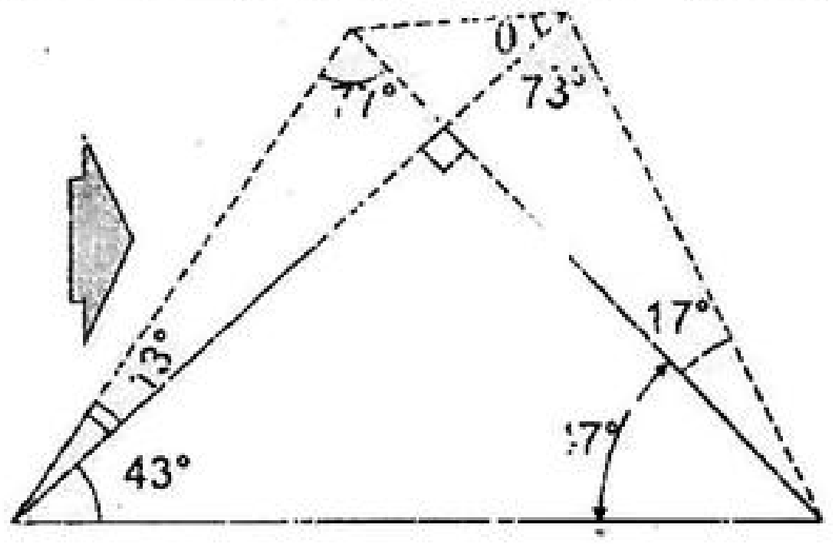
Luego tenemos una nueva figura:



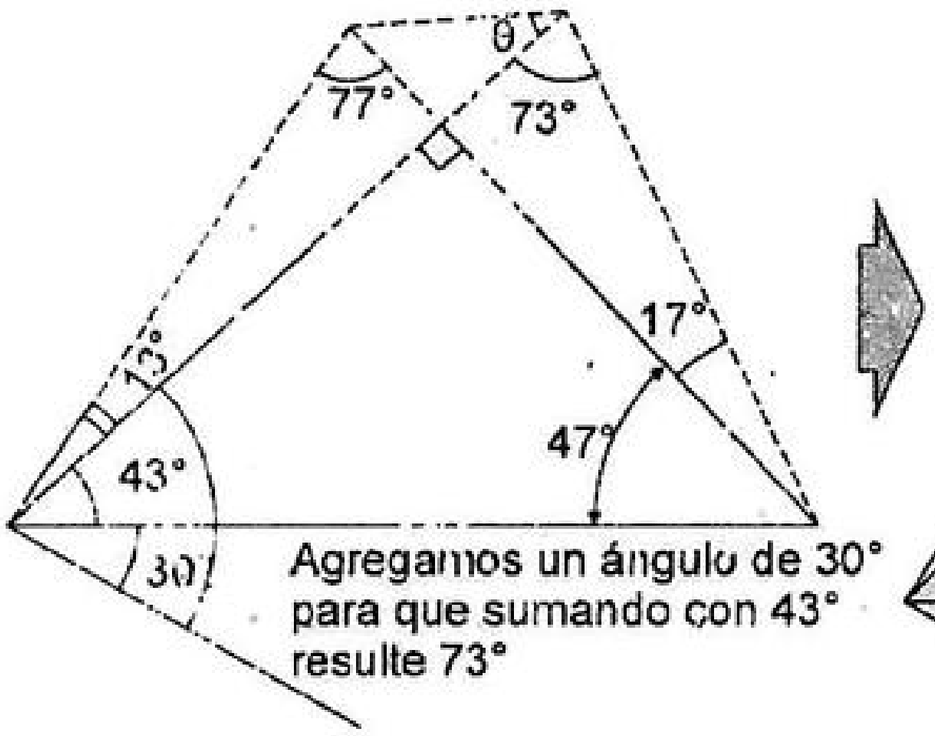
Scanned by CamScanner



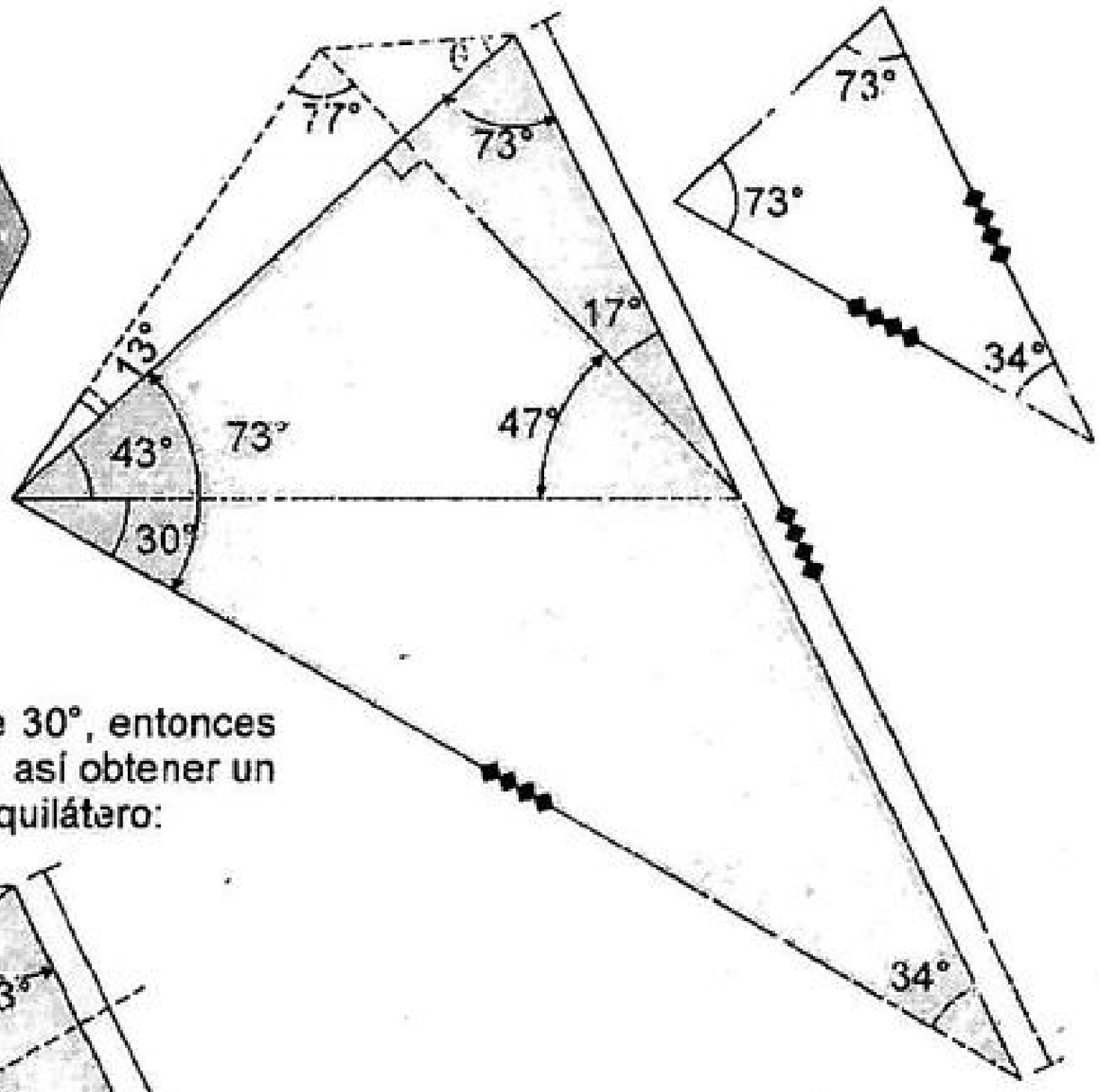
De aquí tenemos:
$\theta = 13 + x$



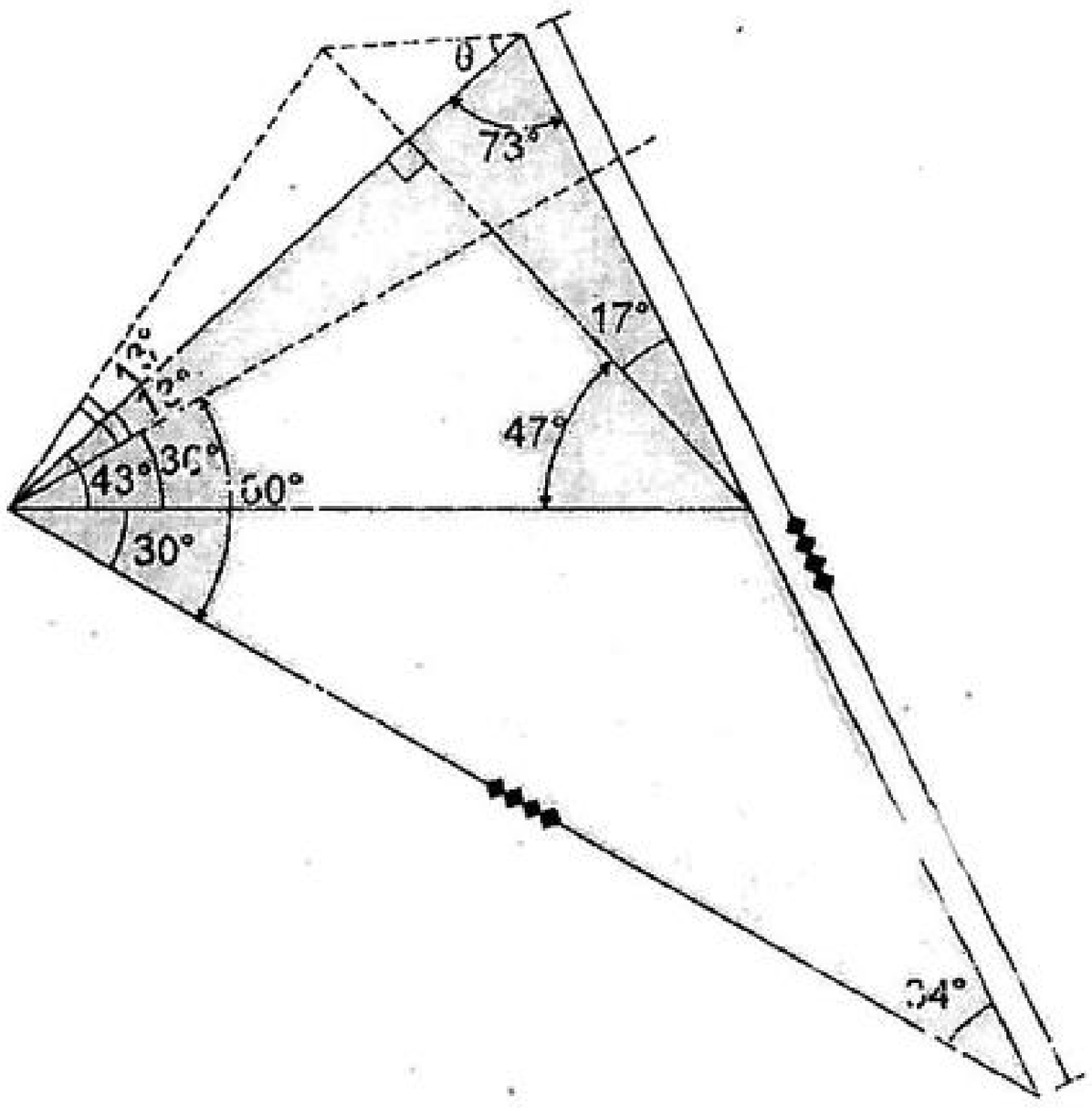
Paso N° 3. Ahora hallamos θ, realizando el siguiente trazo, formando un triángulo isósceles, para ello, hacemos:



Agregamos un ángulo de 30° para que sumando con 43° resulte 73°

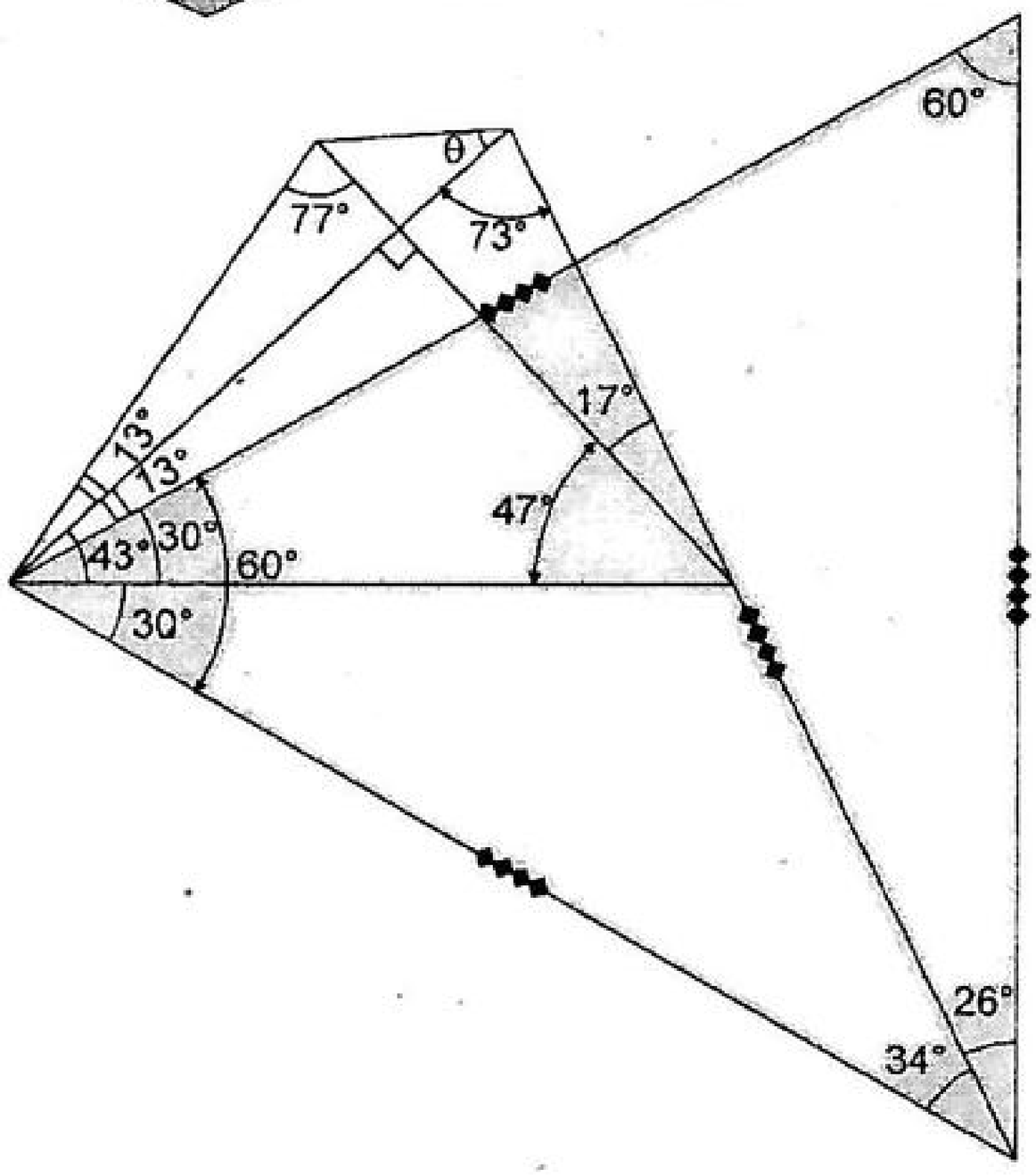


Paso N° 4. Como se observa un ángulo de 30°, entonces partimos el ángulo de 43° en 30° + 13° para así obtener un ángulo de 60° y luego construir un triángulo equilátero:

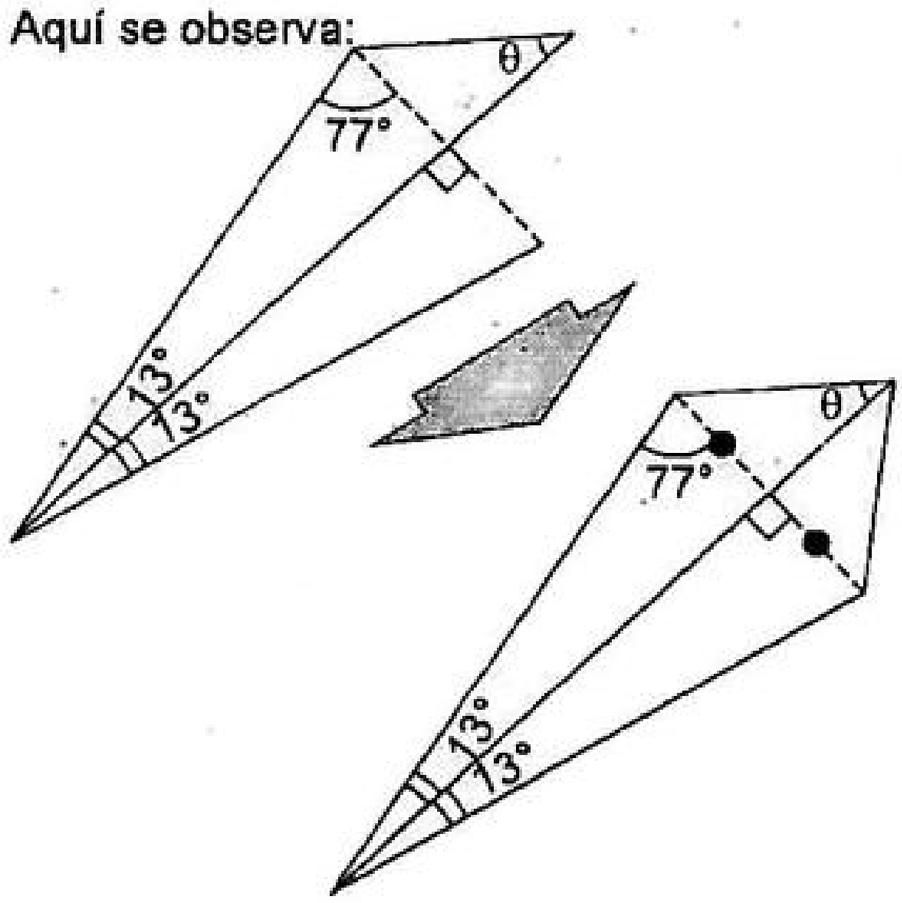


Scanned by CamScanner

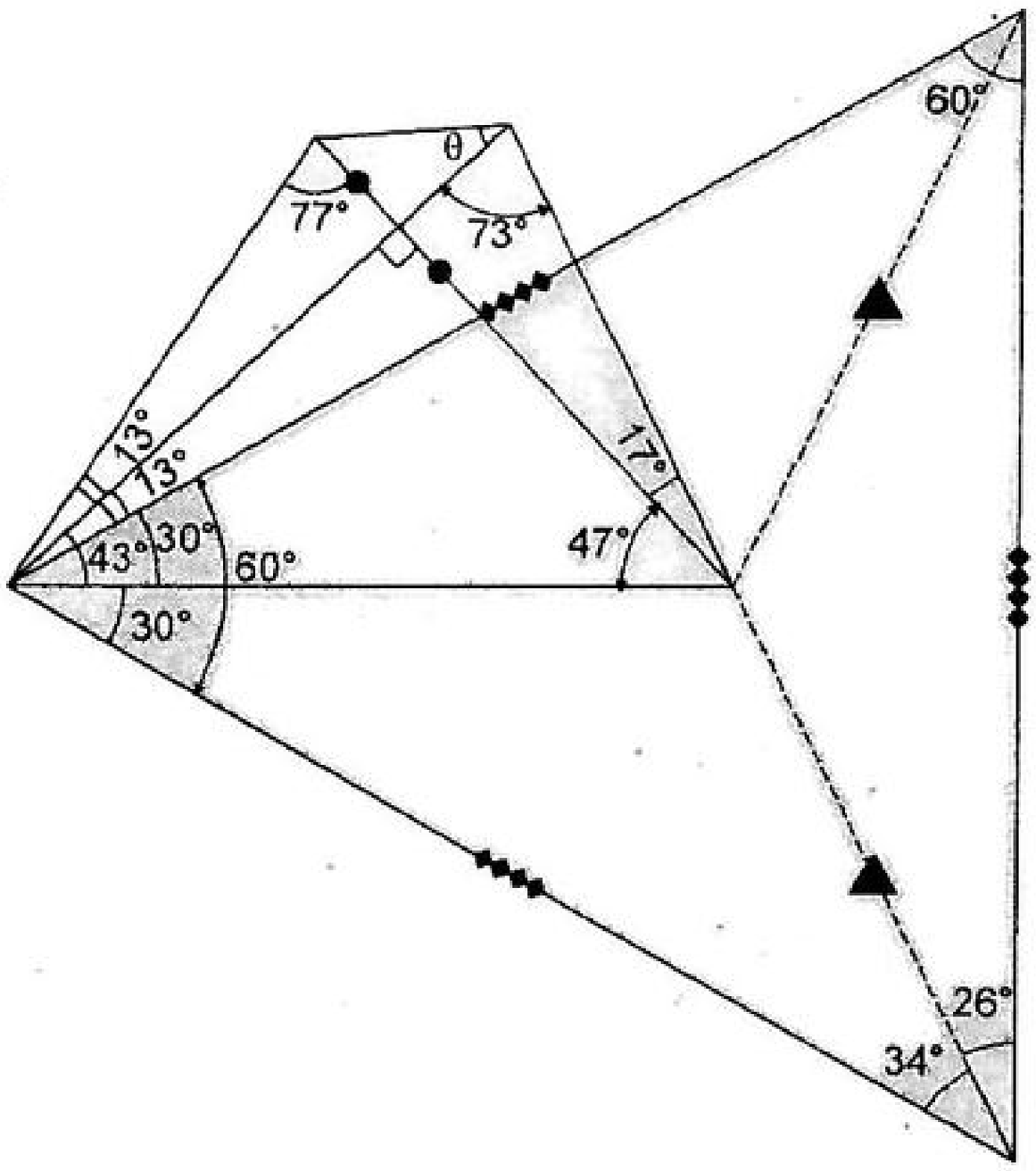
Formamos un triángulo equilátero

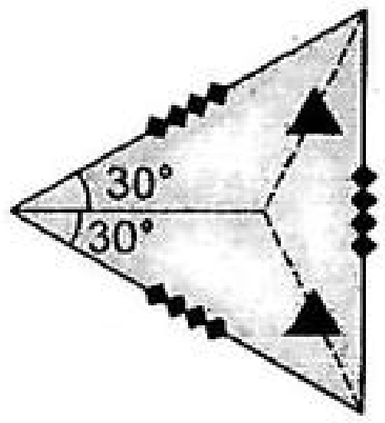


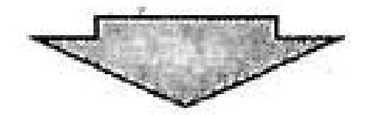
Aquí se observa:

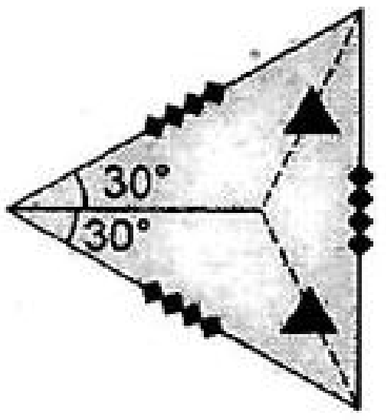


Paso N° 5. Aplicando las propiedades de la mediatriz en el triángulo equilátero:



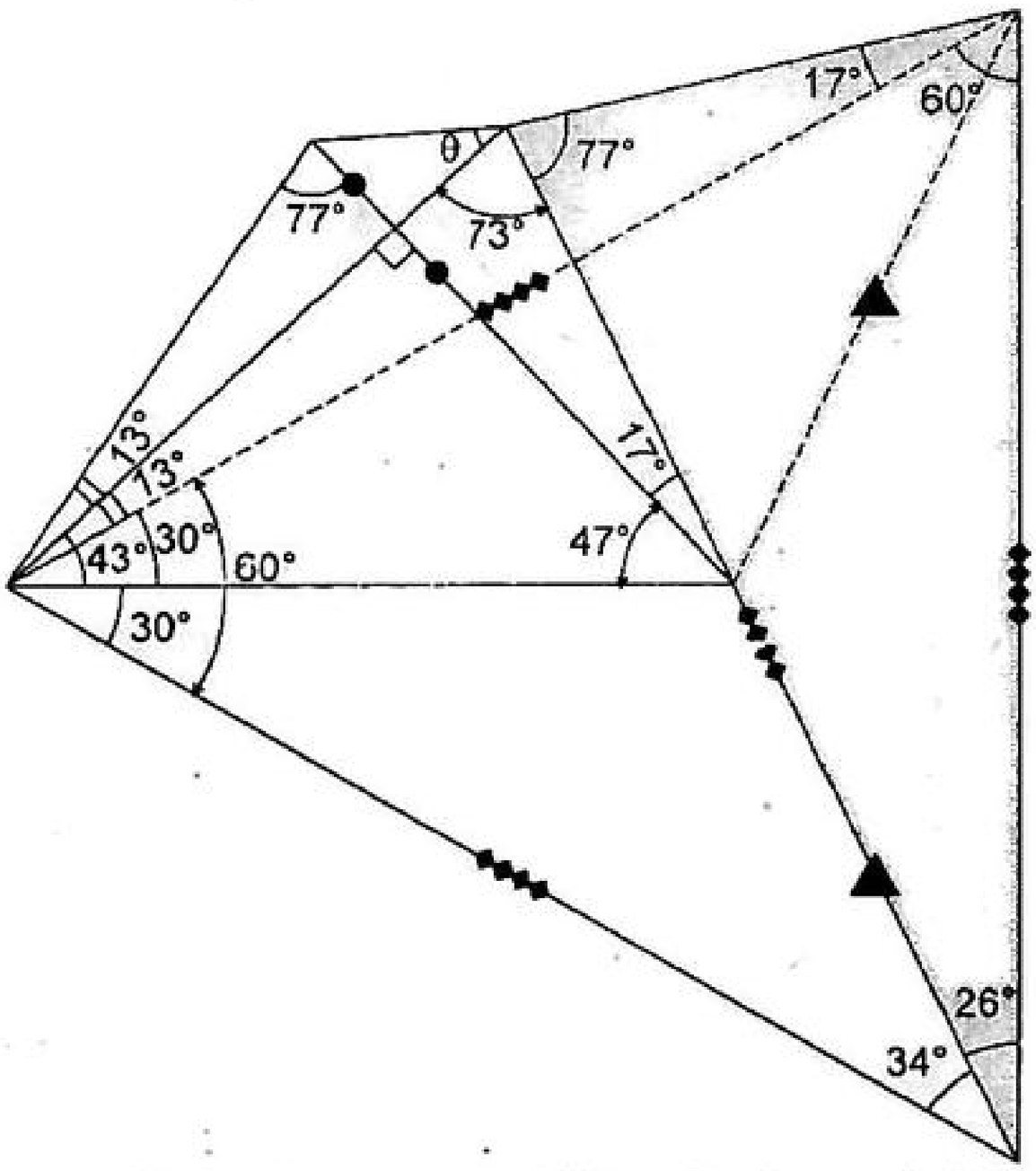


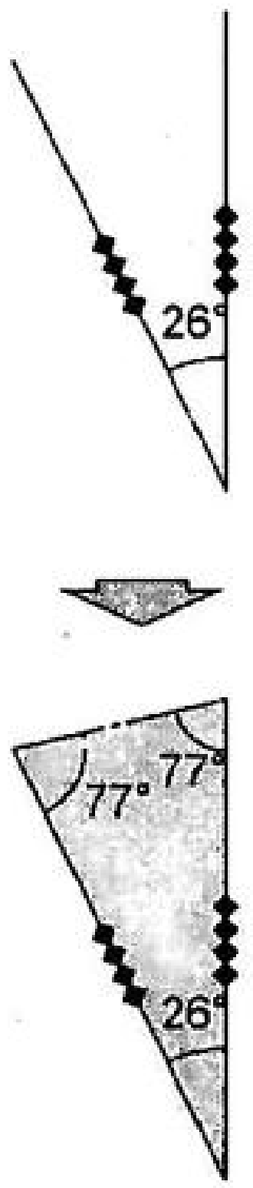




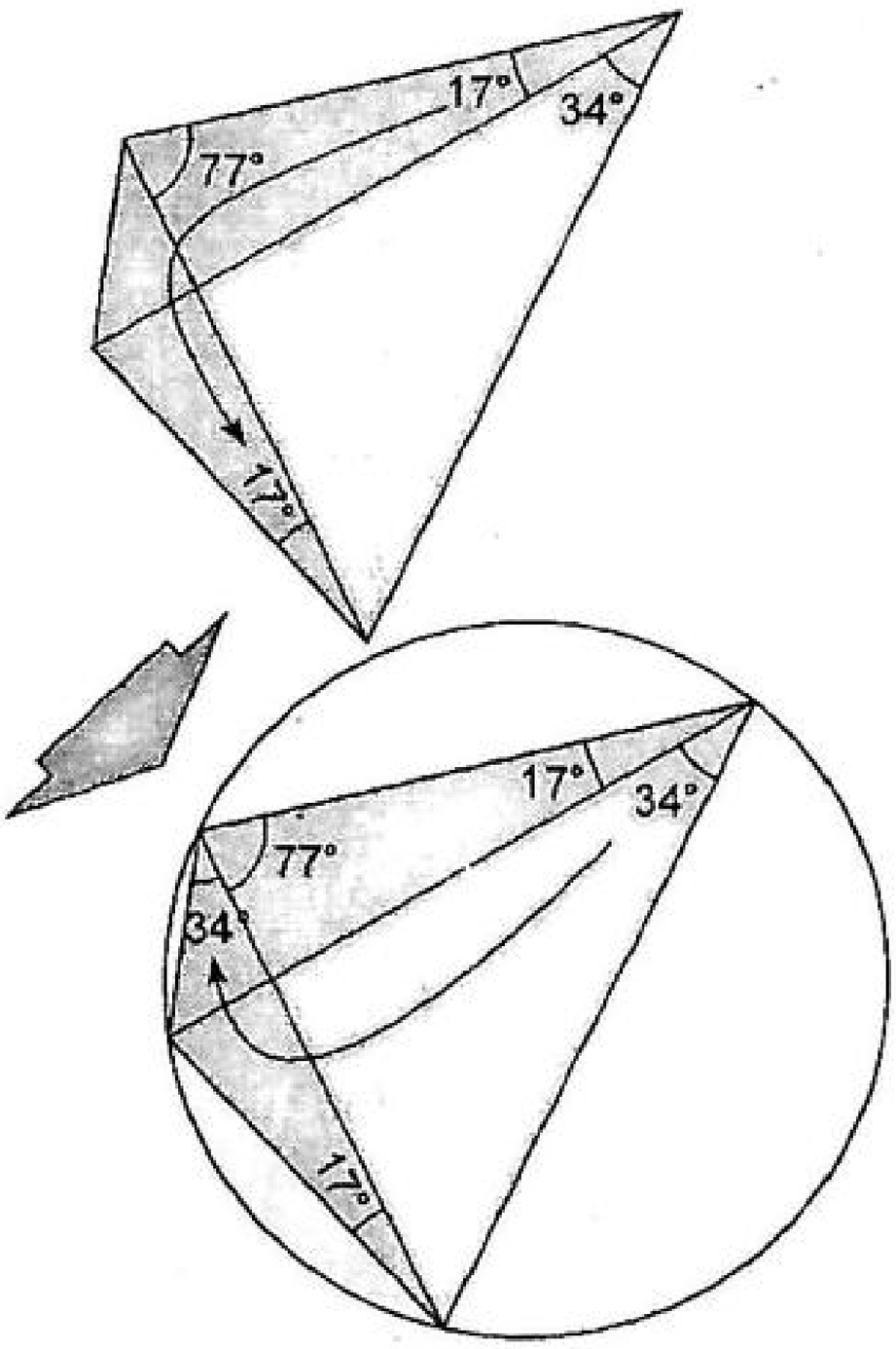
Scanned by CamScanner

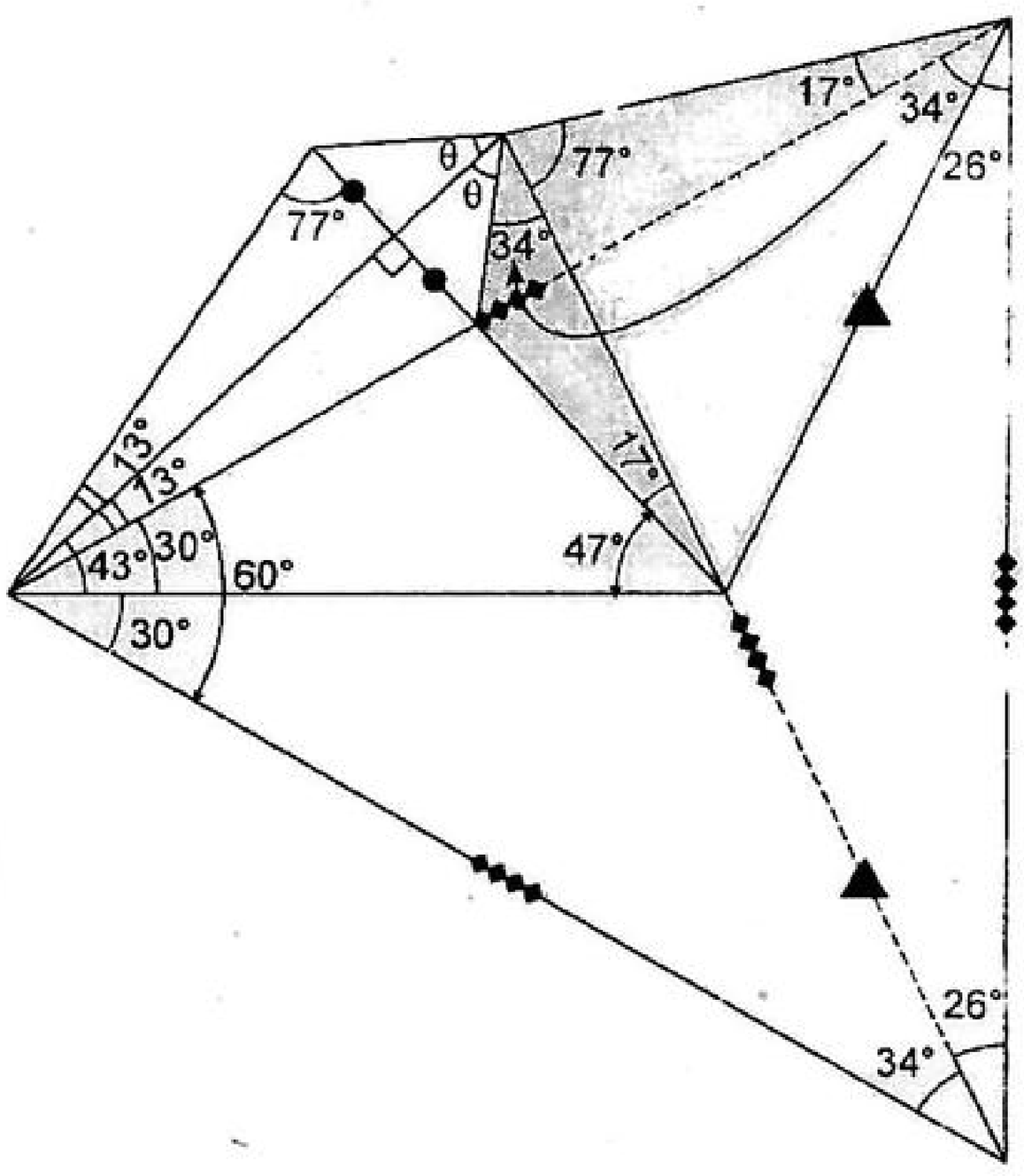
Paso N° 6. También se observa un nuevo triángulo isósceles:





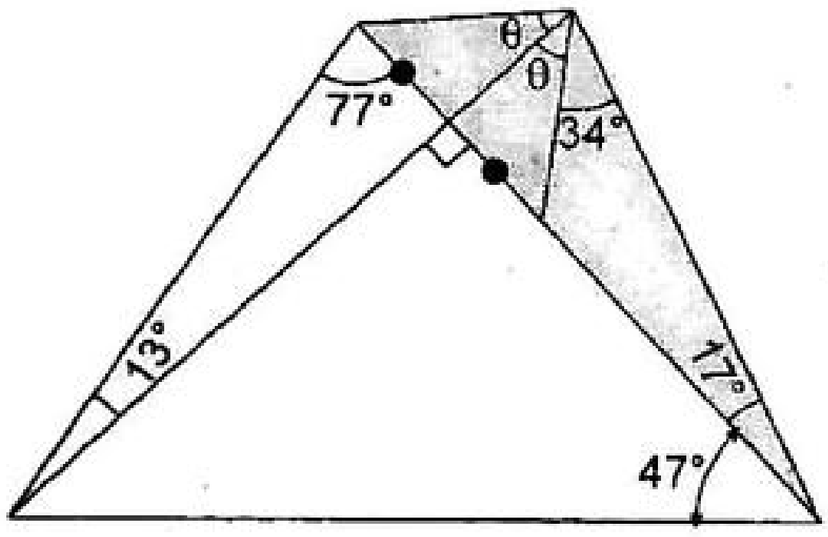
Paso N° 7. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:





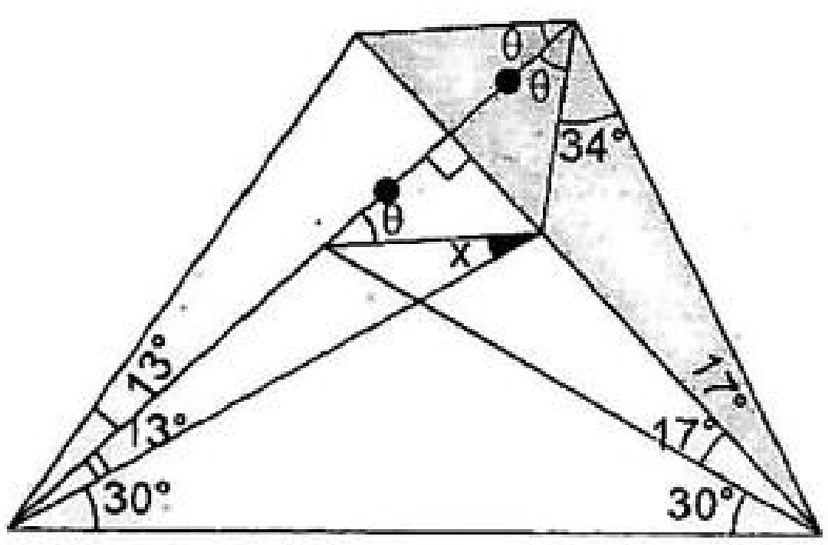
Scanned by CamScanner

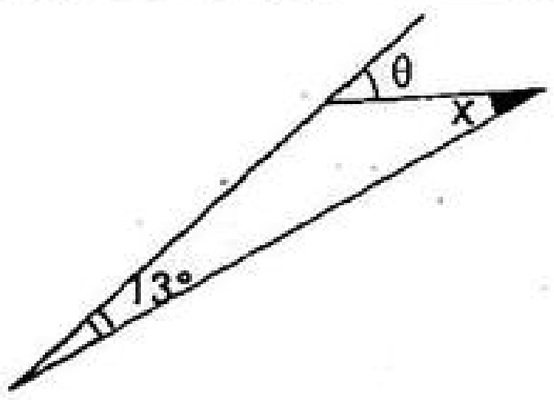
Paso N° 8. Tenemos la siguiente figura donde se observa:



$$\Rightarrow \theta + 34 + 17 = 90°$$
$$\theta + 51 = 90°$$
$$\theta = 39$$

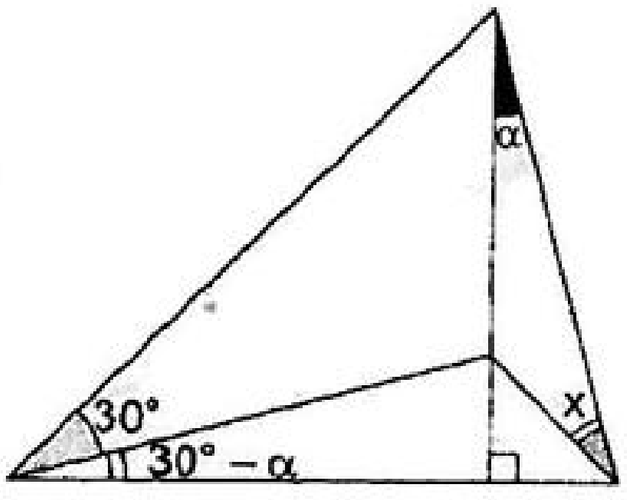
Llevando a la figura inicial:





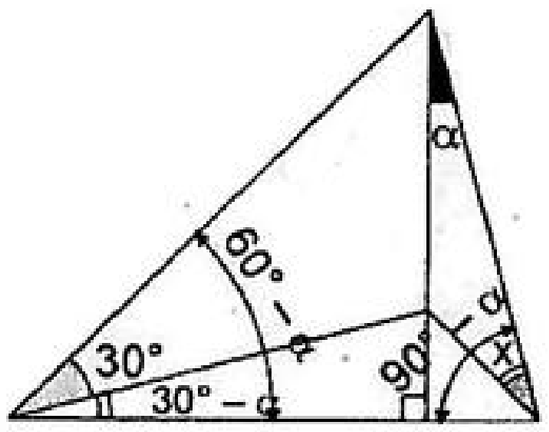
$$\Rightarrow \theta = x + 13°$$
$$39 = x + 13°$$
$$x = 26°$$

Problema 45. Calcular x.

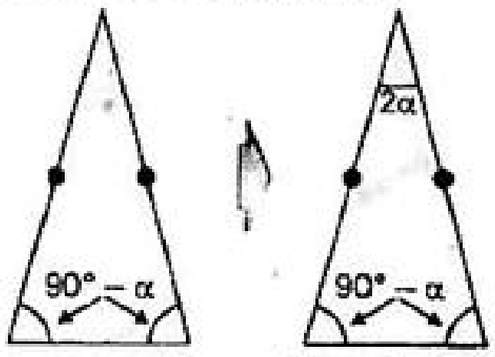


Resolución:

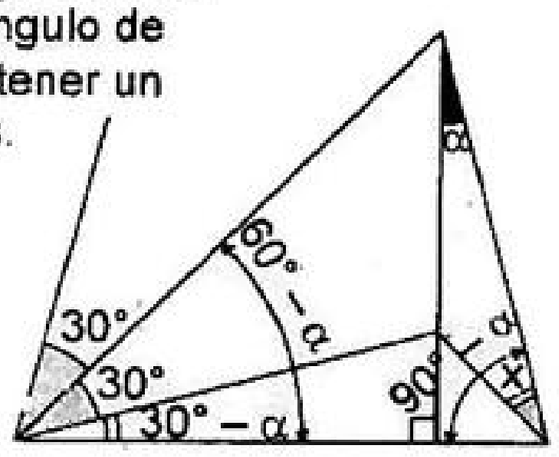
Paso N° 1. Completando los ángulos internos:

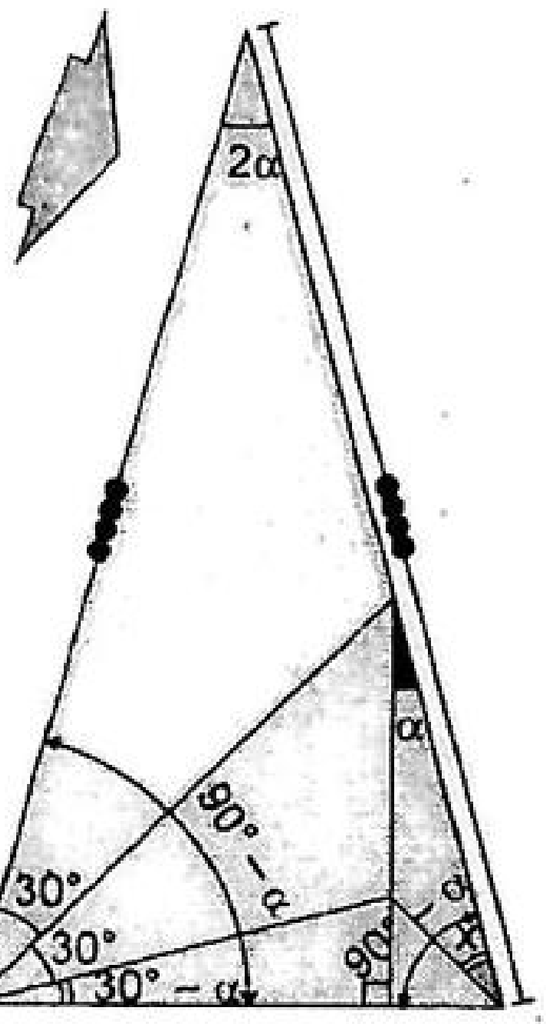


Paso N° 2. Podemos construir un triángulo isósceles de la forma:



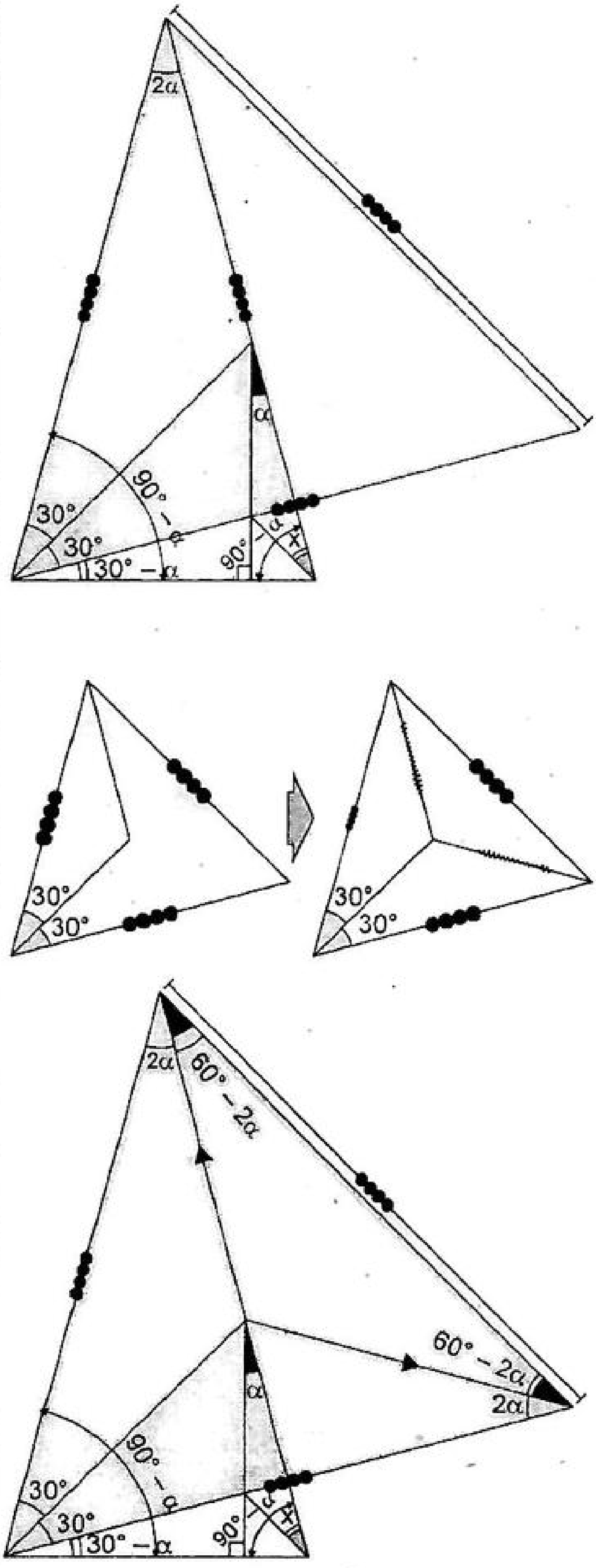
Agregamos un ángulo de 30° para obtener un ángulo de 90° − α y con ello tener un triángulo isósceles.



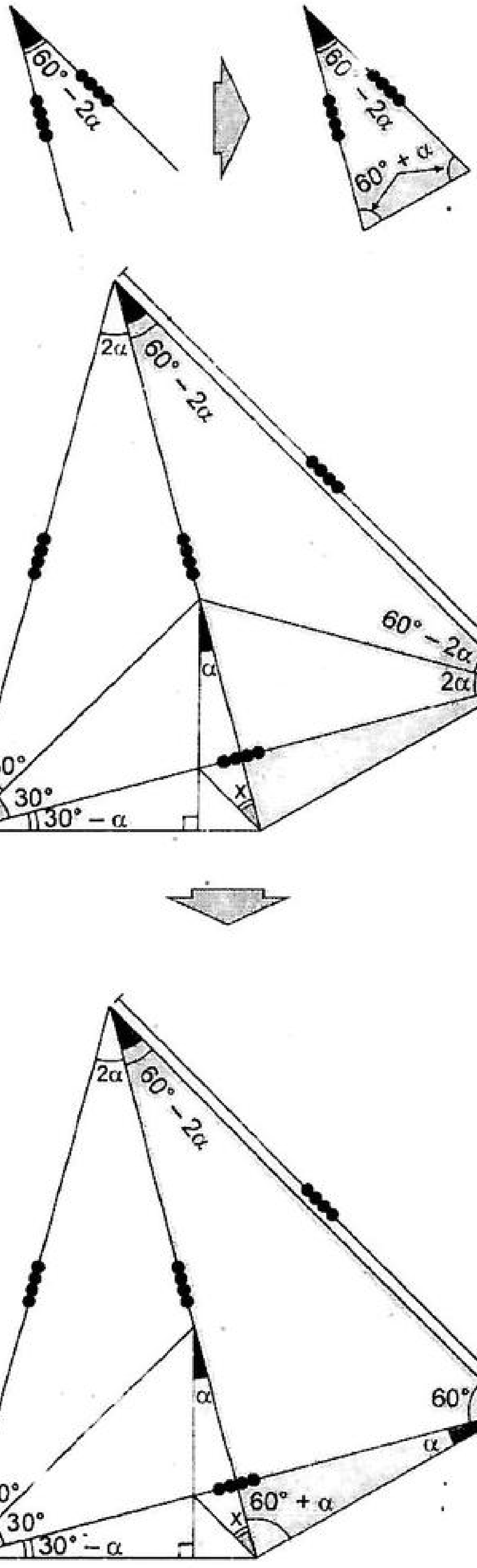


Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Ahora observamos una ángulo de 60°, entonces formaremos un triángulo equilátero de la siguiente forma:

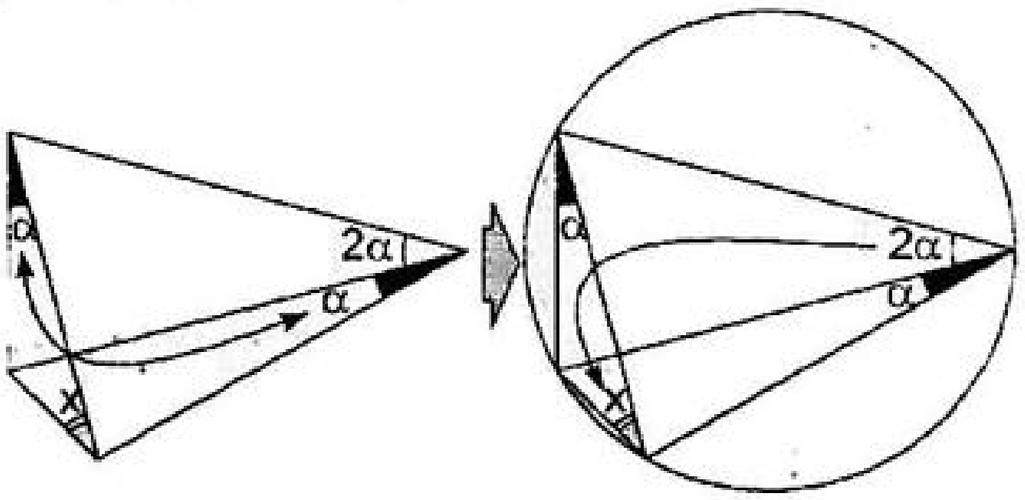


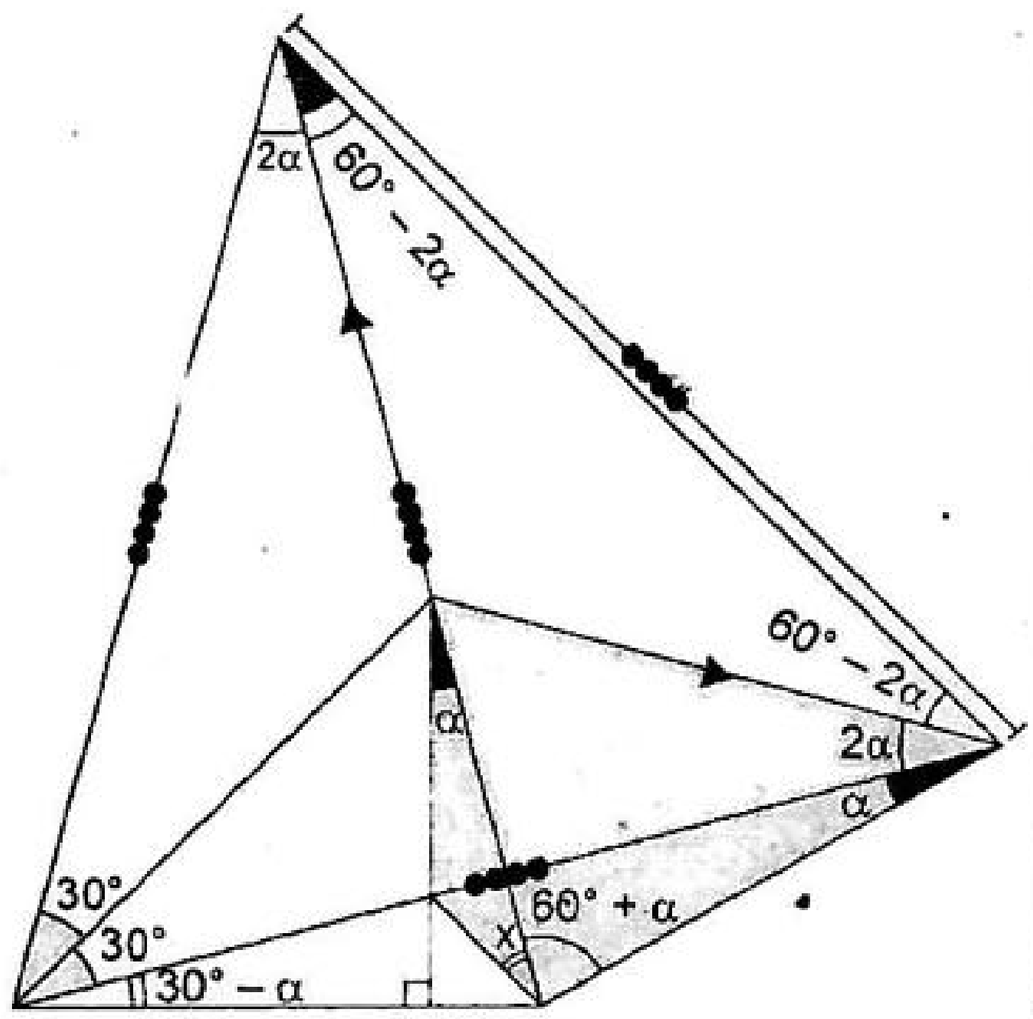
Paso N° 4. También se obtiene un triángulo isósceles de la forma:



Scanned by CamScanner

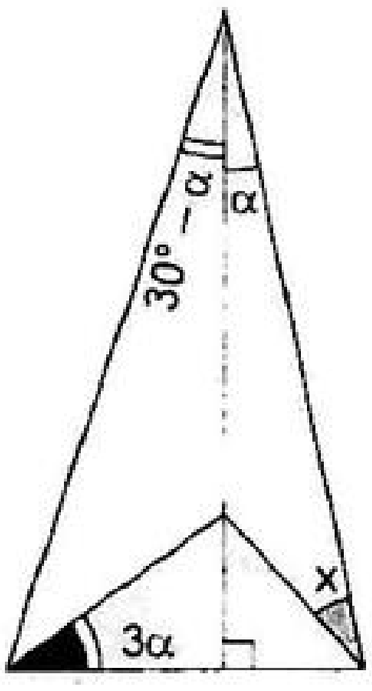
Paso N° 5. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:





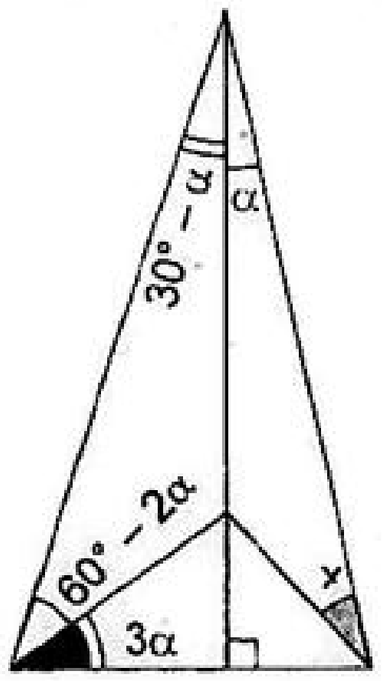
$\therefore x = 2\alpha$

Problema 46. Calcular x.

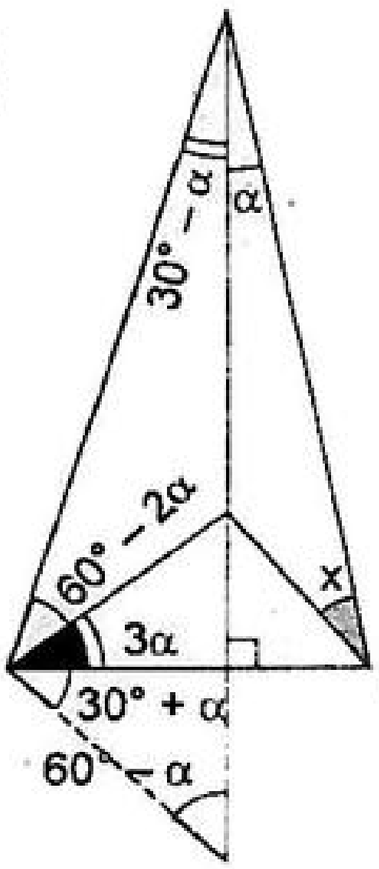


Resolución:

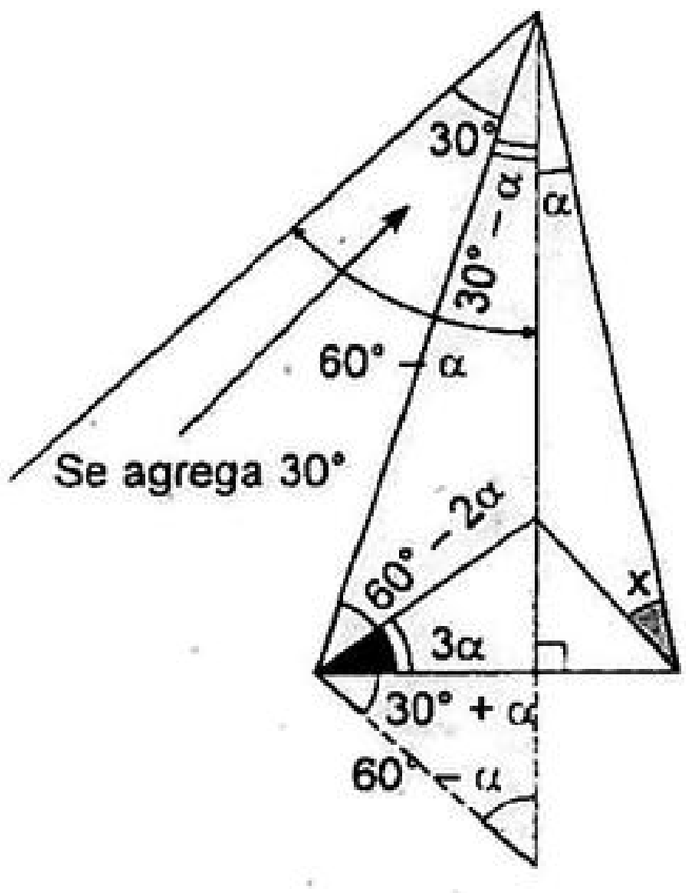
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos:



Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo para buscar un ángulo de $(60° - \alpha)$, así:

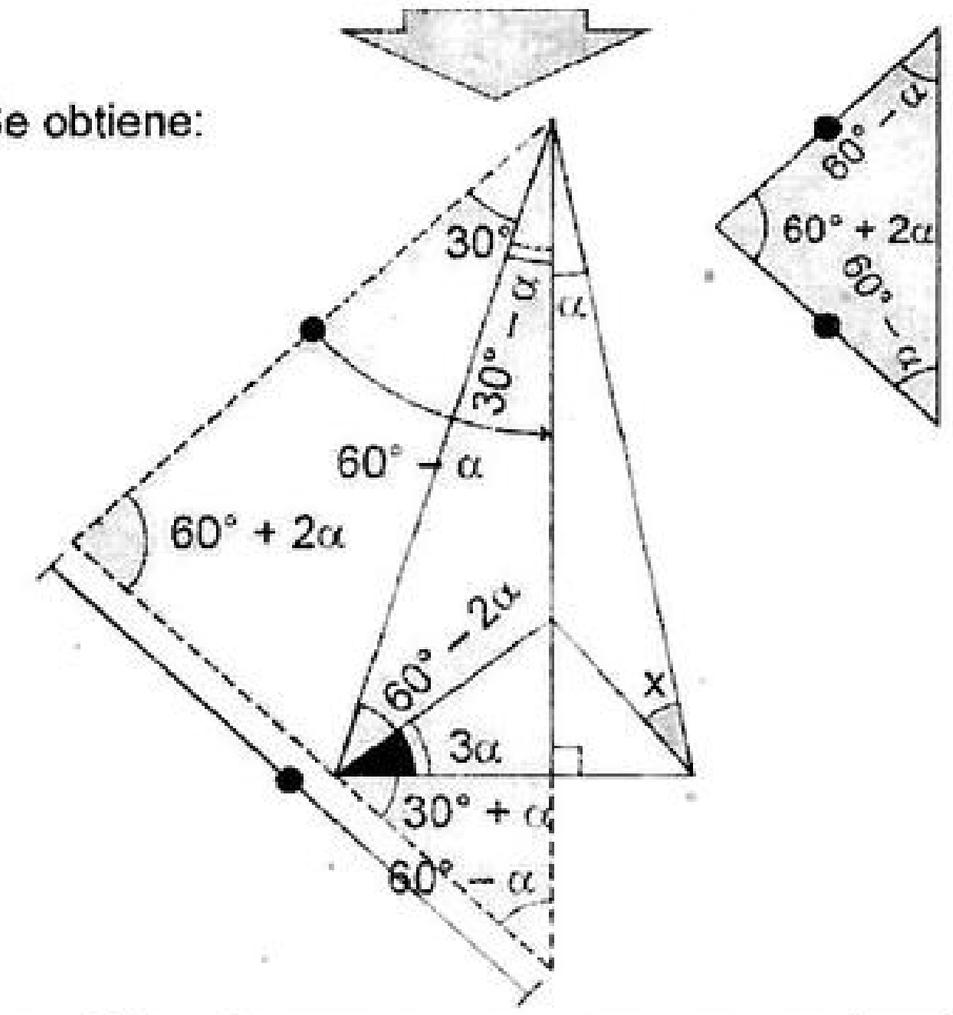


Paso N° 3. Ahora agregamos un ángulo de 30° para que sumado con $(30° + \alpha)$ nos de $(60° - \alpha)$ y así obtener un triángulo isósceles:

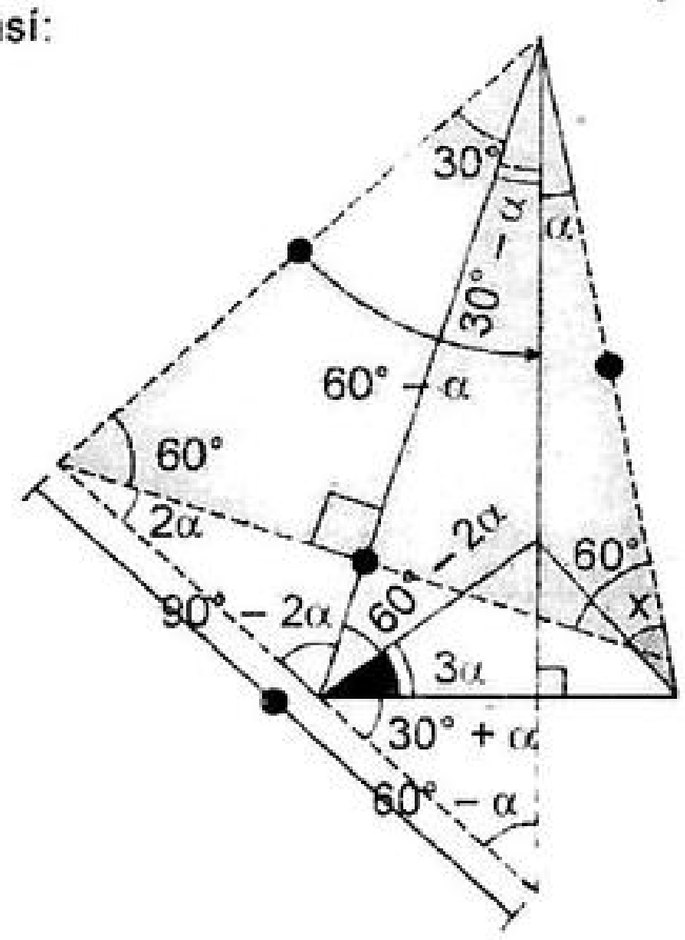


Scanned by CamScanner

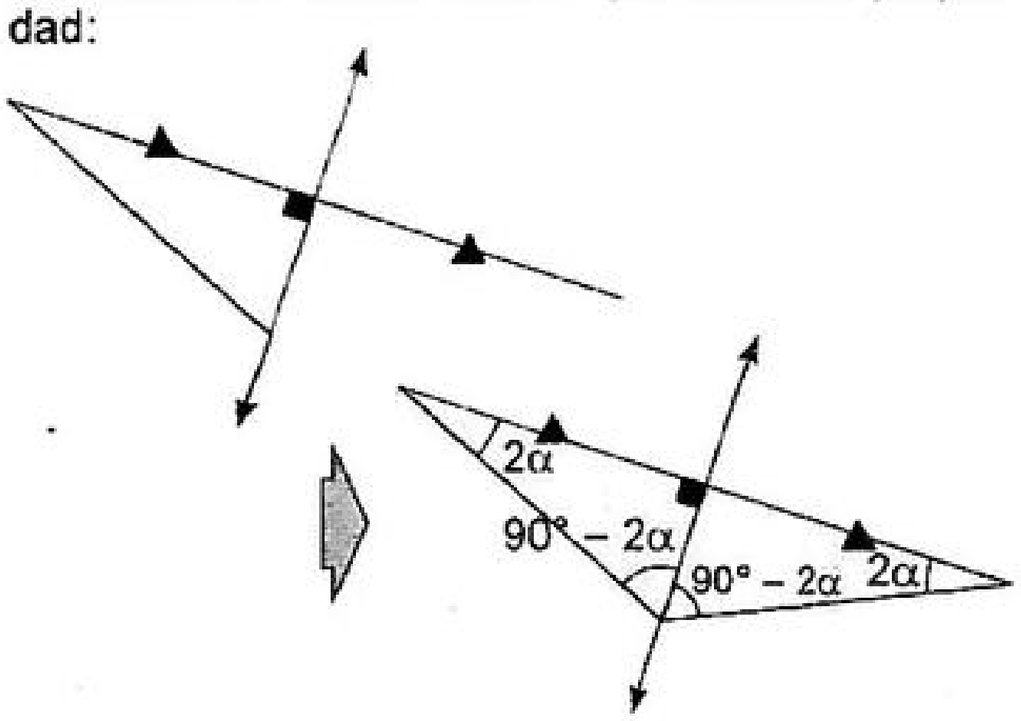
Se obtiene:



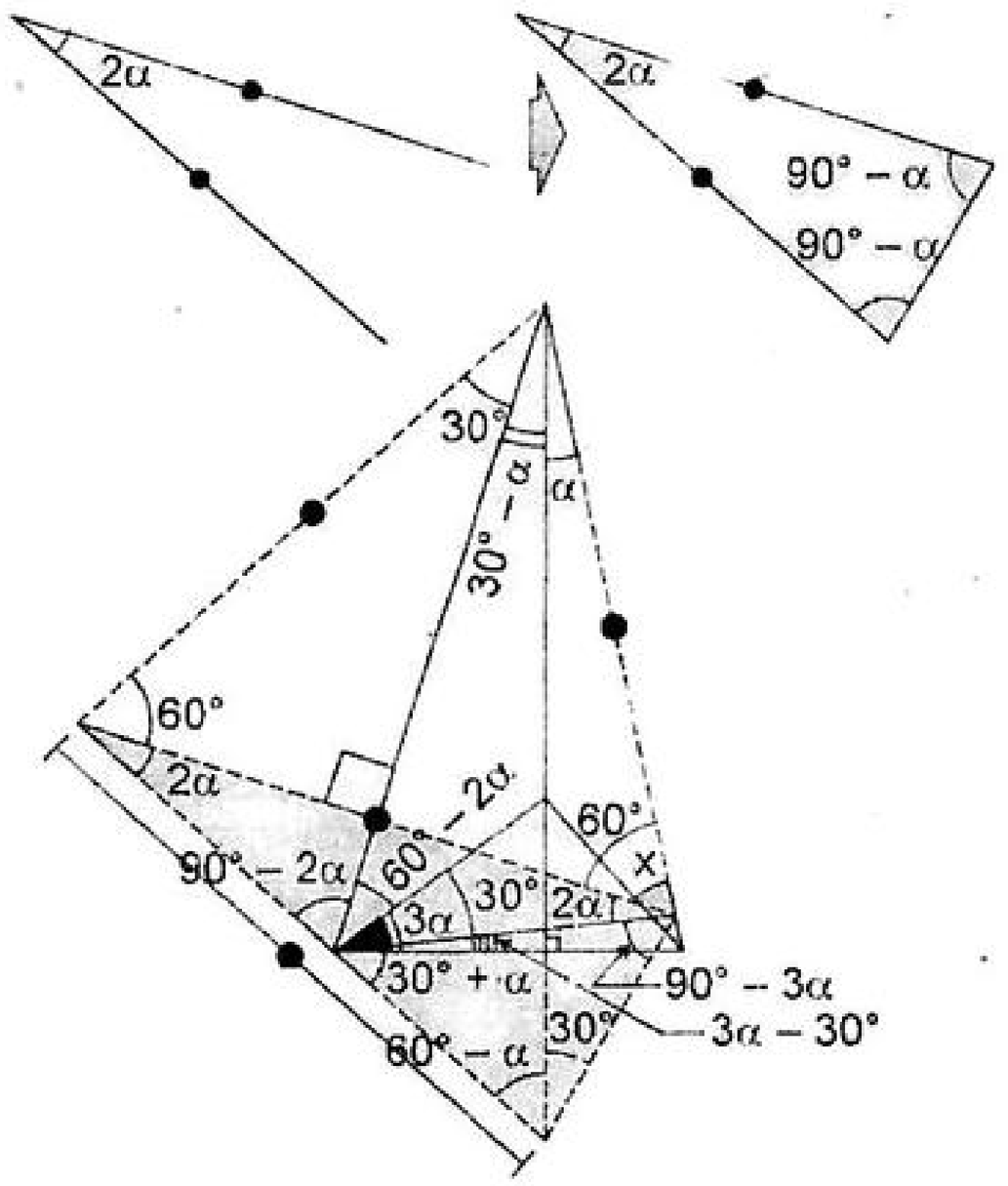
Paso N° 4. Observamos que tenemos un ángulo de 60°, entonces construimos un triángulo equilátero, así:



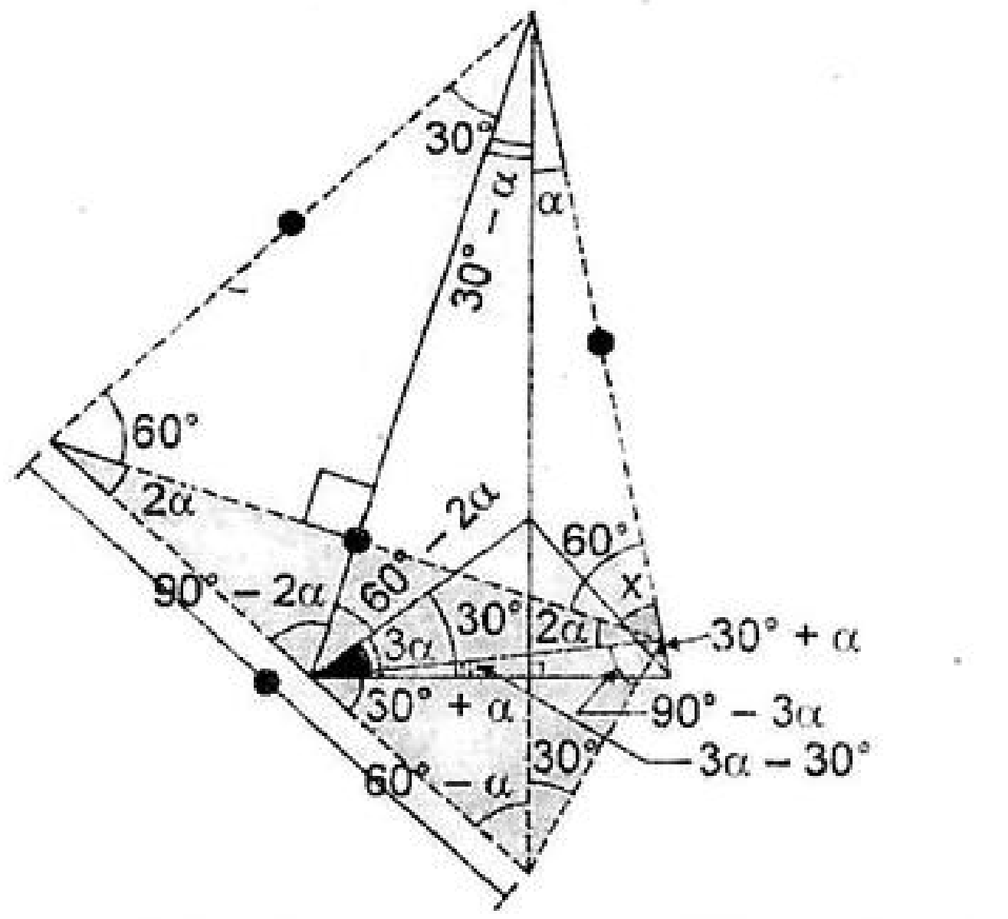
Paso N° 5. Ahora se tiene en el triángulo equilátero una recta mediatriz, donde aplicamos su propiedad:



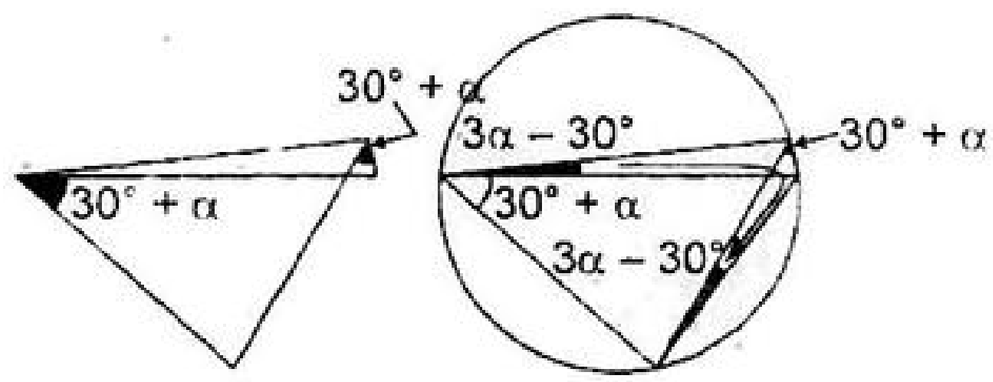
Paso N° 6. También observamos un nuevo triángulo isósceles, de la forma:



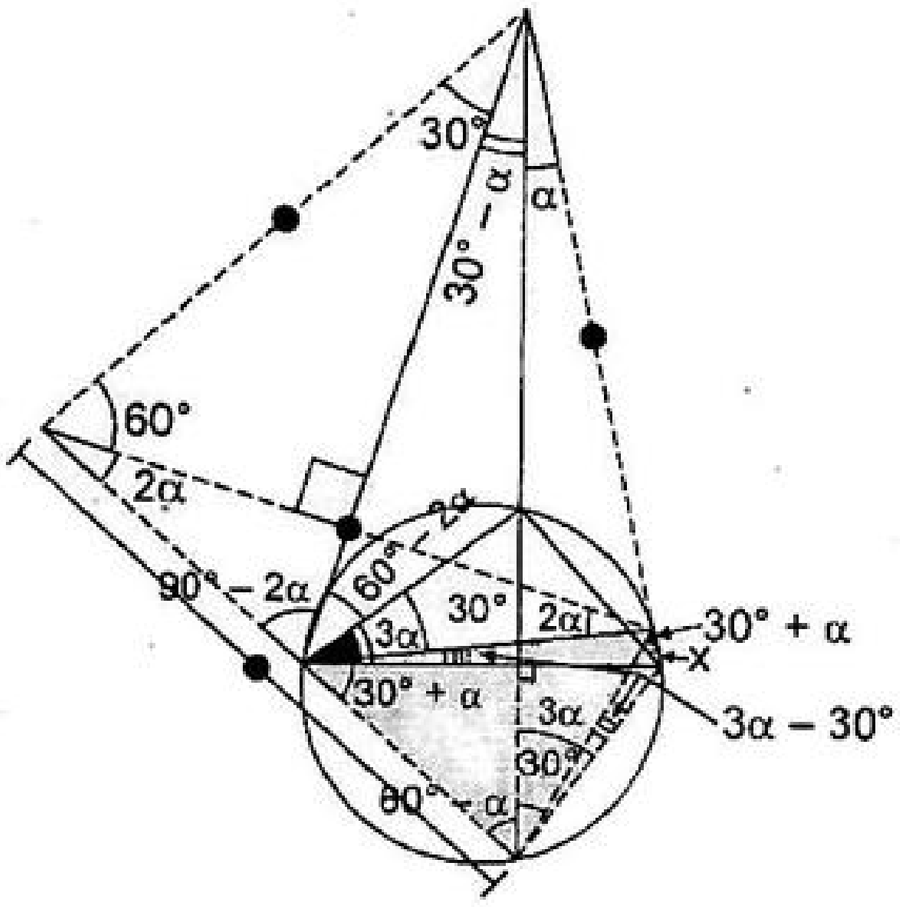
Paso N° 7. Completando ángulos tenemos::



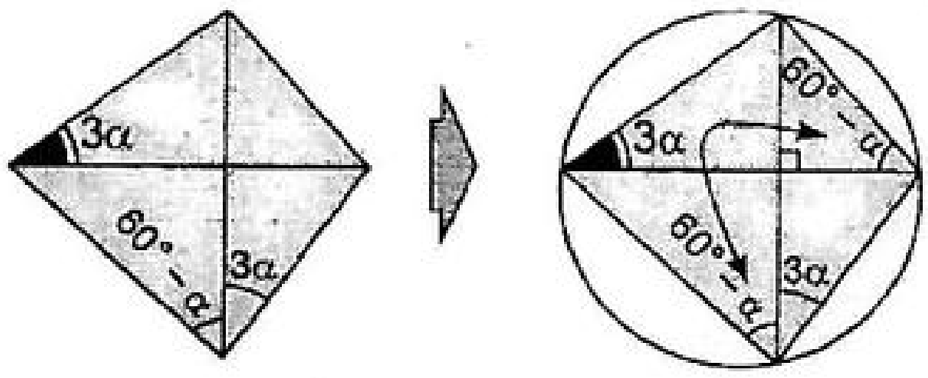
Paso N° 8. Observamos un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón:

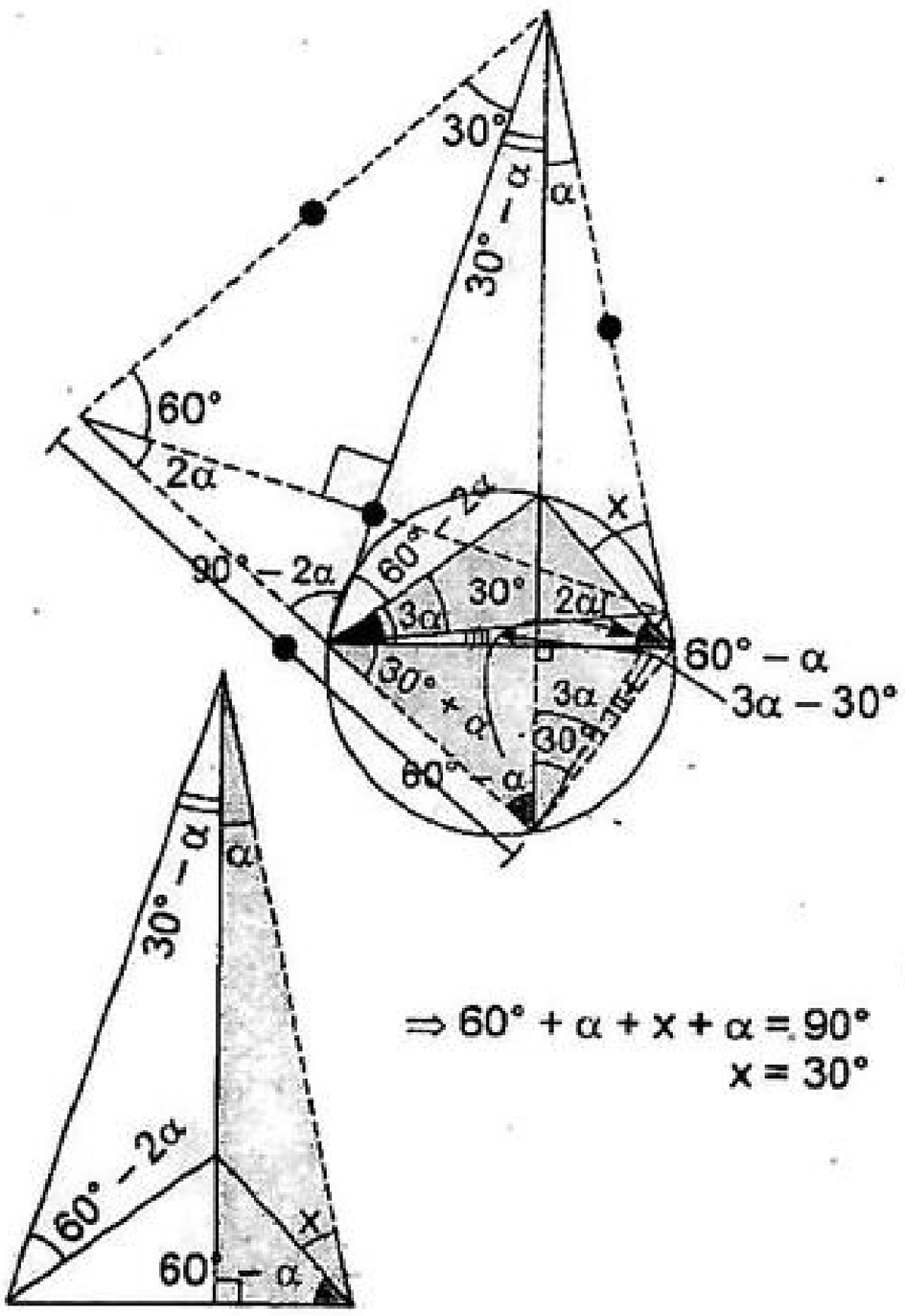


Scanned by CamScanner



Paso N° 9 Tenemos ahora un nuevo cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

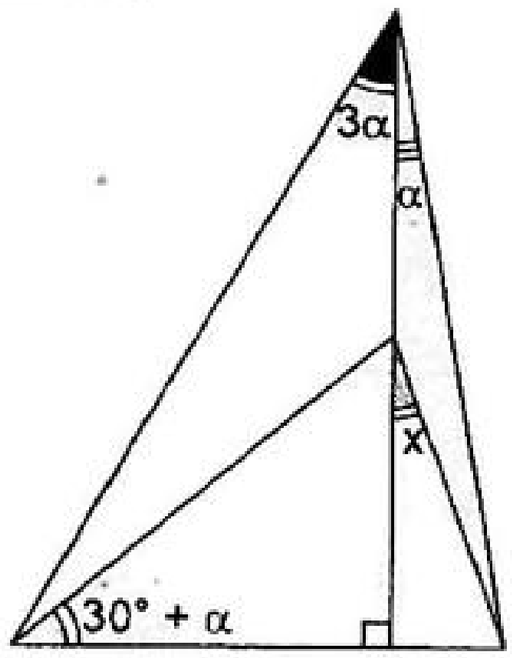




$\Rightarrow 60° + \alpha + x + \alpha = 90°$

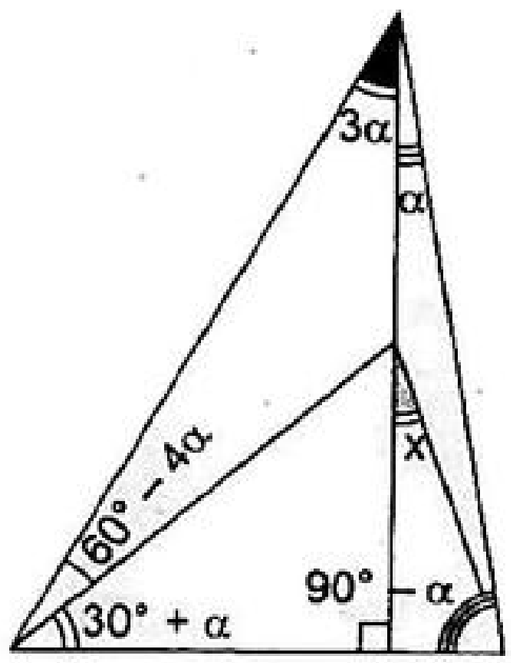
$x = 30°$

Problema 47. Calcular x.

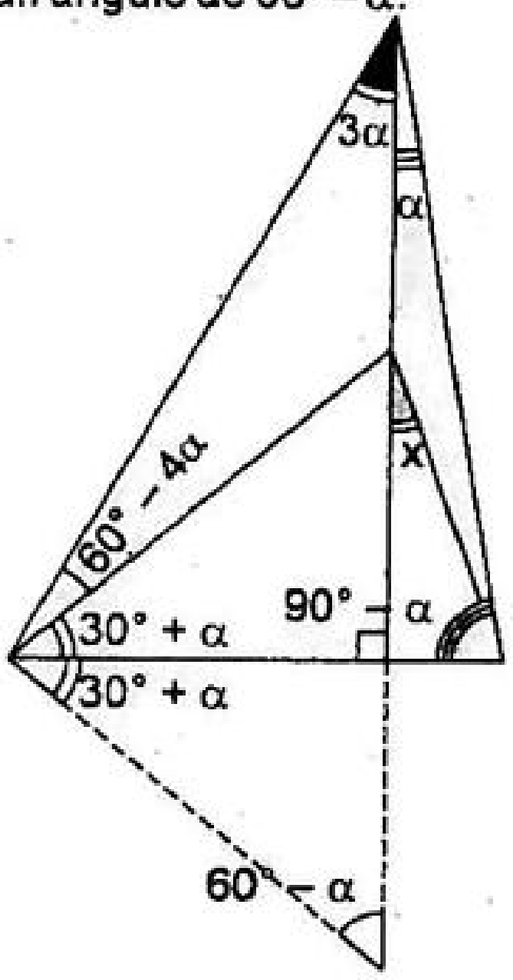


Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos:

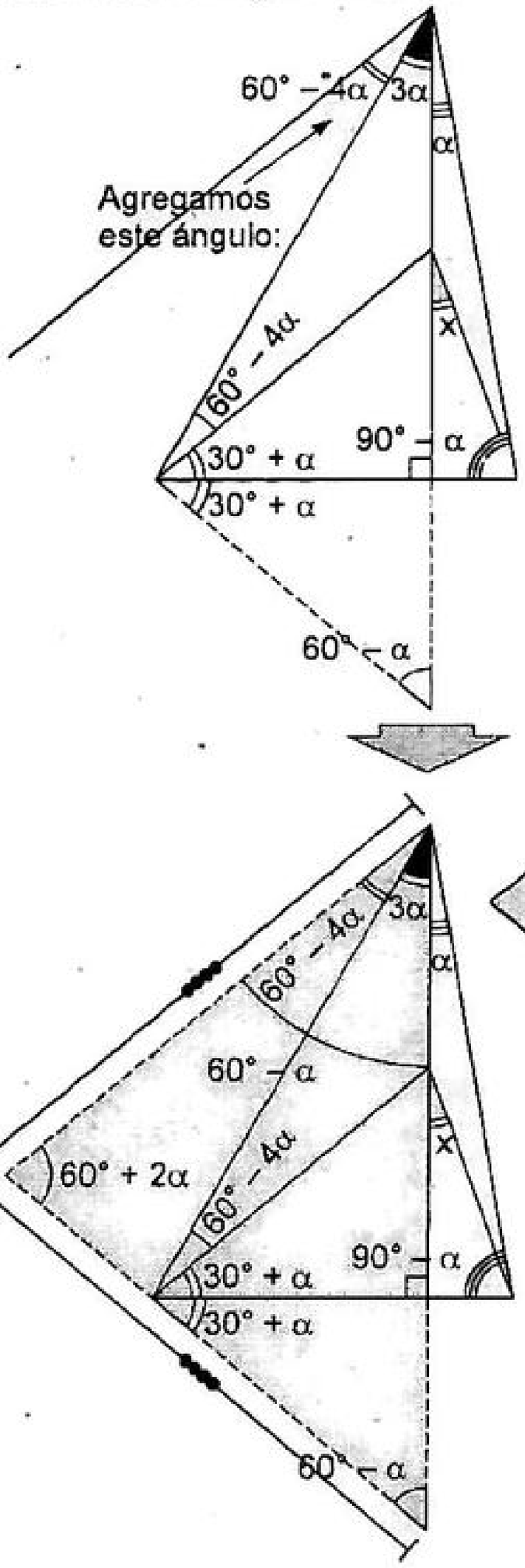


Paso N° 2. Ahora hacemos el siguiente trazo para obtener un ángulo de $60° - \alpha$.

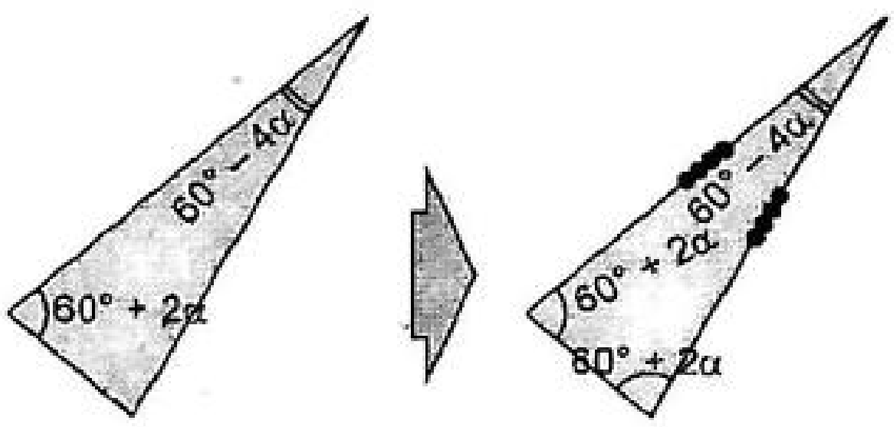


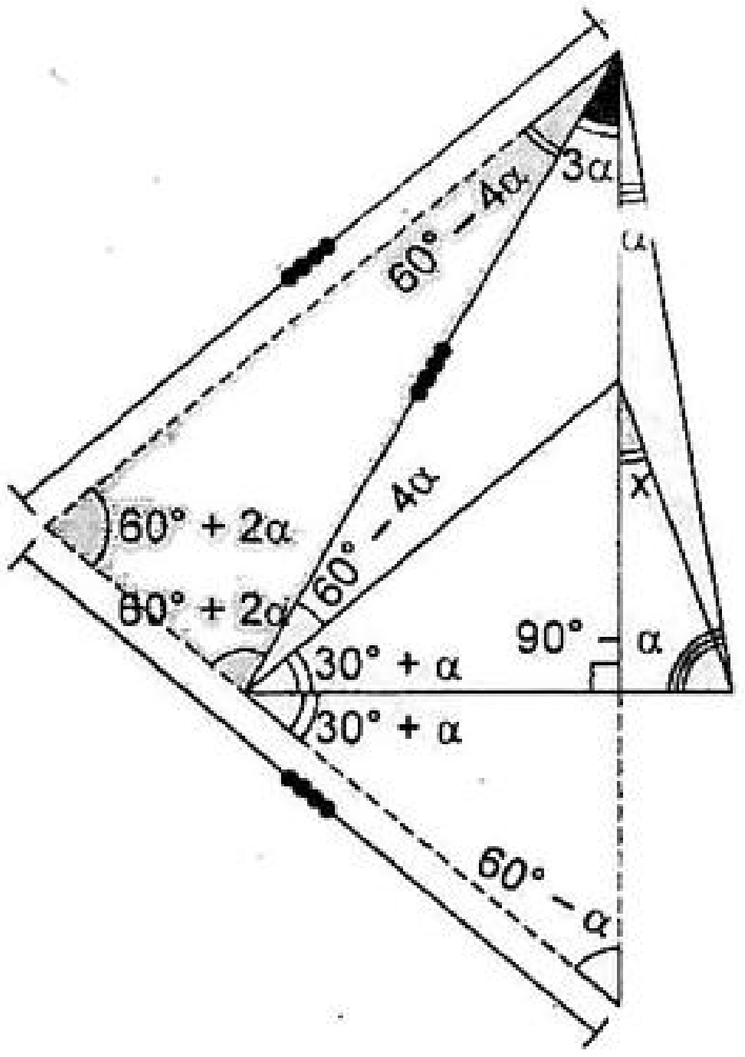
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Ahora agregamos un ángulo de 60° – 4α, para que sumado con 3α resulte: 60° – α y así obtenemos un triángulo isósceles:

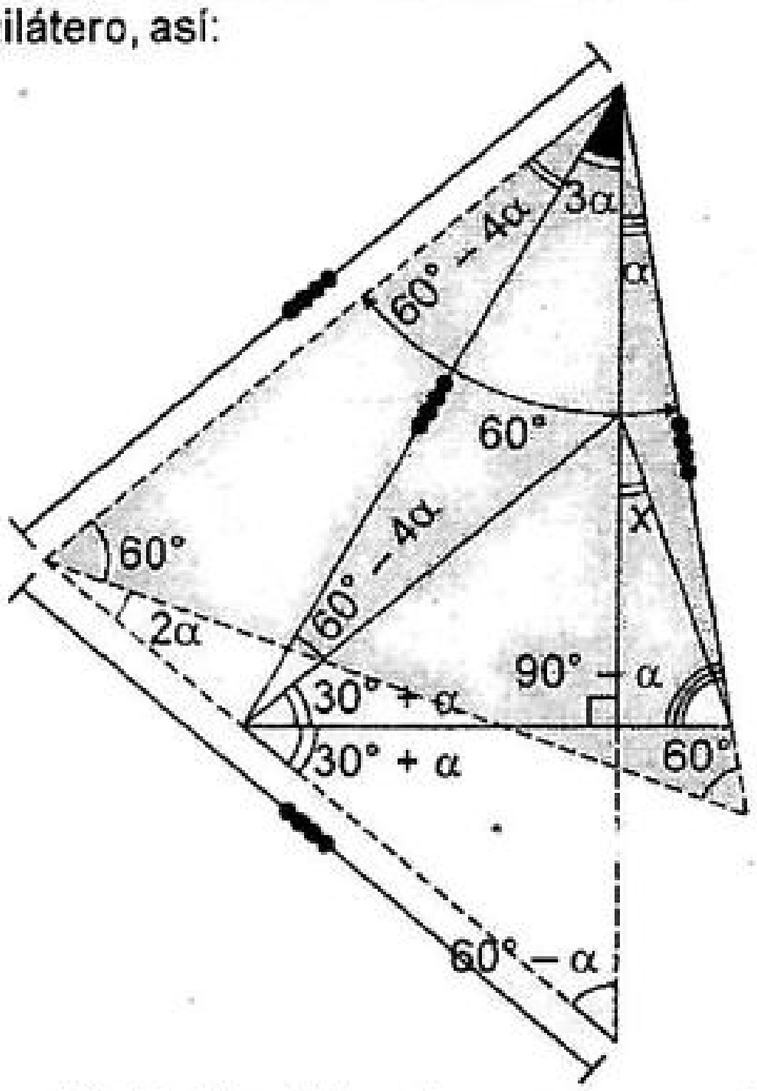


Paso N° 4. También observamos un triángulo isósceles:

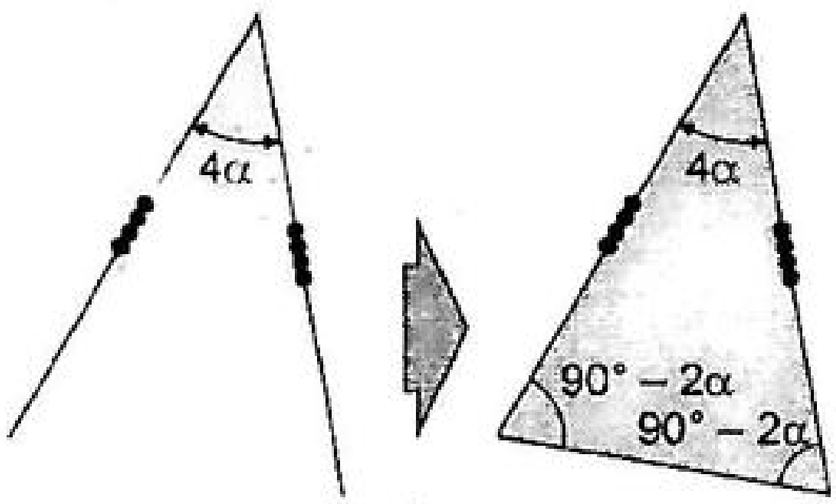




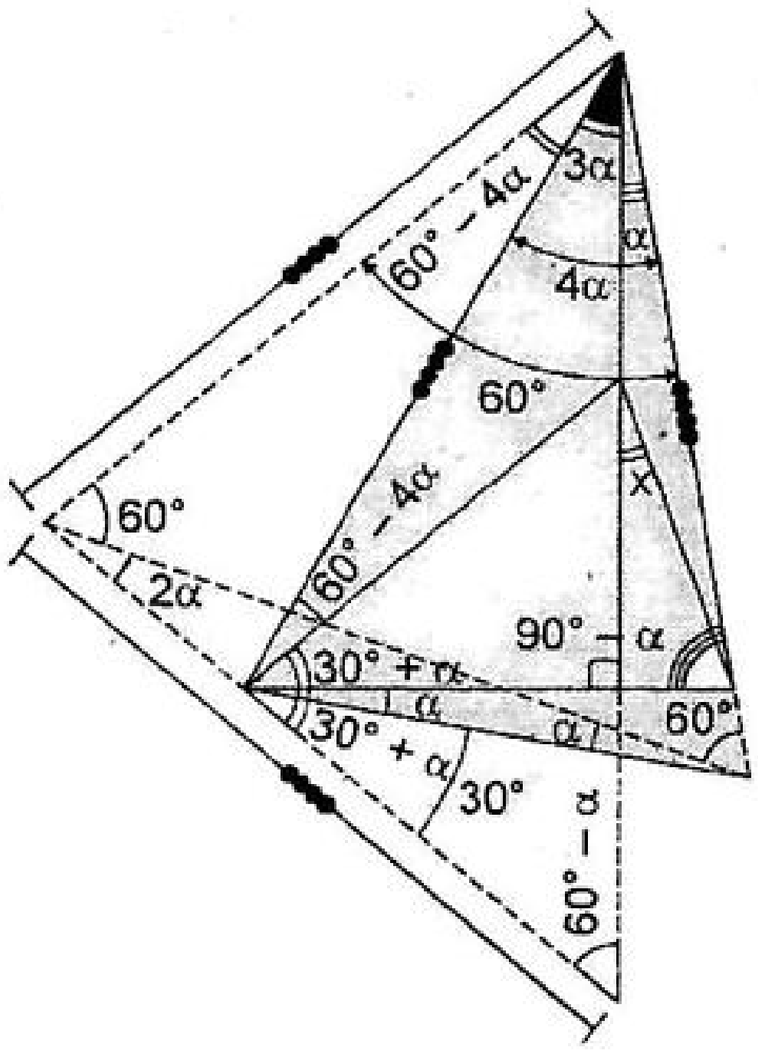
Paso N° 5. Observamos que tenemos un ángulo de 60°, entonces construimos un triángulo equilátero, así:



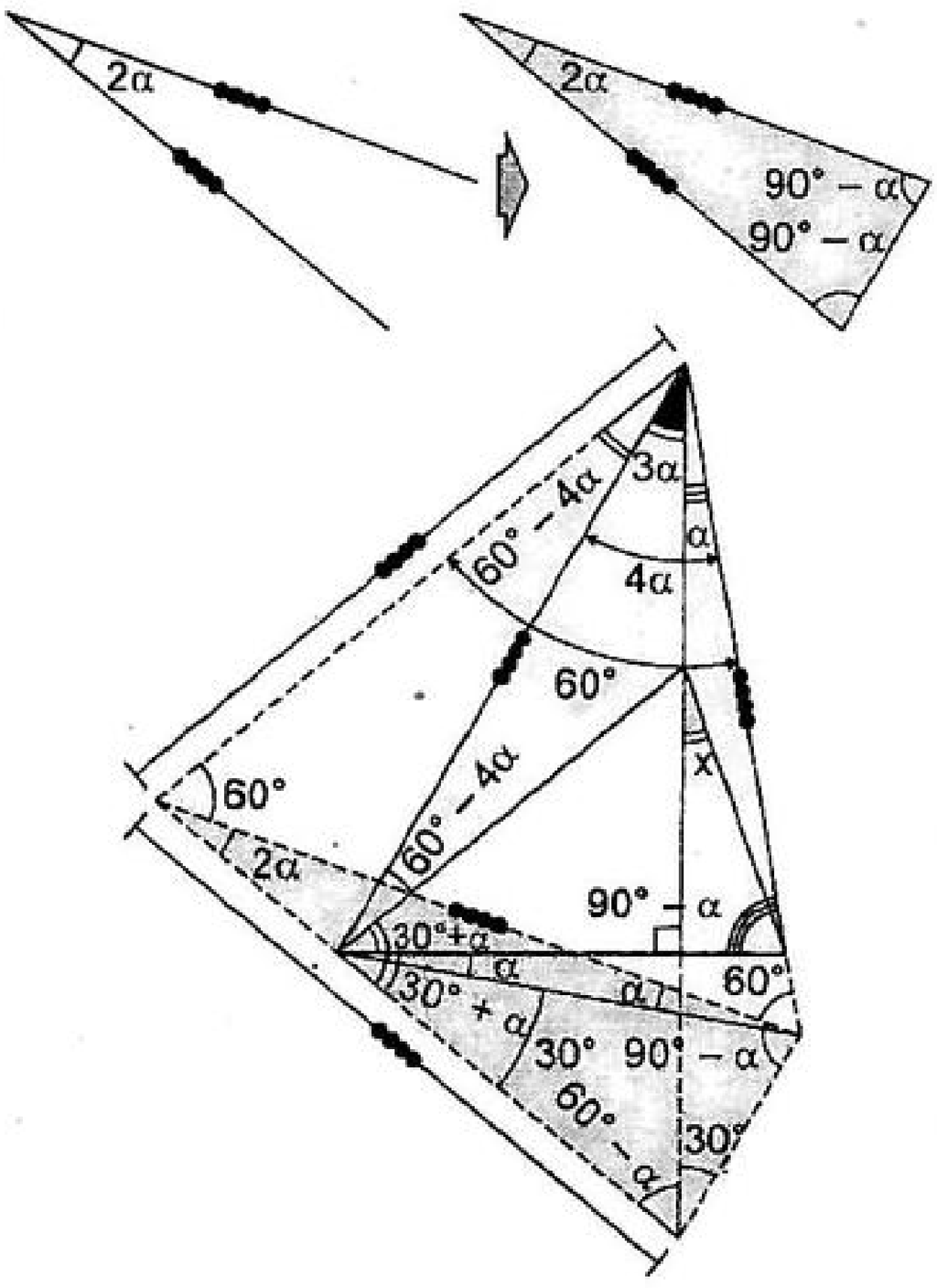
Paso N° 6. También observamos un triángulo isósceles de la forma:



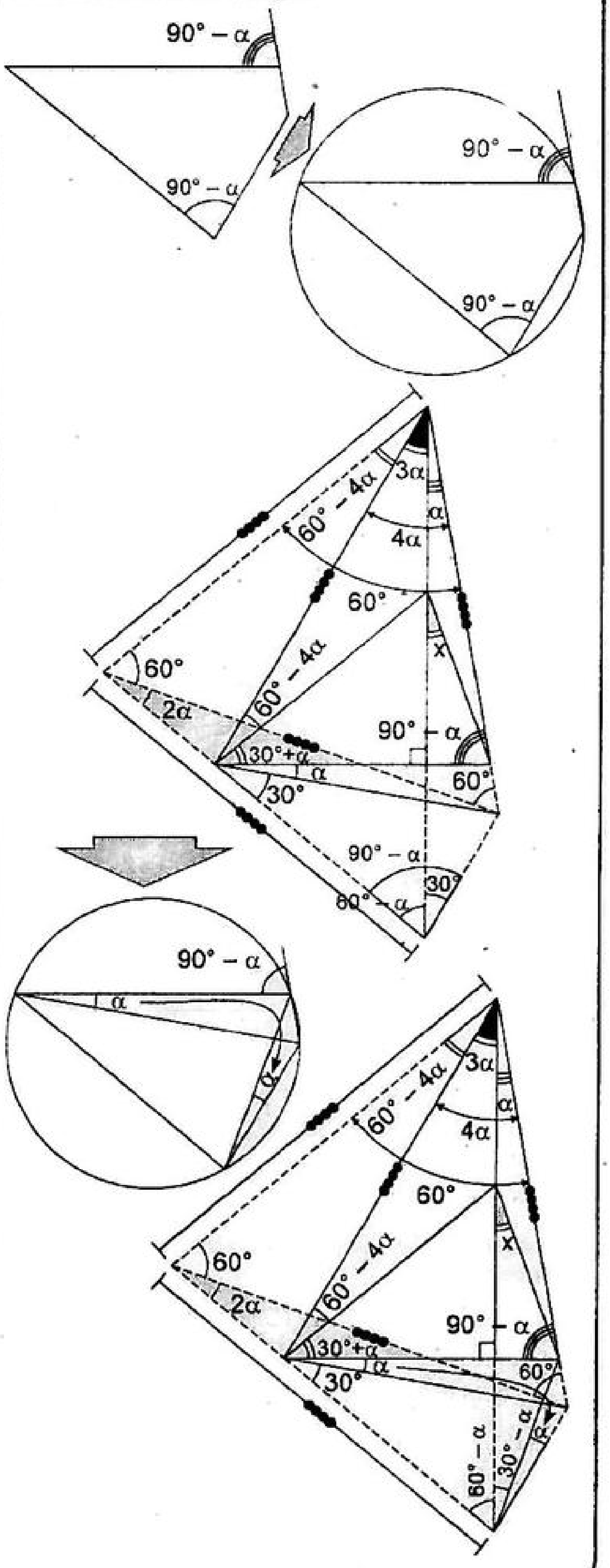
Scanned by CamScanner



Paso N° 7. Ahora observemos un nuevo triángulo isósceles de la forma:

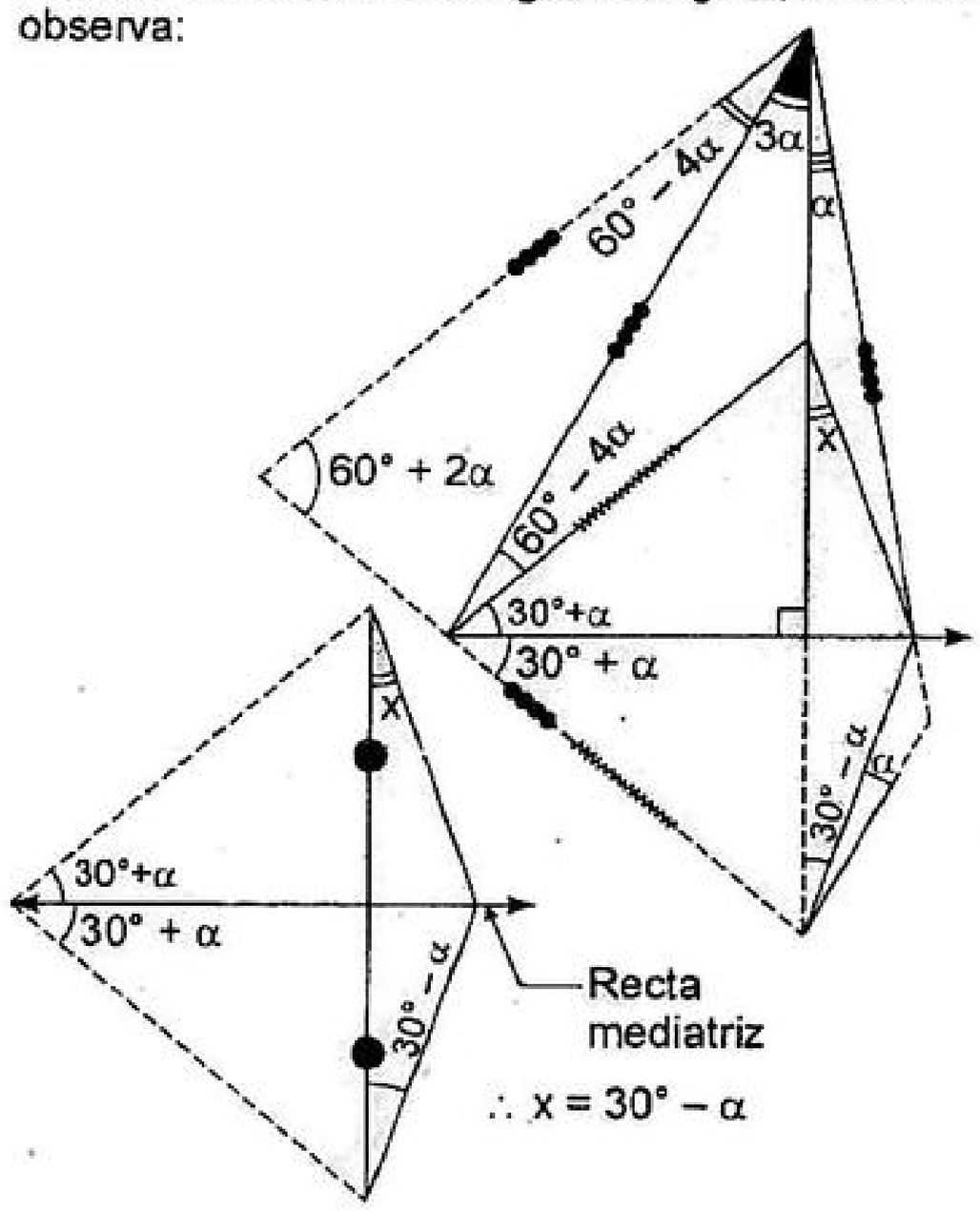


Paso N° 8. Ahora se observa que se tiene un cuadrilátero donde cumple:



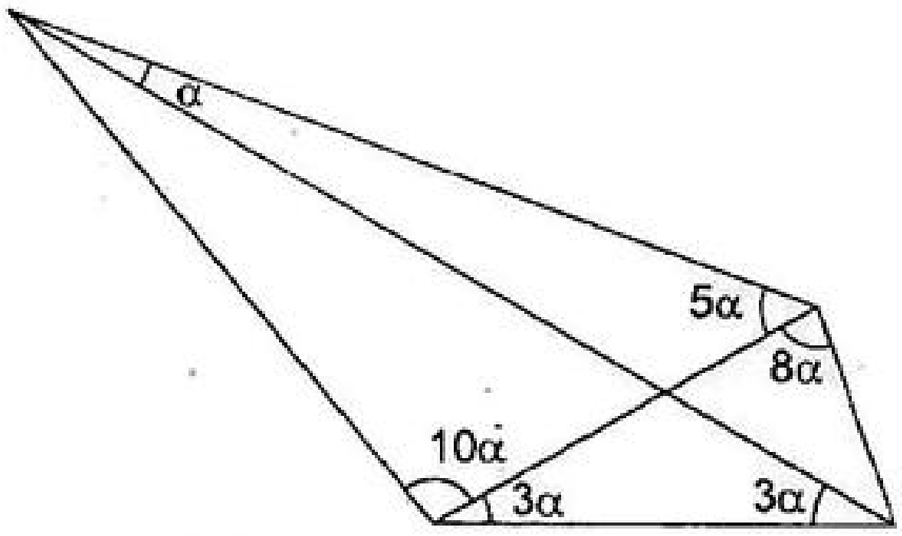
Scanned by CamScanner

Paso N° 9. Se obtuvo la siguiente figura, donde se observa:



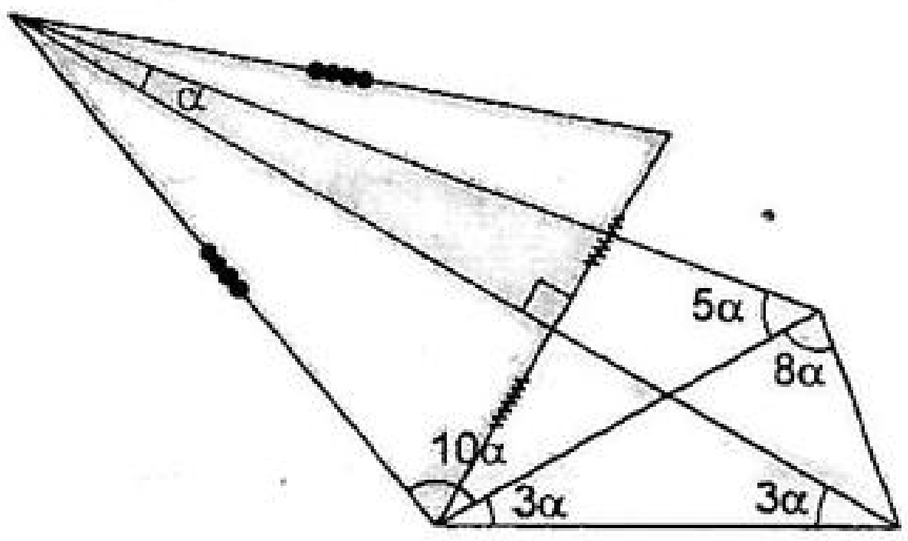
$\therefore x = 30° - \alpha$

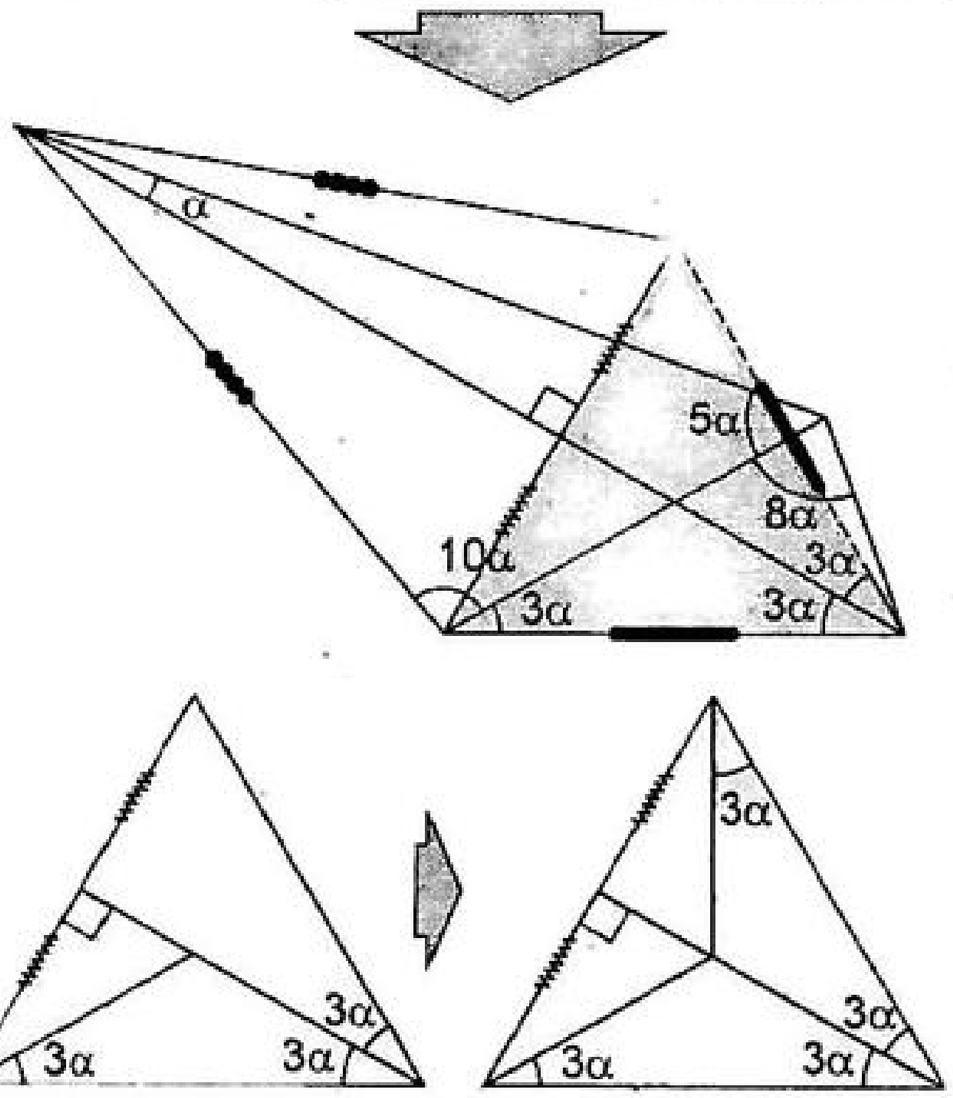
Problema 48. Calcular x.

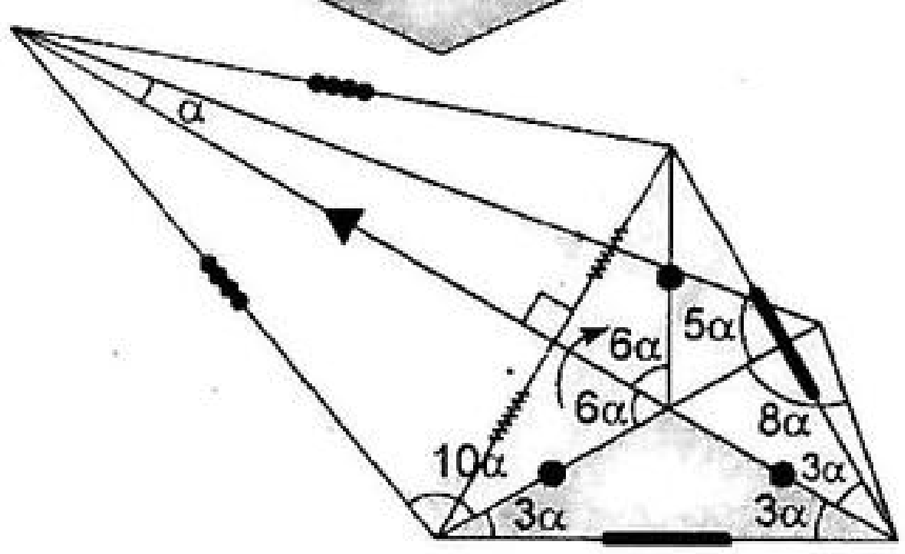


Resolución:

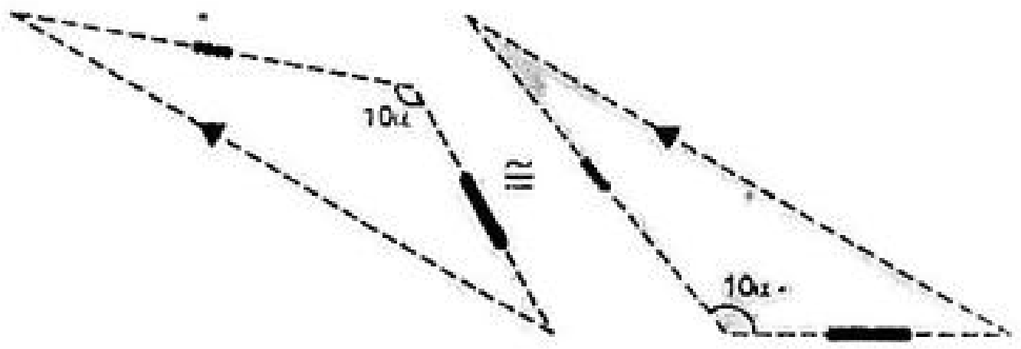
Paso N° 1.Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles donde se observe la mediatriz, así:

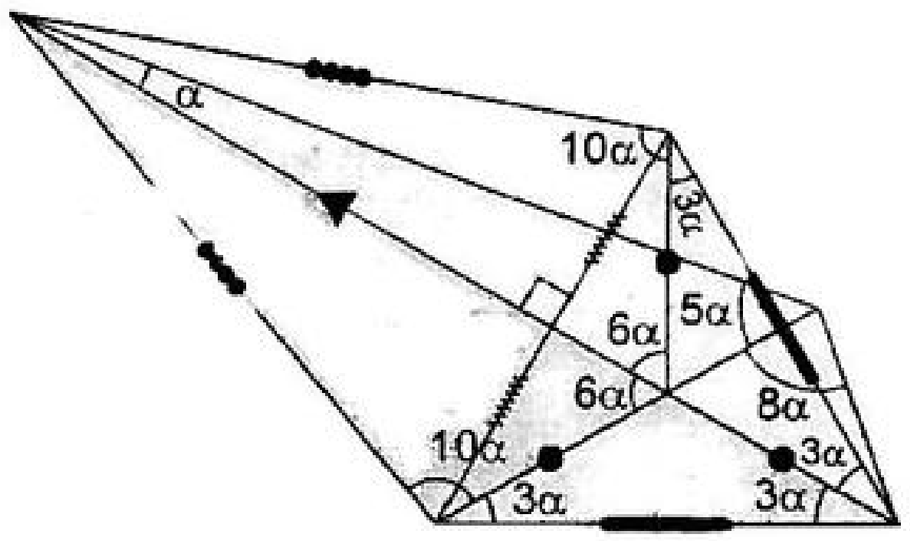






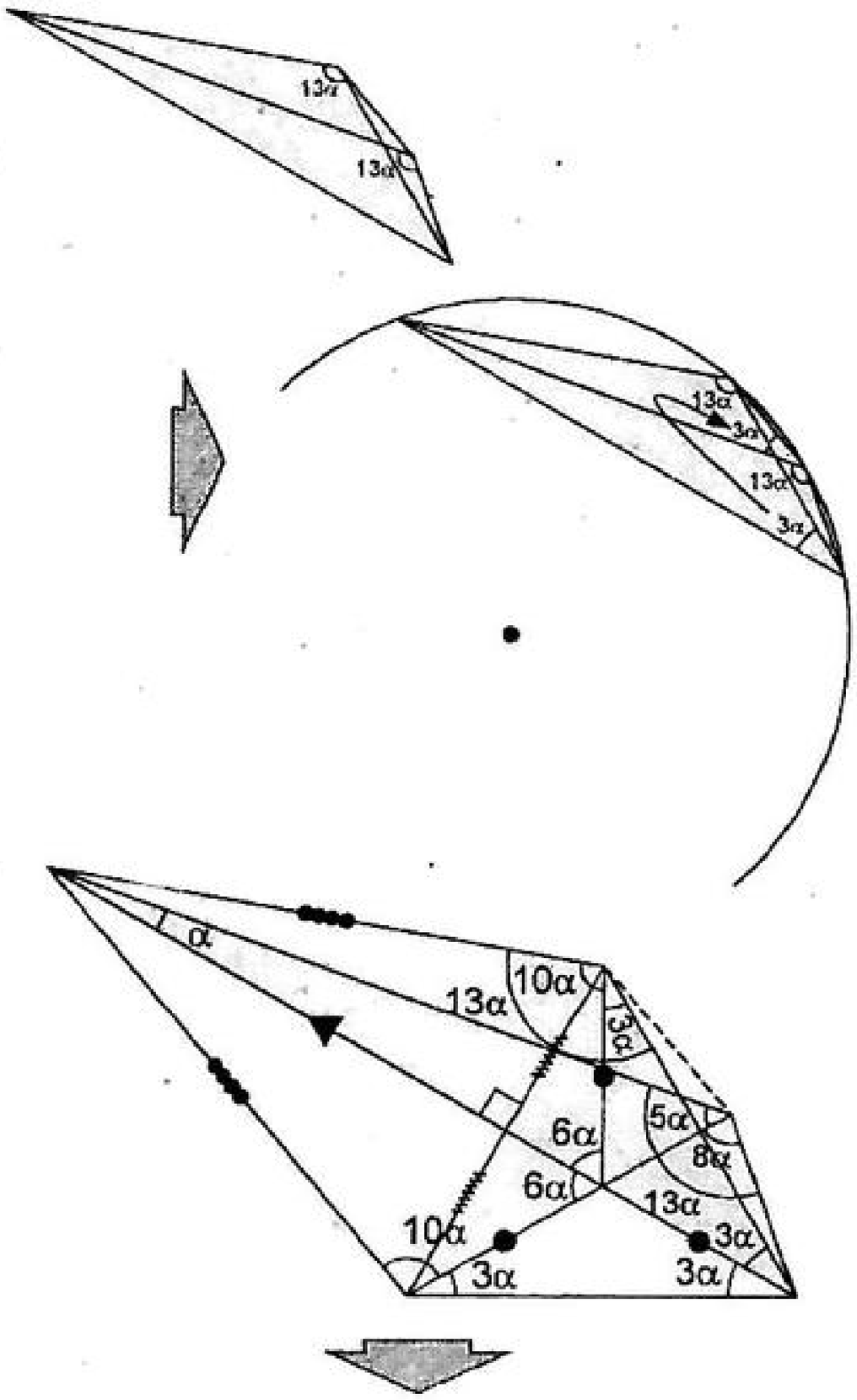
Paso N° 2. Observamos dos triángulos congruentes (Caso L.L.L.):



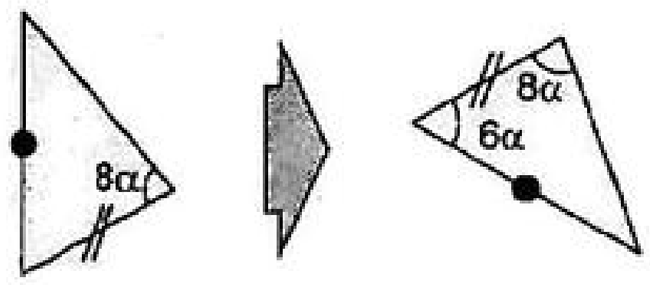


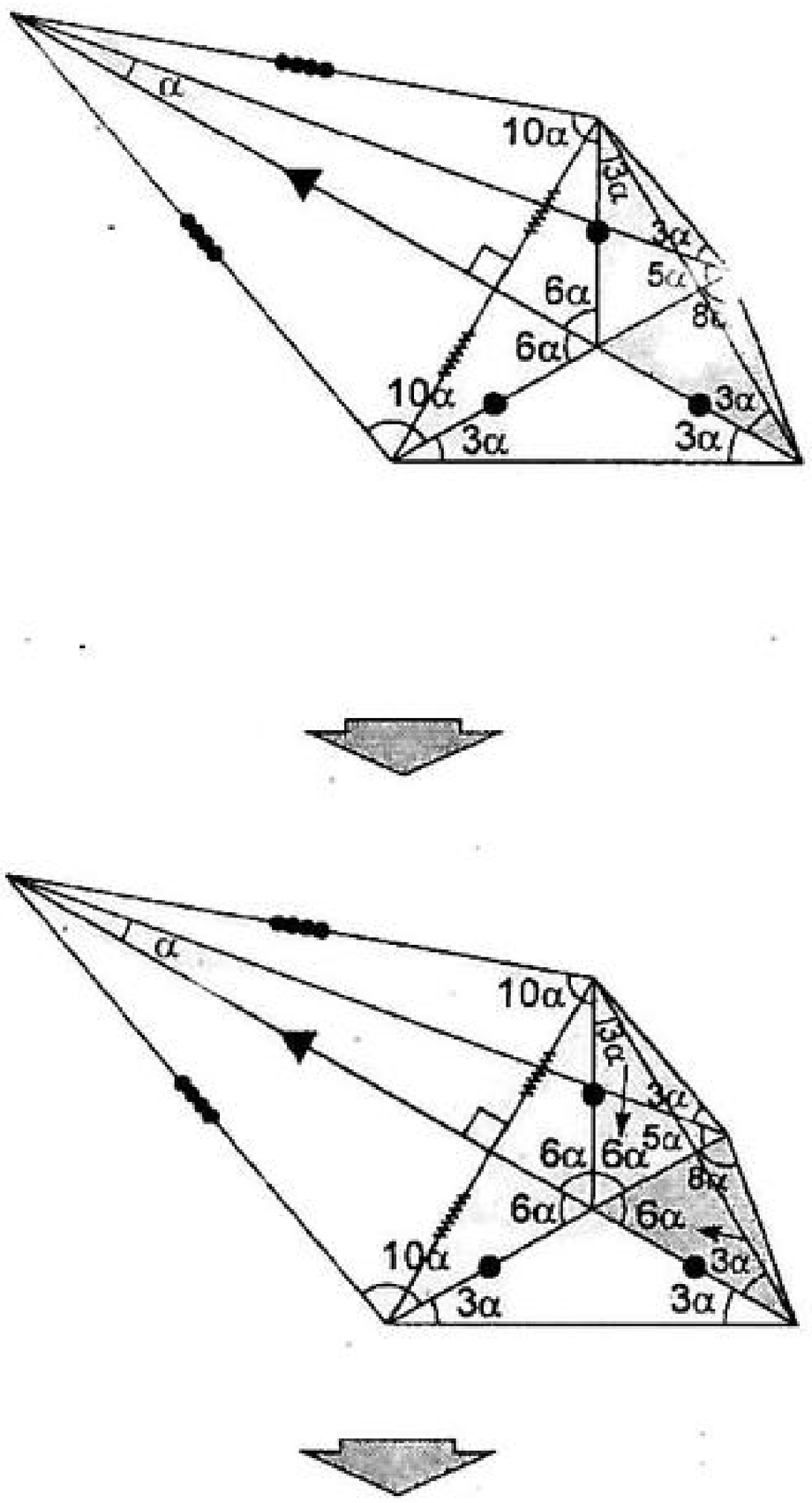
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Se observa que se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

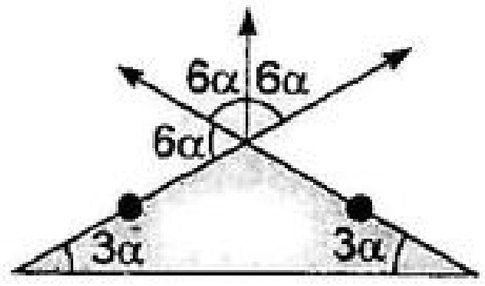


Paso N° 4. Nuevamente observamos dos triángulos que cumplen el cuarto caso de congruencia:





∴ tenemos la siguiente figura donde cumple (ángulo llano).

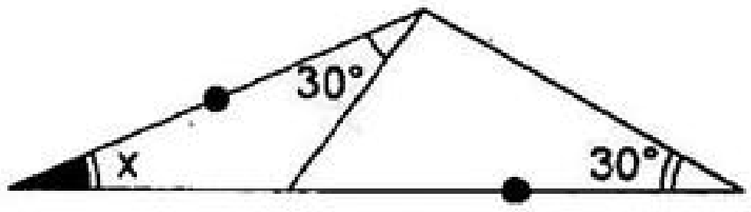


∴ $6\alpha + 6\alpha + 6\alpha = 180°$

$18\alpha = 180°$

$x = 10°$

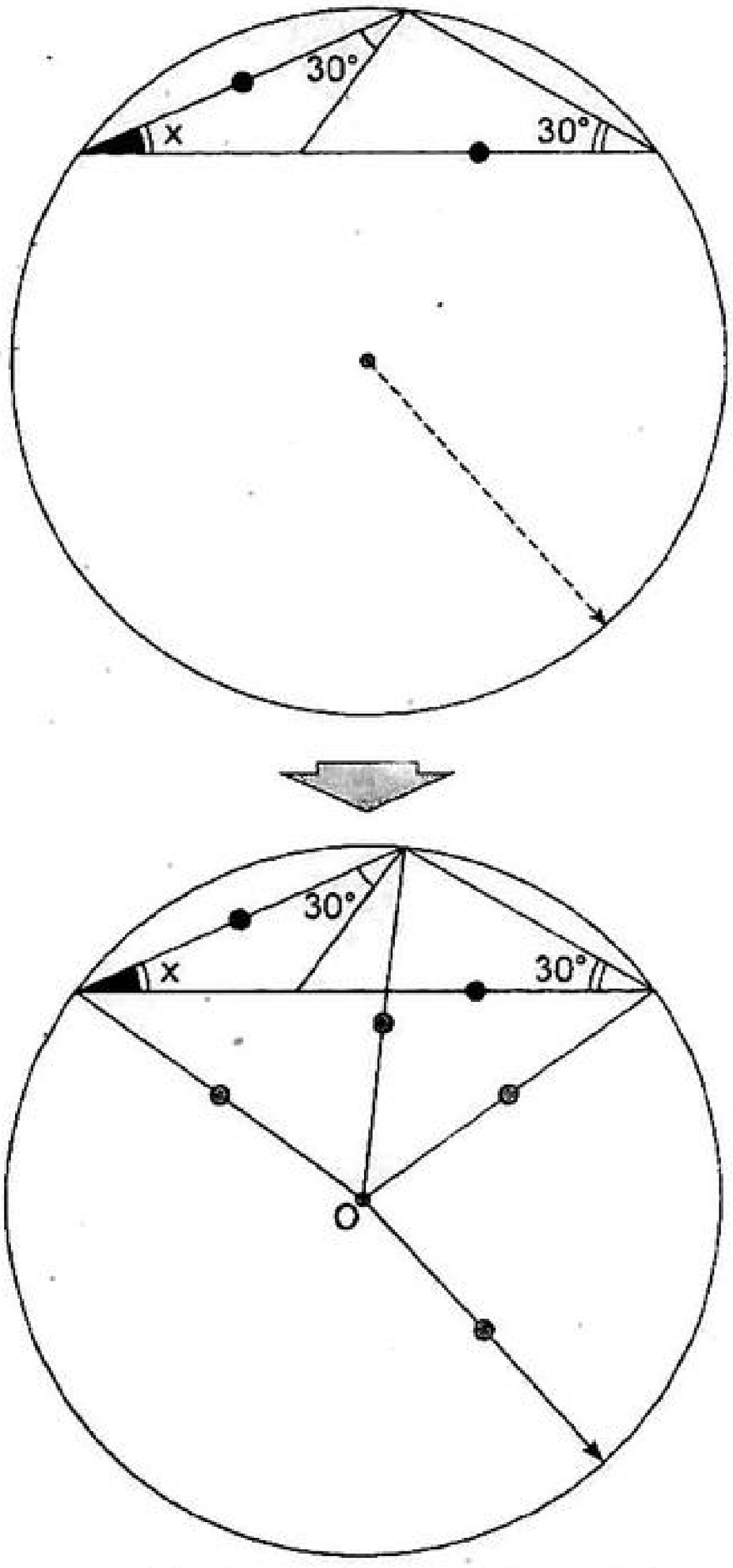
Problema 49. Caso general. Calcular x.



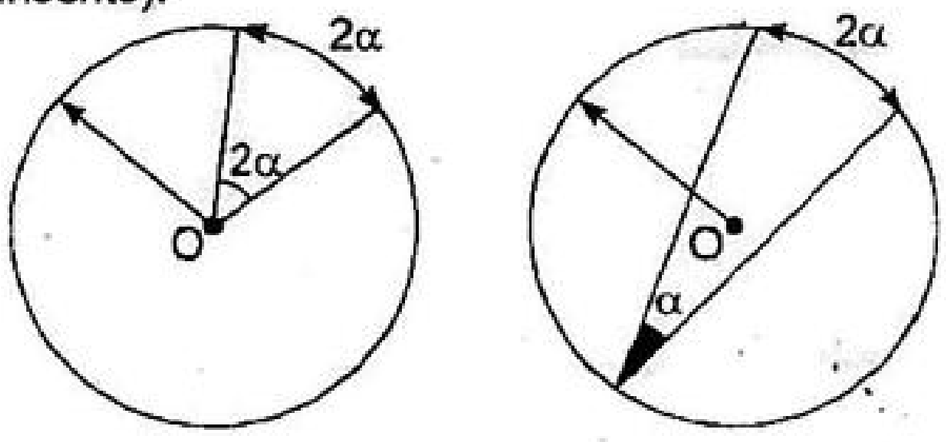
Scanned by CamScanner

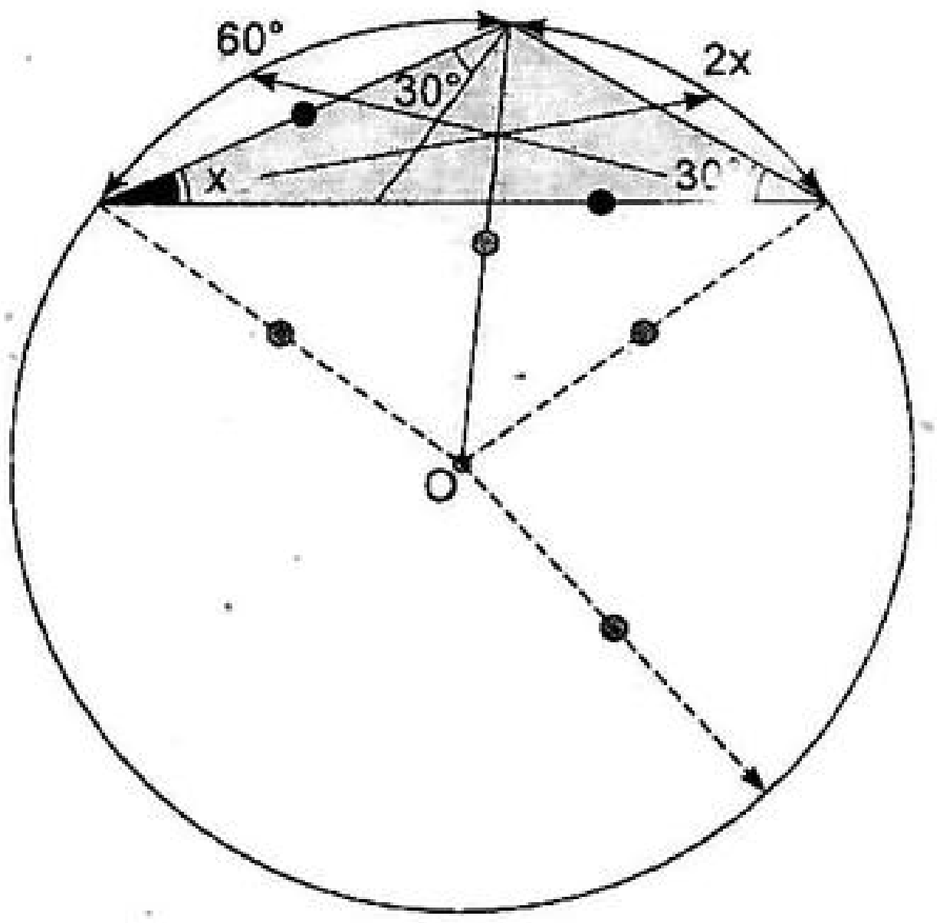
Resolución:

Paso N° 1. Ubicamos al triángulo dentro de una circunferencia donde su centro de esta es el circuncentro del triángulo.

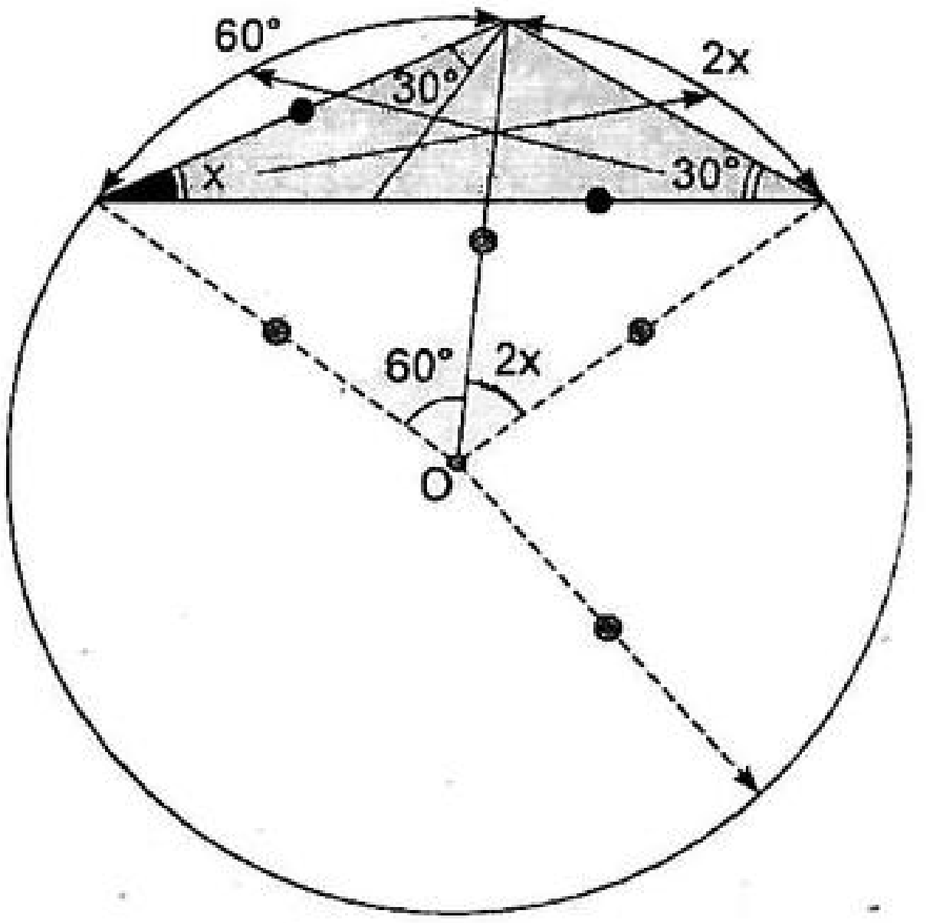


Paso N° 2. Empleamos las propiedades de los ángulos en la circunferencia (ángulo central y ángulo inscrito).

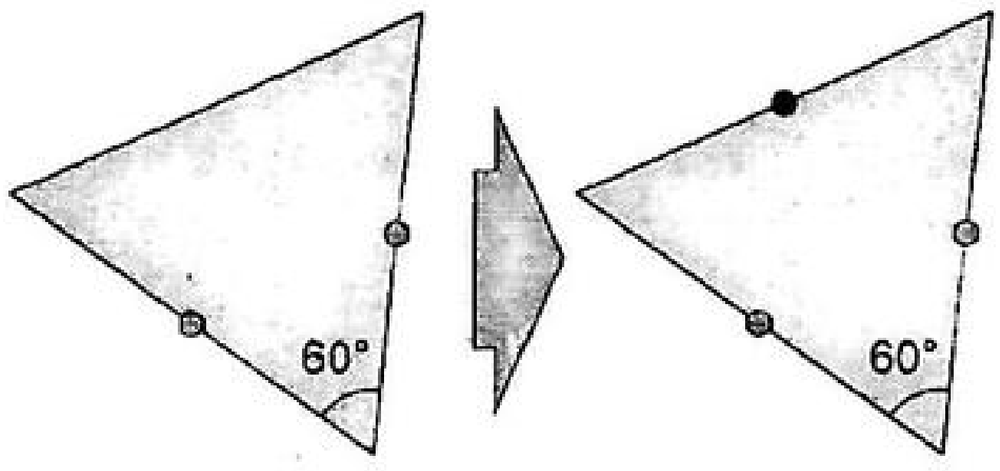




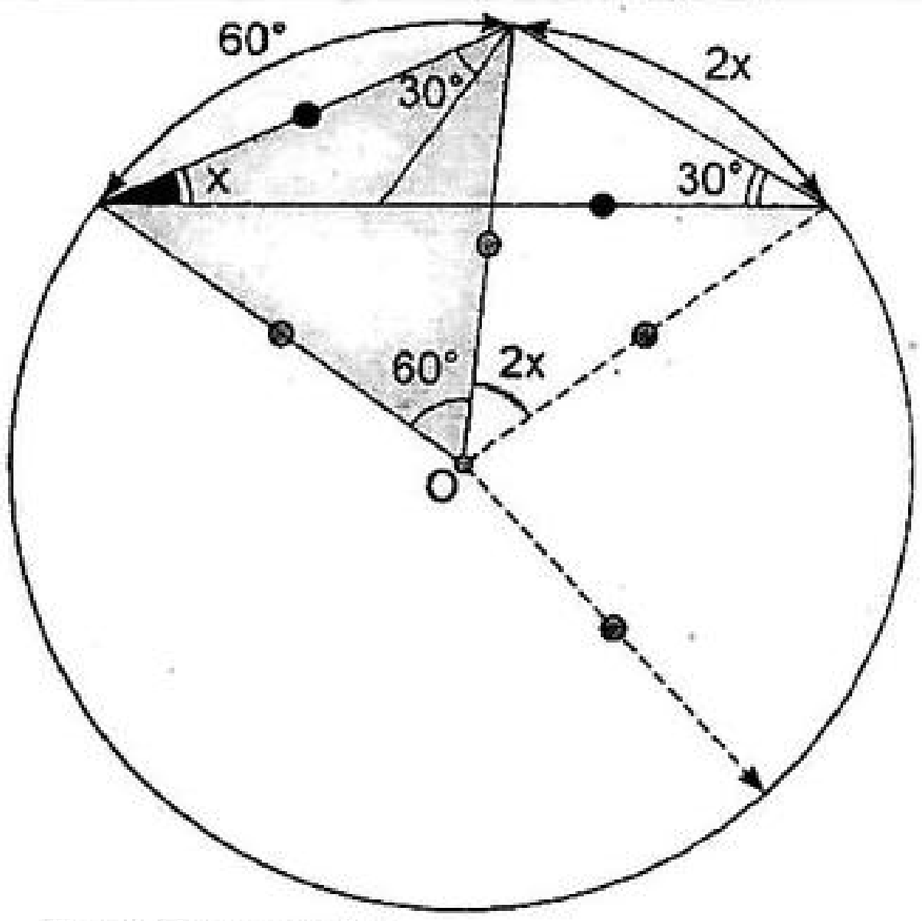
Observamos ángulo central en la circunferencia:



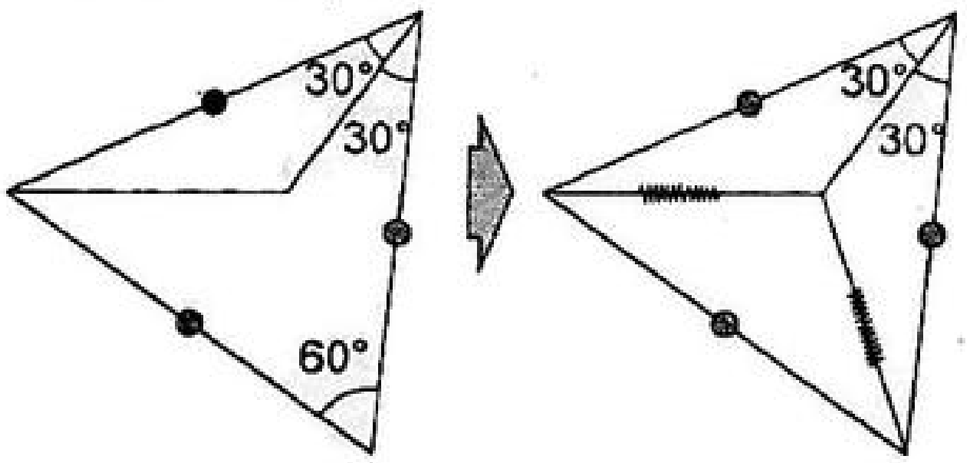
Paso N° 3. Observamos un triángulo equilátero donde cumple:

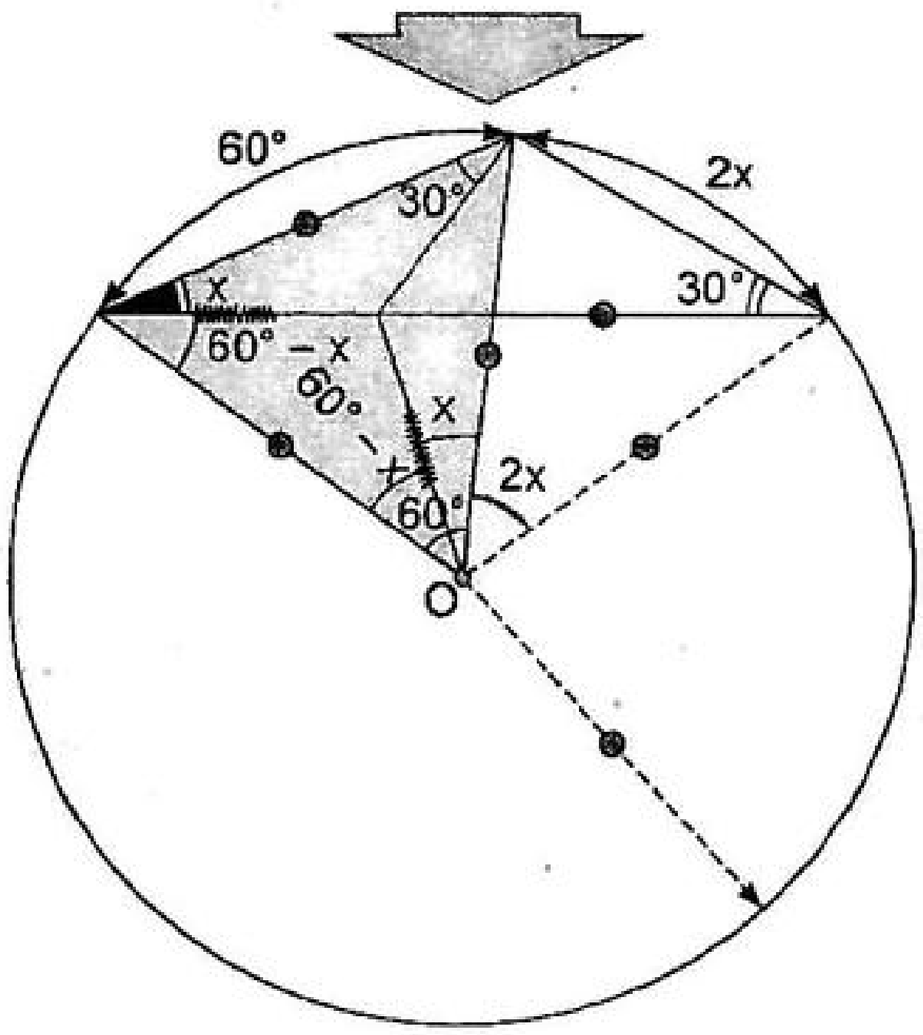


Scanned by CamScanner

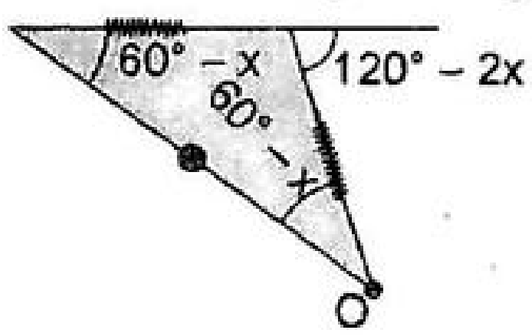


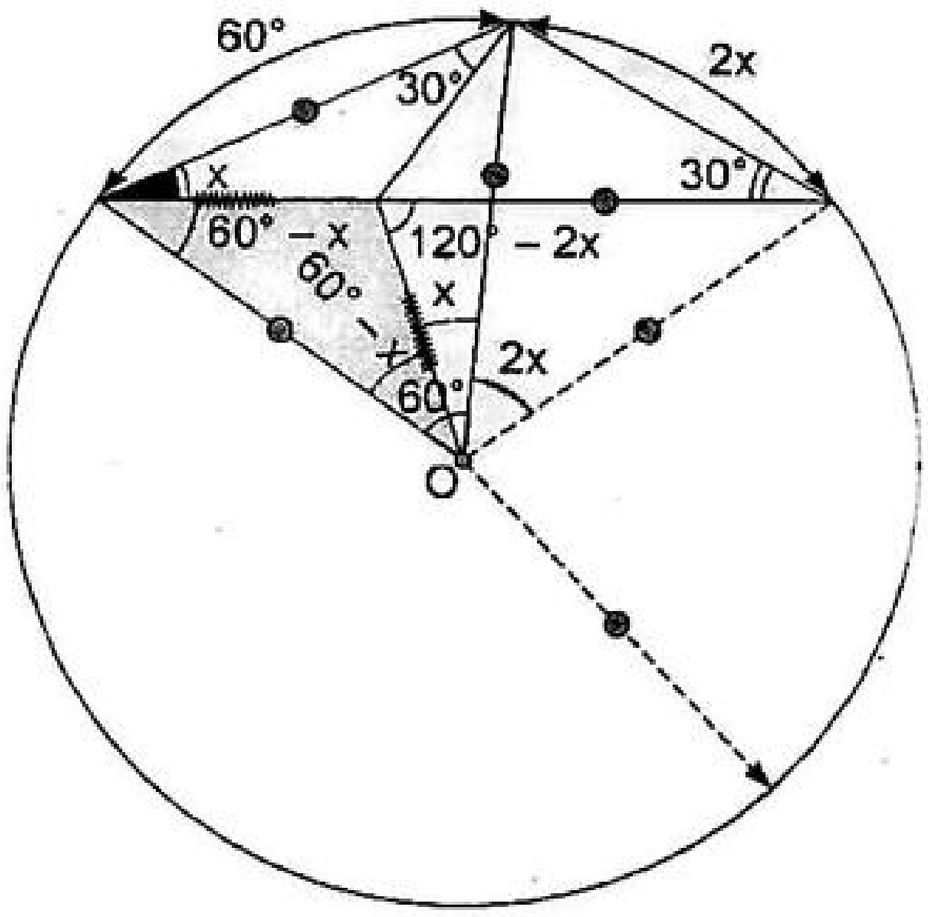
También cumple:



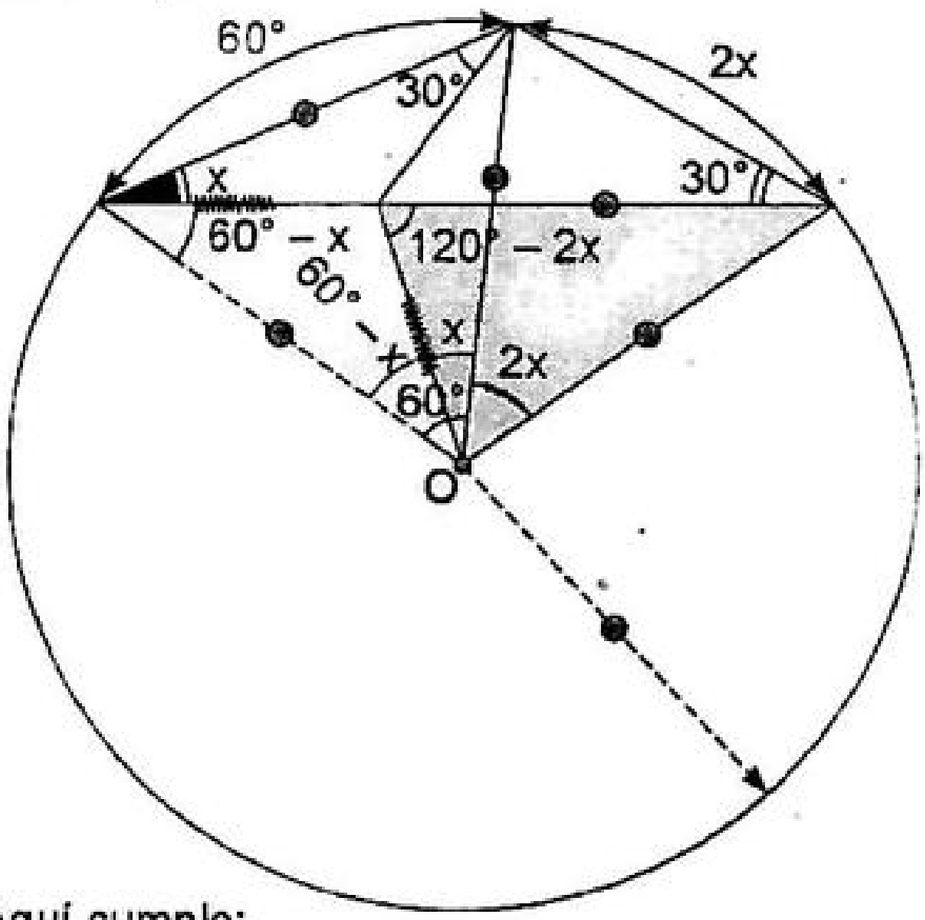


Paso N° 4. Se observa la siguiente figura:

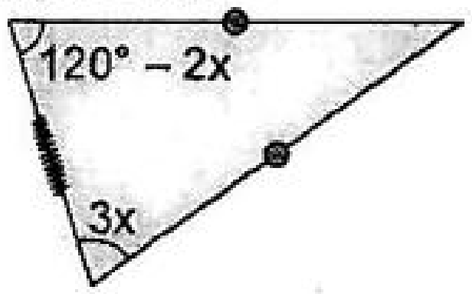




Paso N° 5. Ahora observamos un triángulo isósceles, así:



Aquí cumple:

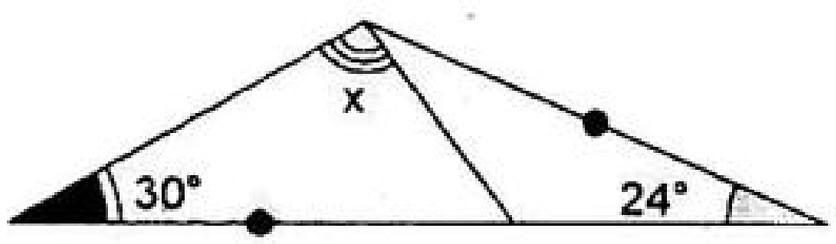


$\Rightarrow 120° - 2x = 3x$

$120° = 5x$

$24° = x$

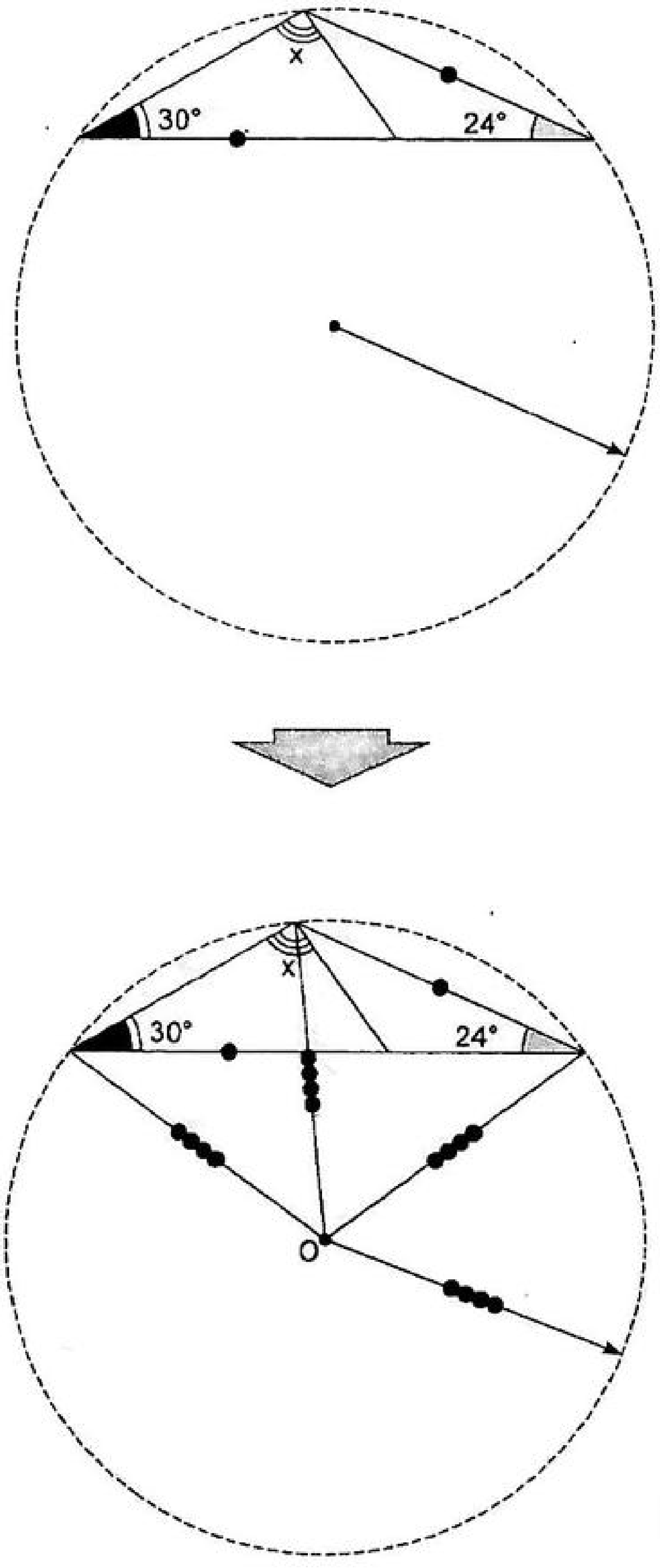
Problema 50. Calcular x.



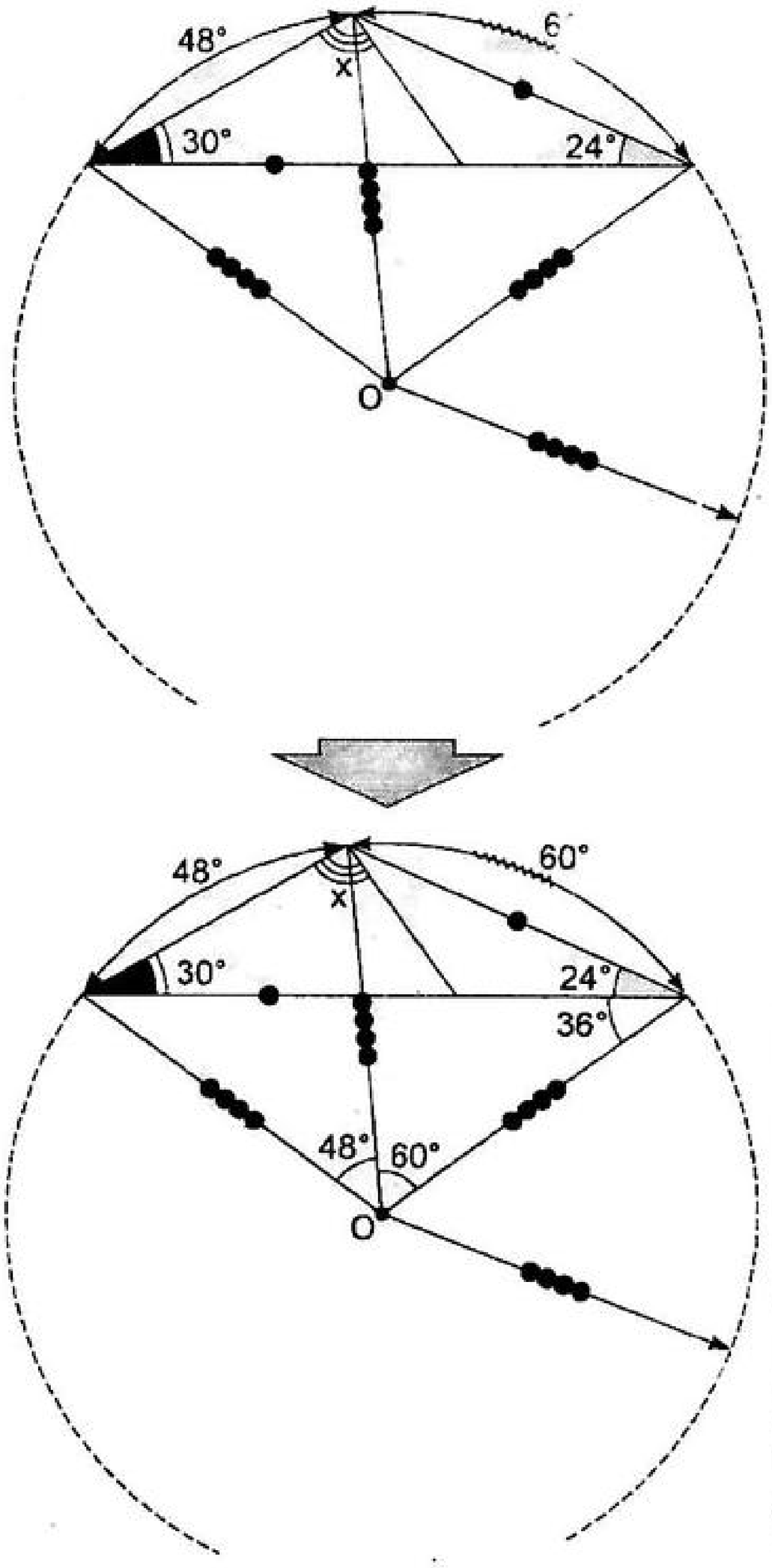
Scanned by CamScanner

Resolución:

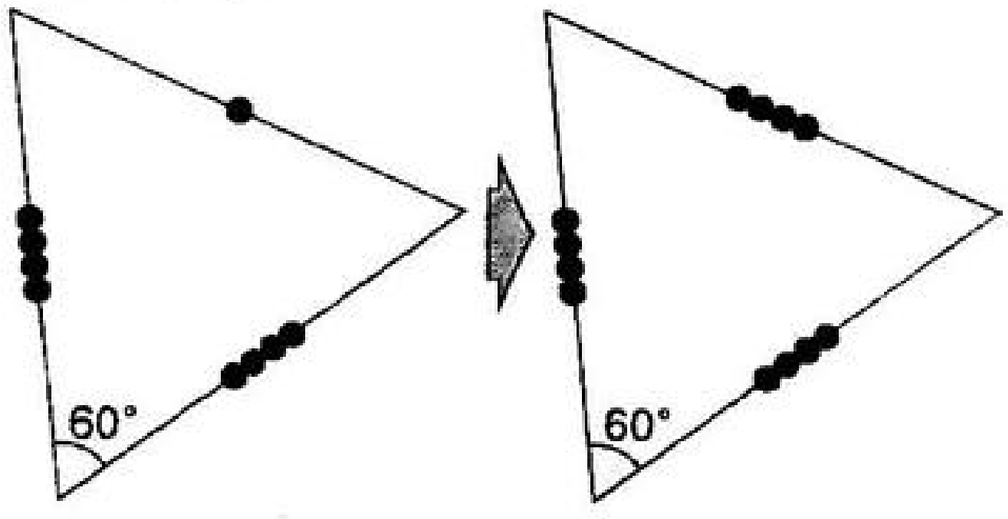
Paso N° 1. Colocamos el triángulo dado en una circunferencia, "porque todo triángulo está inscrito en una circunferencia", además nuestro triángulo es obtusángulo y ubicamos su circunferencia así::



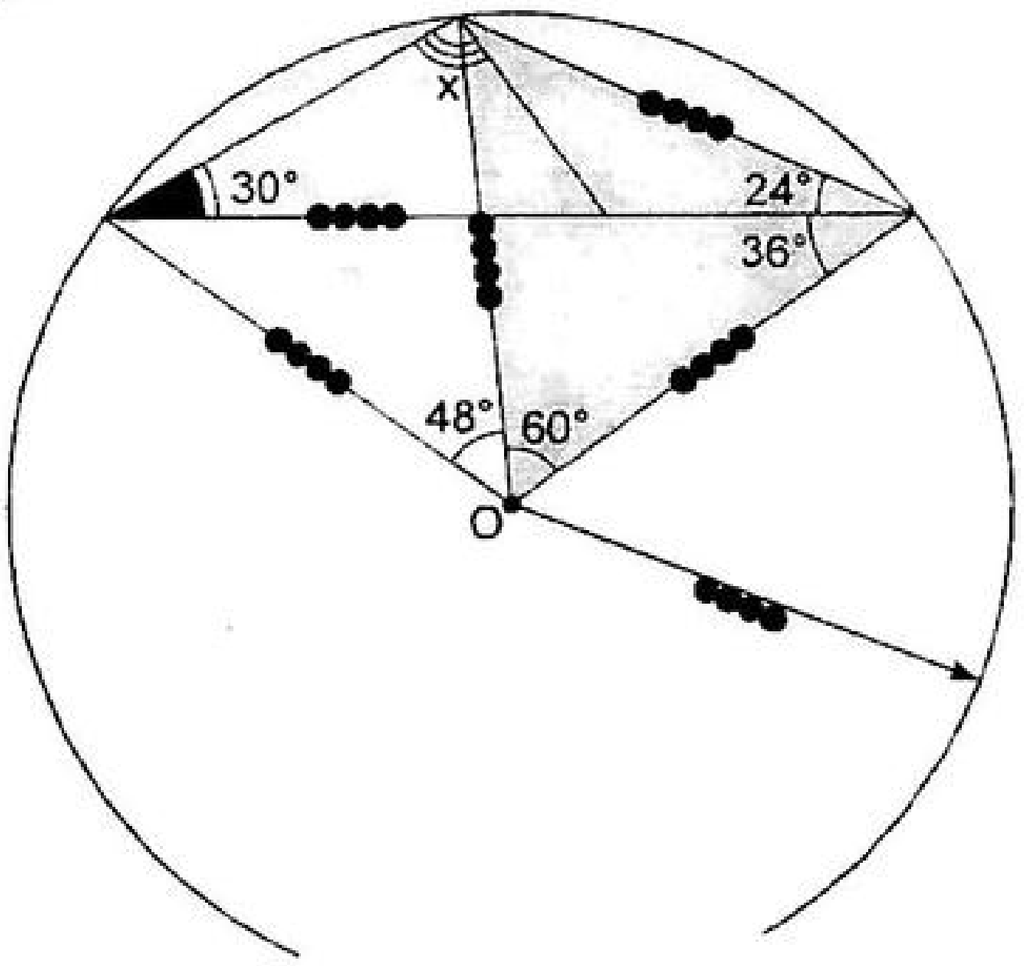
Paso N° 2. Empleamos los ángulos de la circunferencia (ángulo central e inscrito), así:



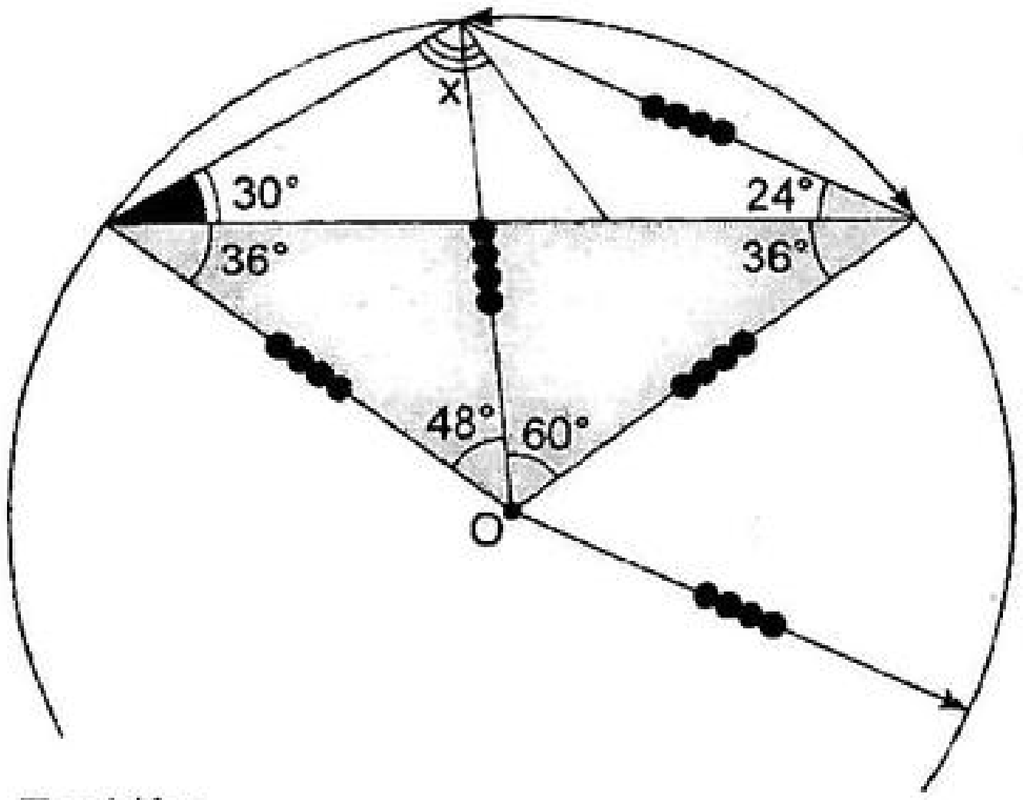
Paso N° 3. Se obtiene un triángulo equilátero donde cumple:



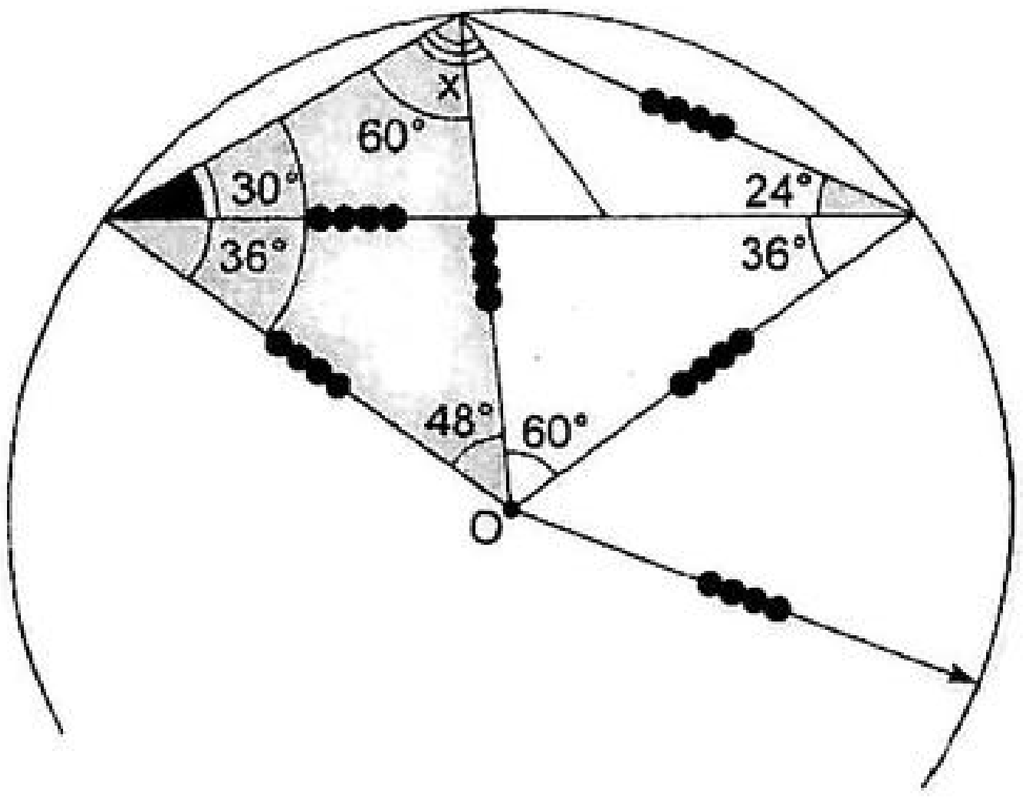
Scanned by CamScanner



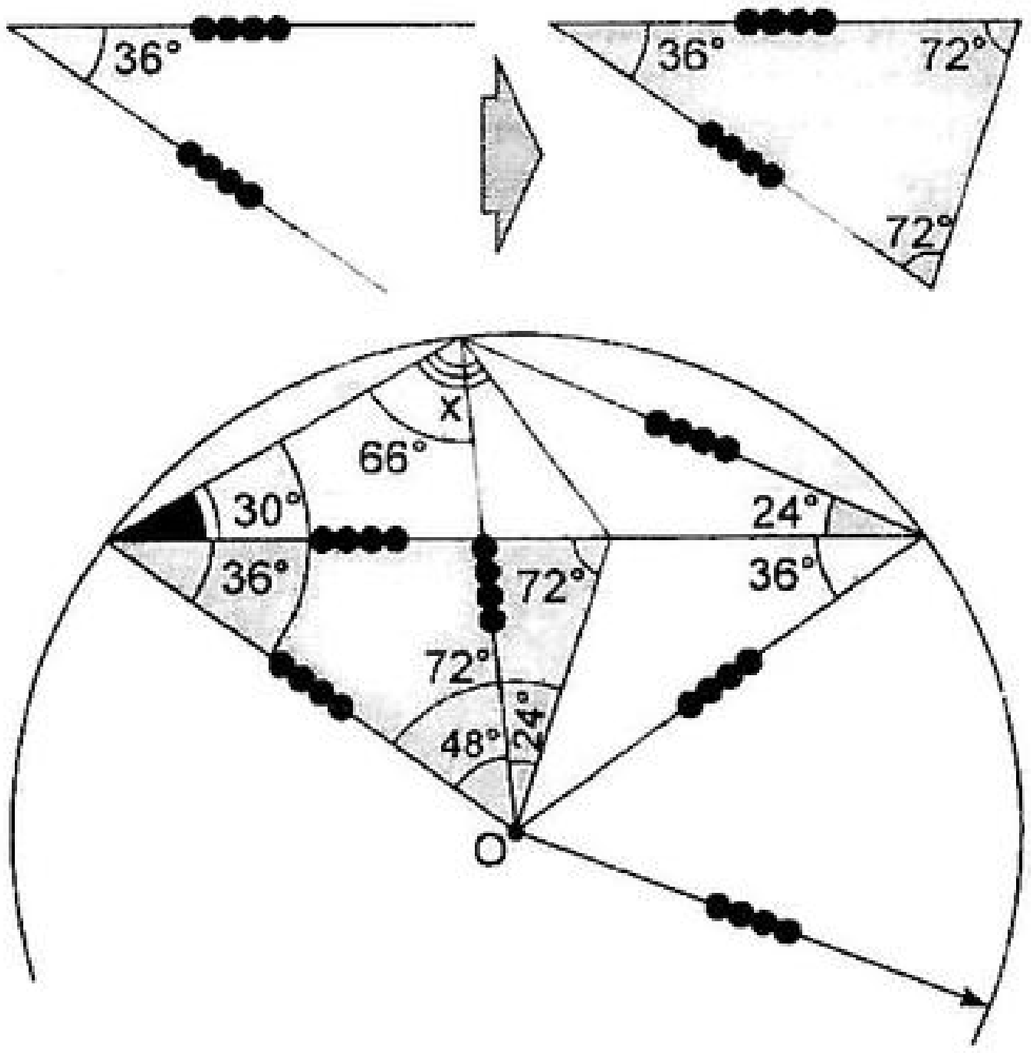
Paso N° 4. Se obtiene un triángulo isósceles así:



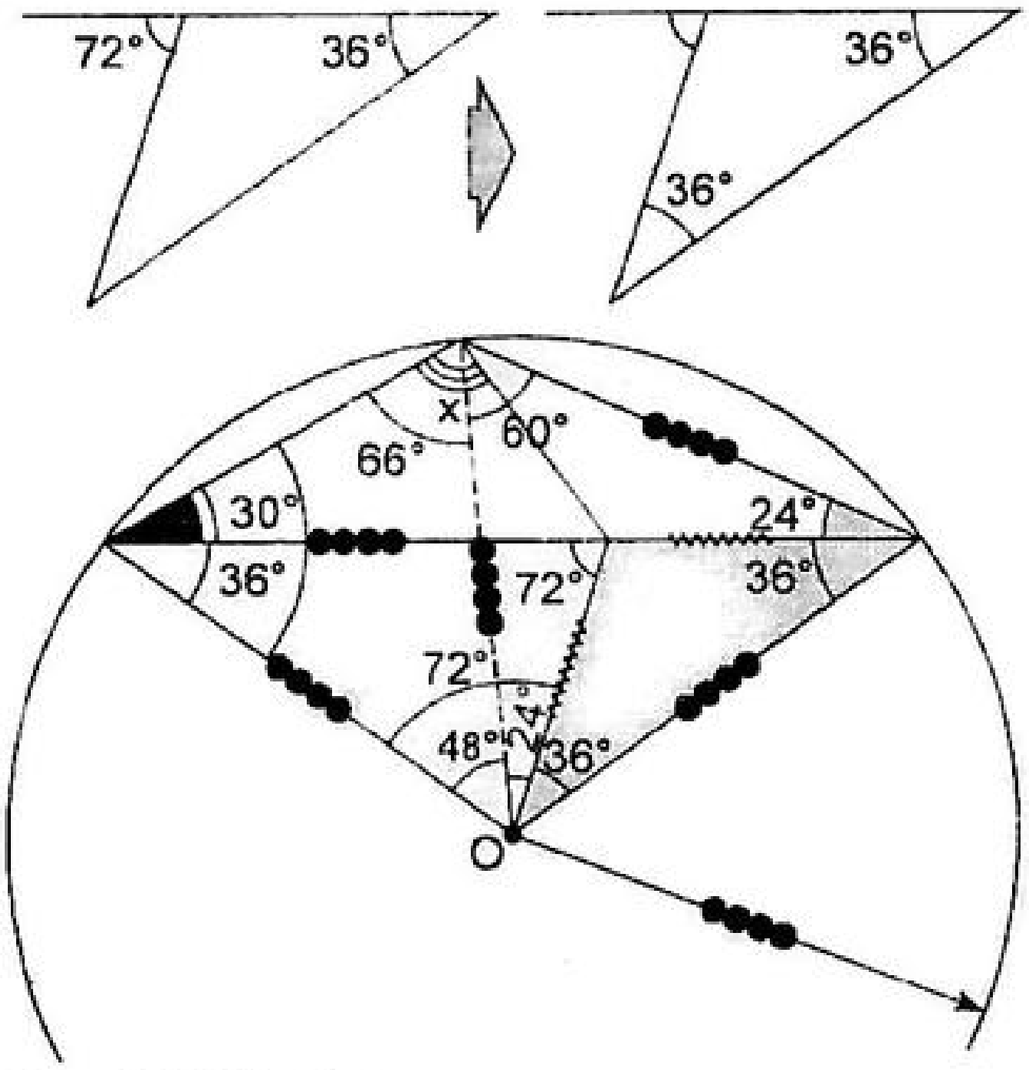
También:



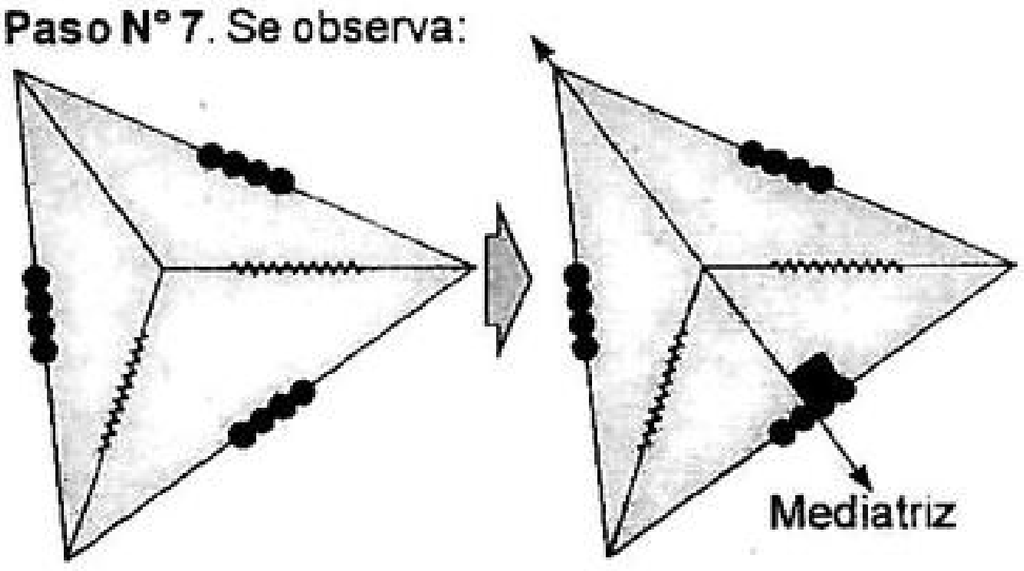
Paso N° 5. Se obtiene un nuevo triángulo isósceles:



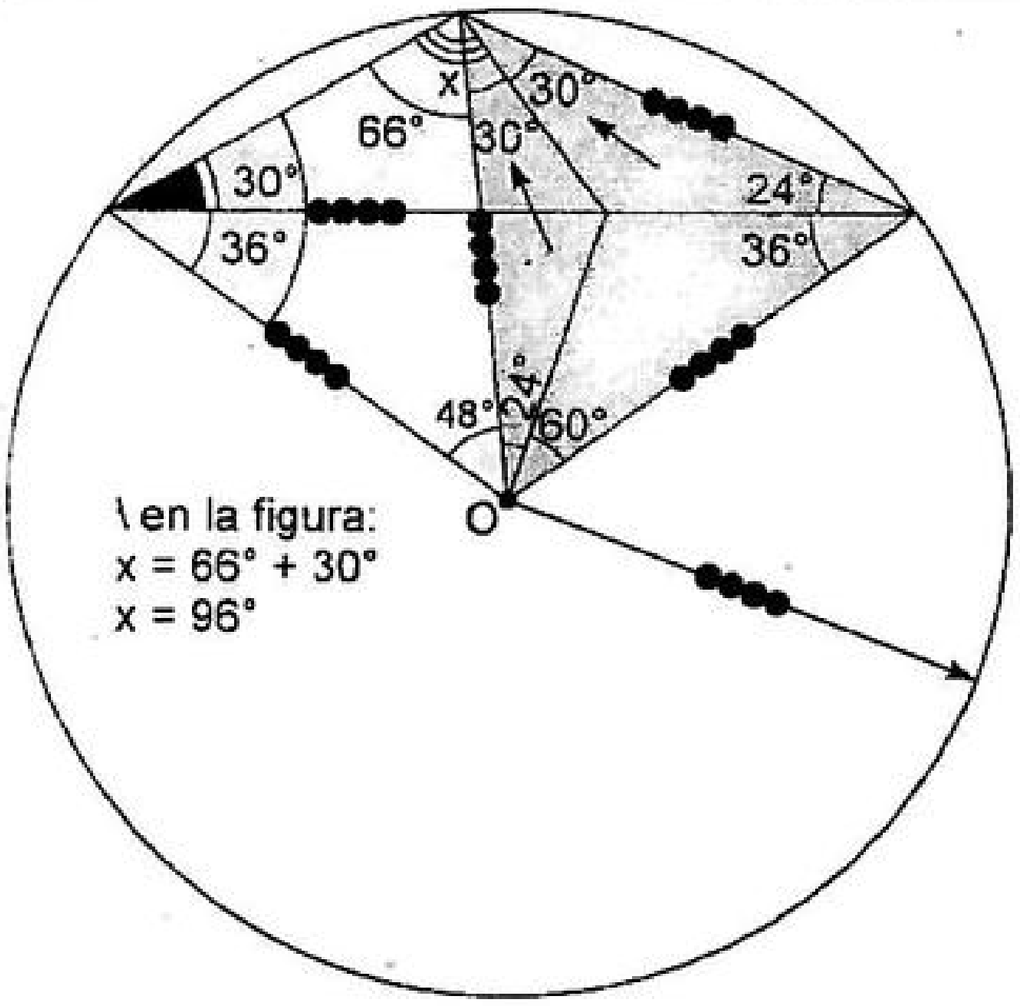
Paso N° 6. Se observa:



Paso N° 7. Se observa:

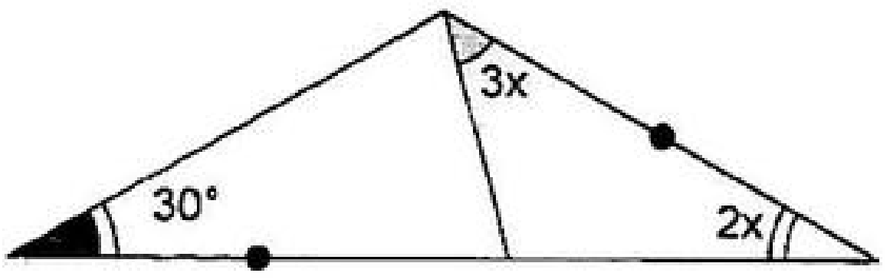


Scanned by CamScanner



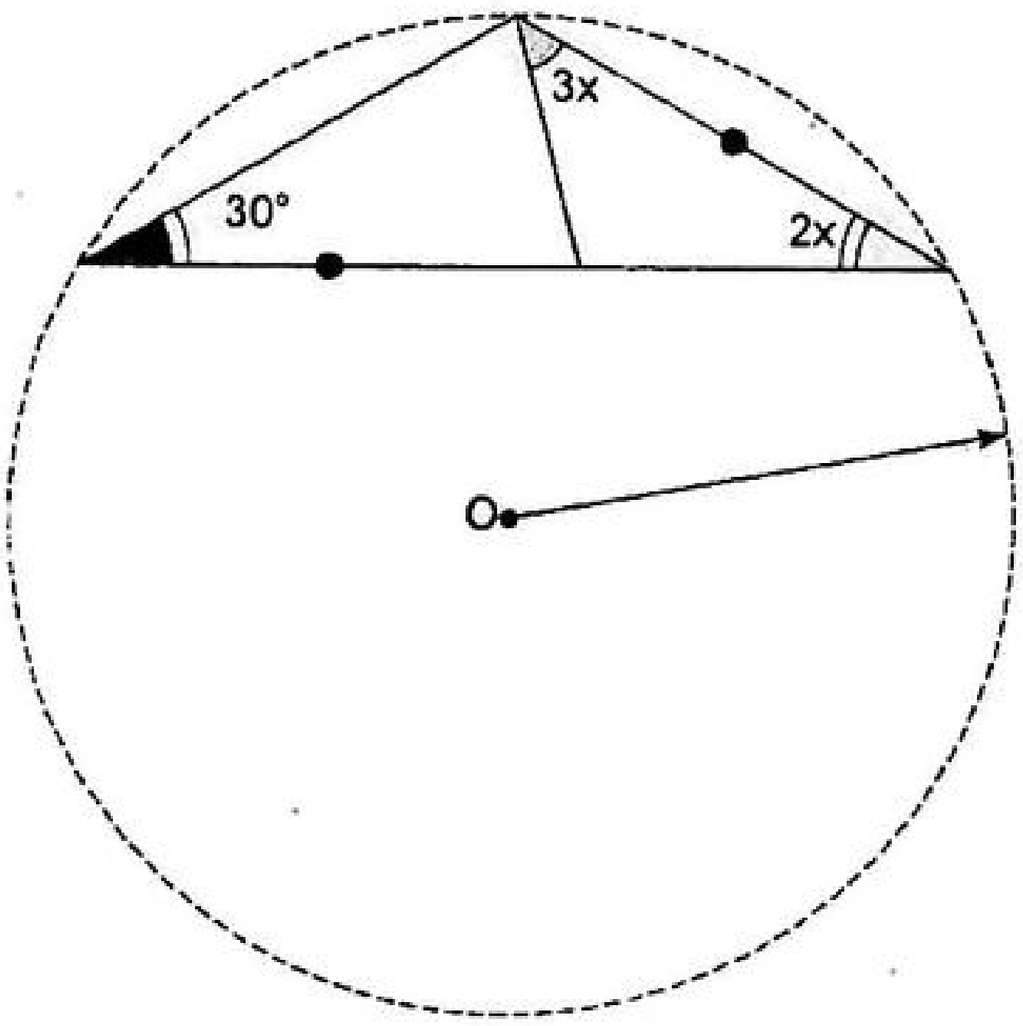
\ en la figura:
x = 66° + 30°
x = 96°

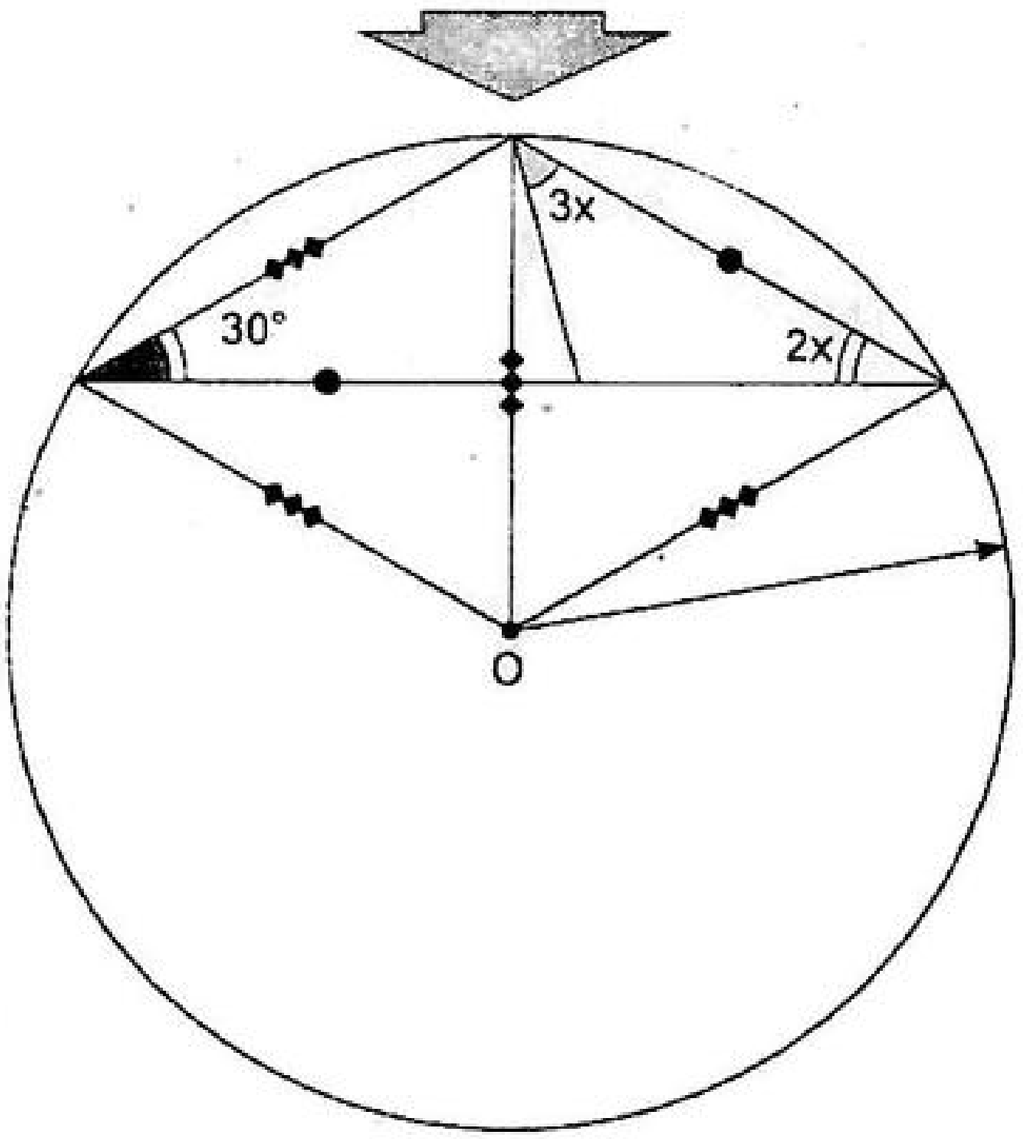
Problema 51. Calcular x.



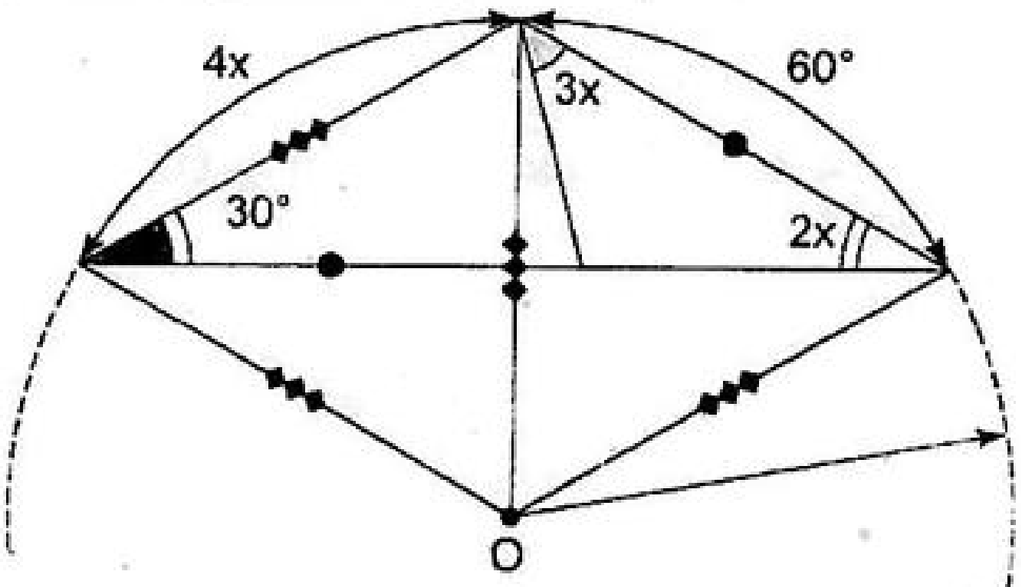
Resolución:

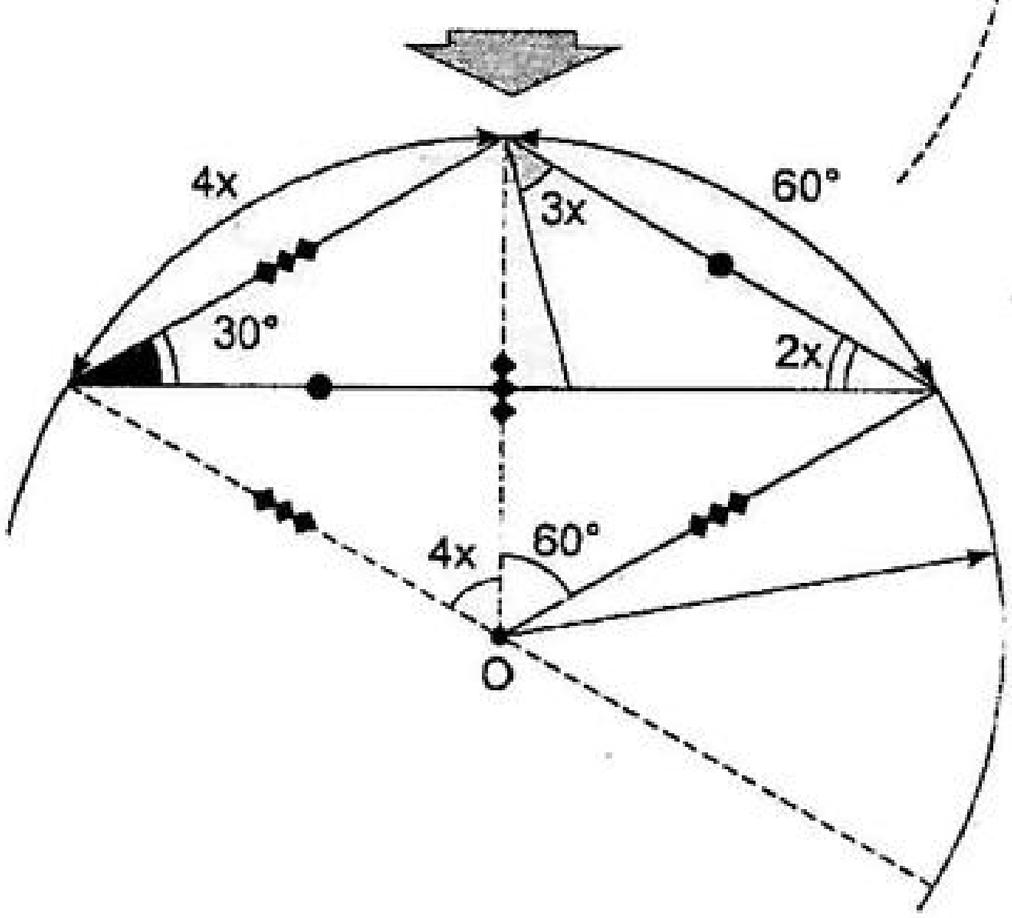
Paso N° 1. Como todo triángulo está contenido en una circunferencia, entonces ubicamos su circuncentro. (Nuestro triángulo es obtusángulo):





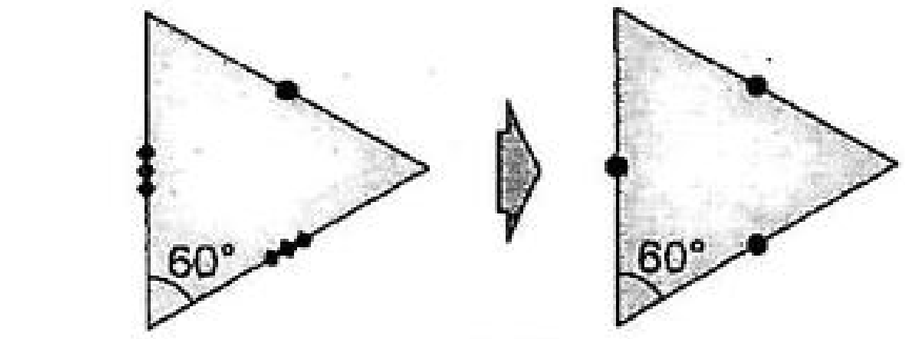
Paso N° 2. Empleamos los ángulos en la circunferencia (ángulo inscrito y central), así:

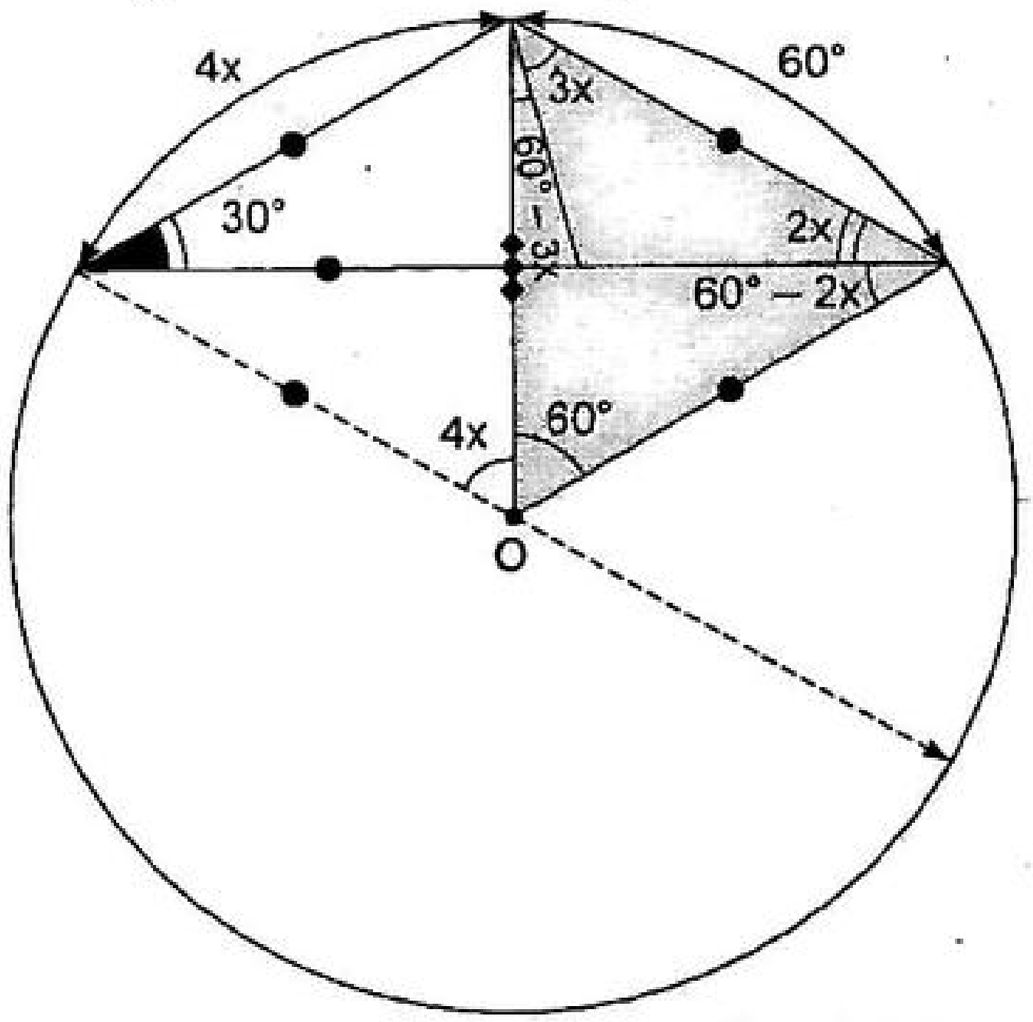




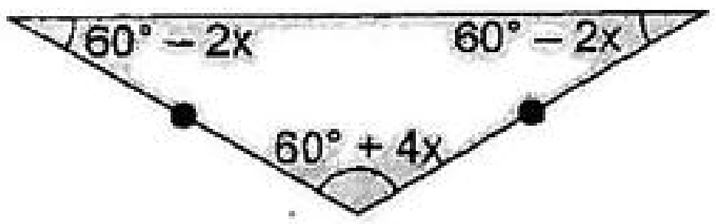
Scanned by CamScanner

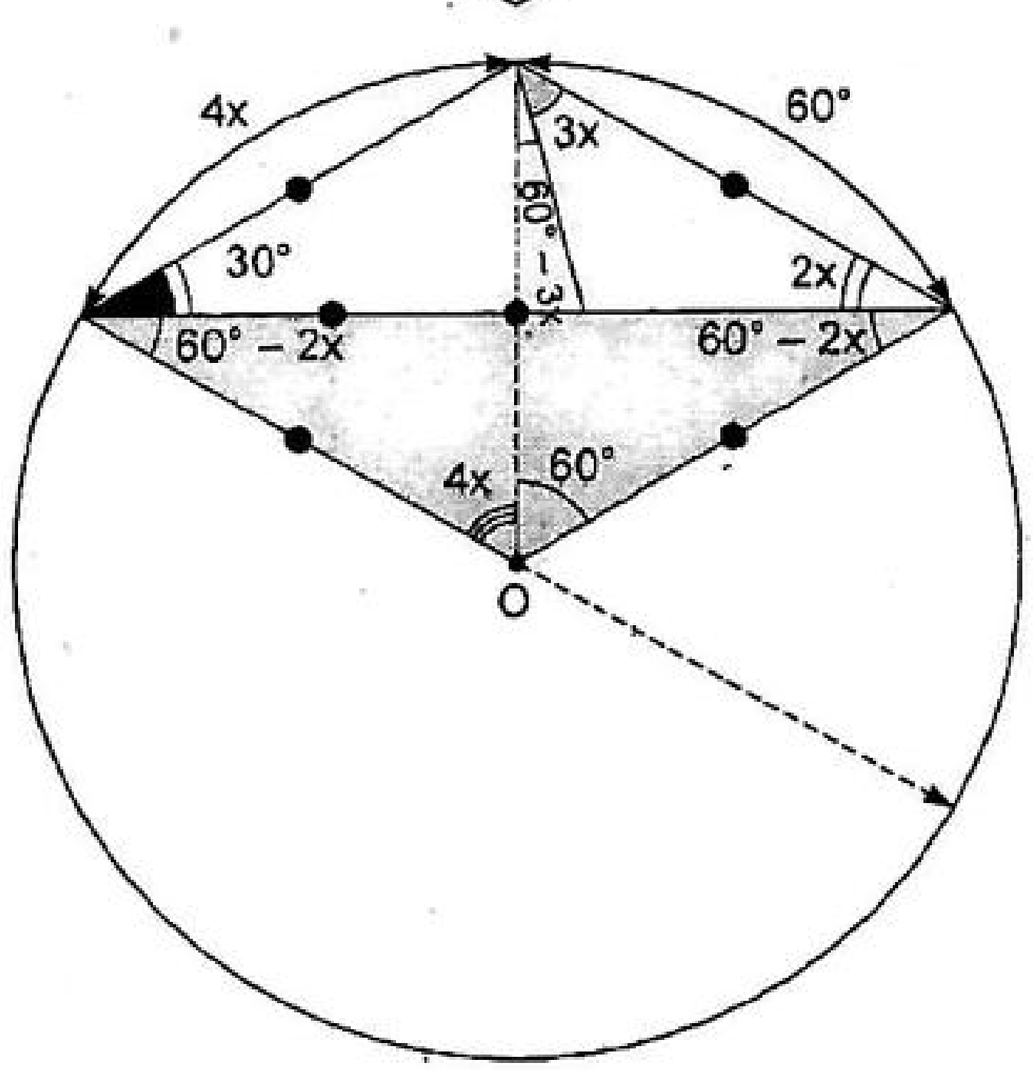
Paso N° 3. Se obtiene un triángulo equilátero:



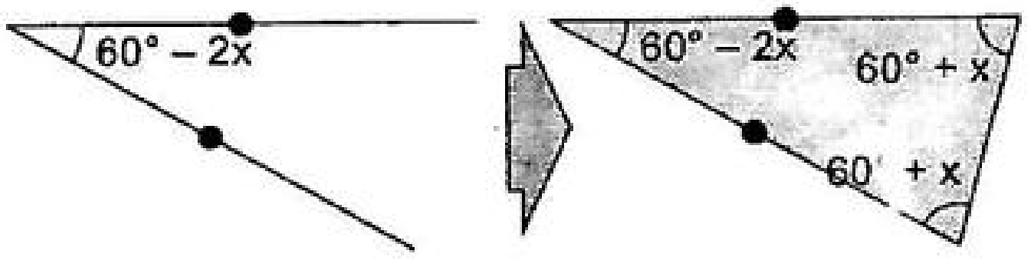


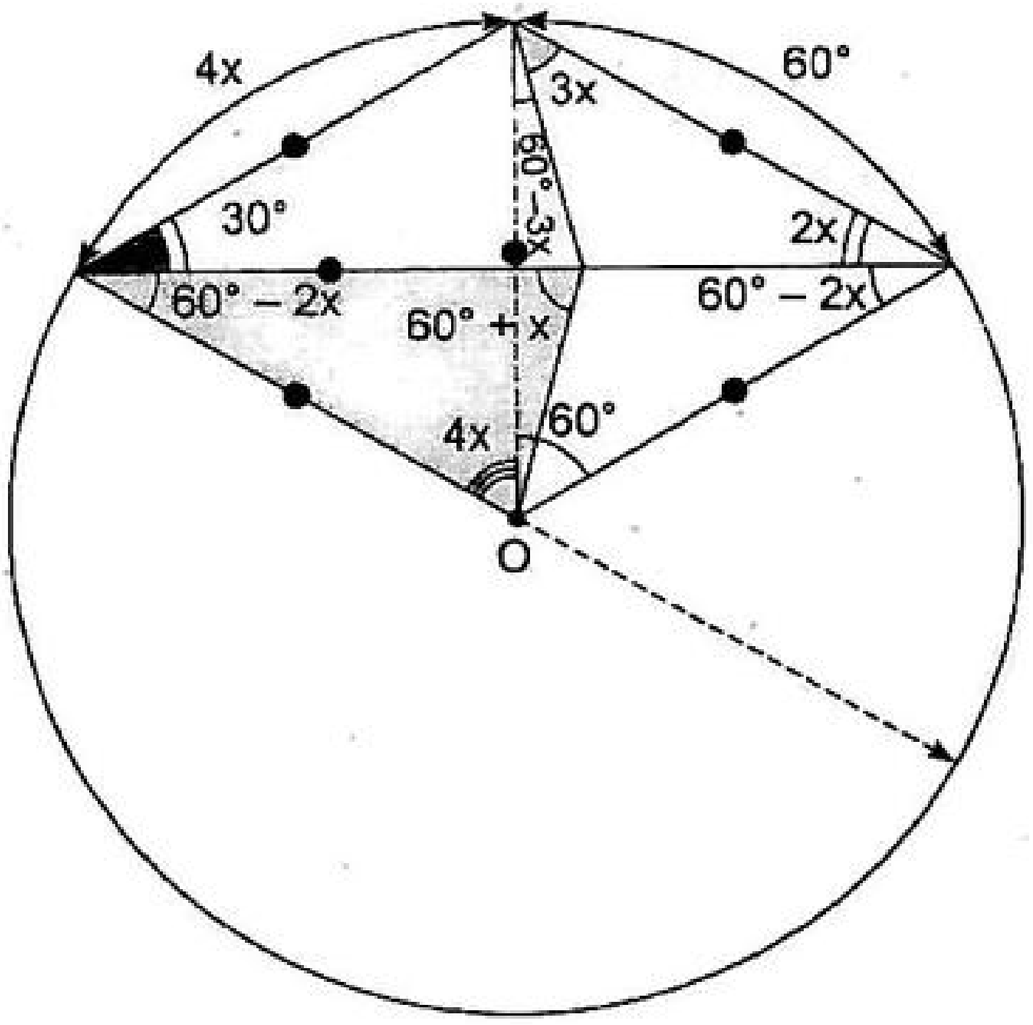
Paso N° 4. Ahora, se observa un triángulo isósceles, donde cumple:



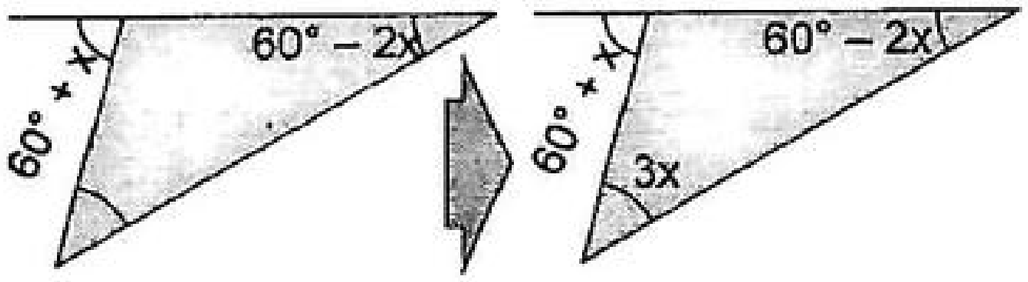


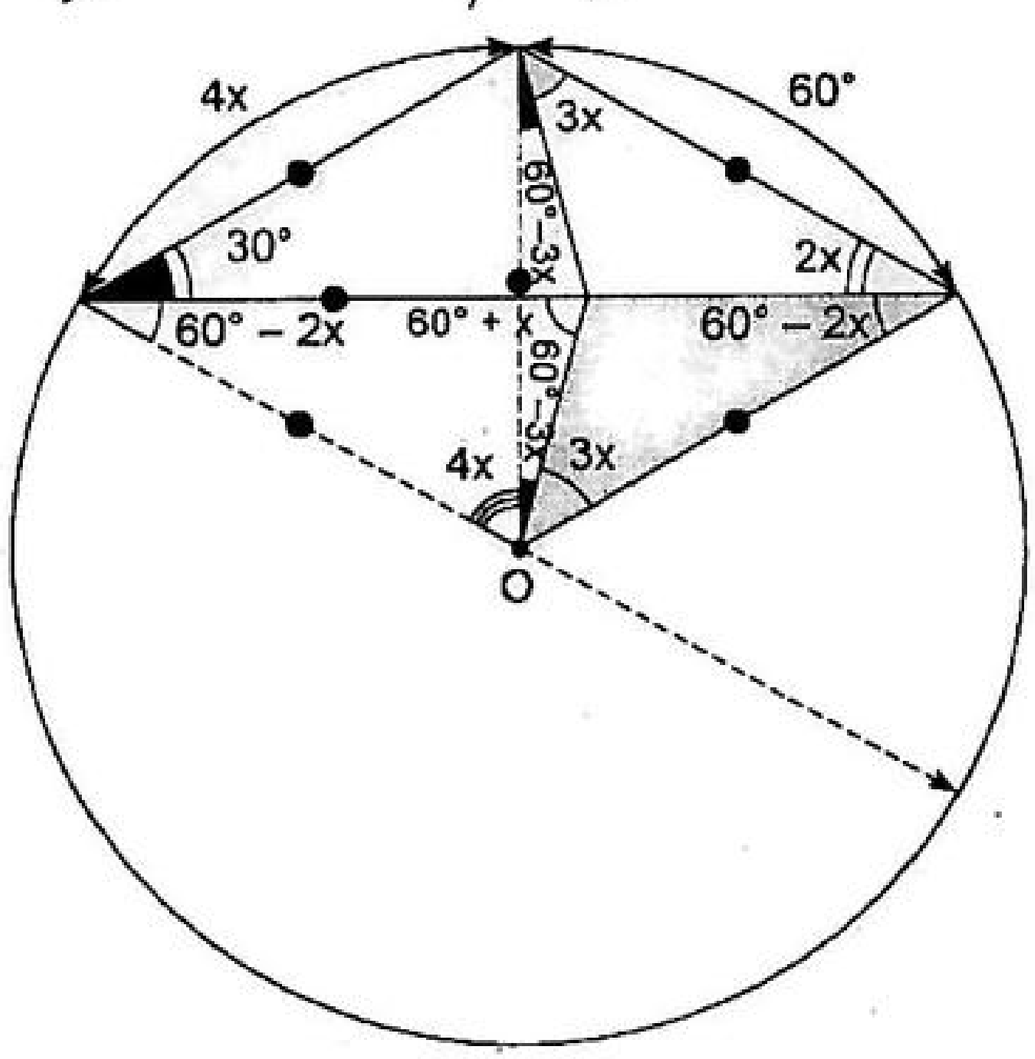
Paso N° 5. También se observa un nuevo triángulo isósceles:



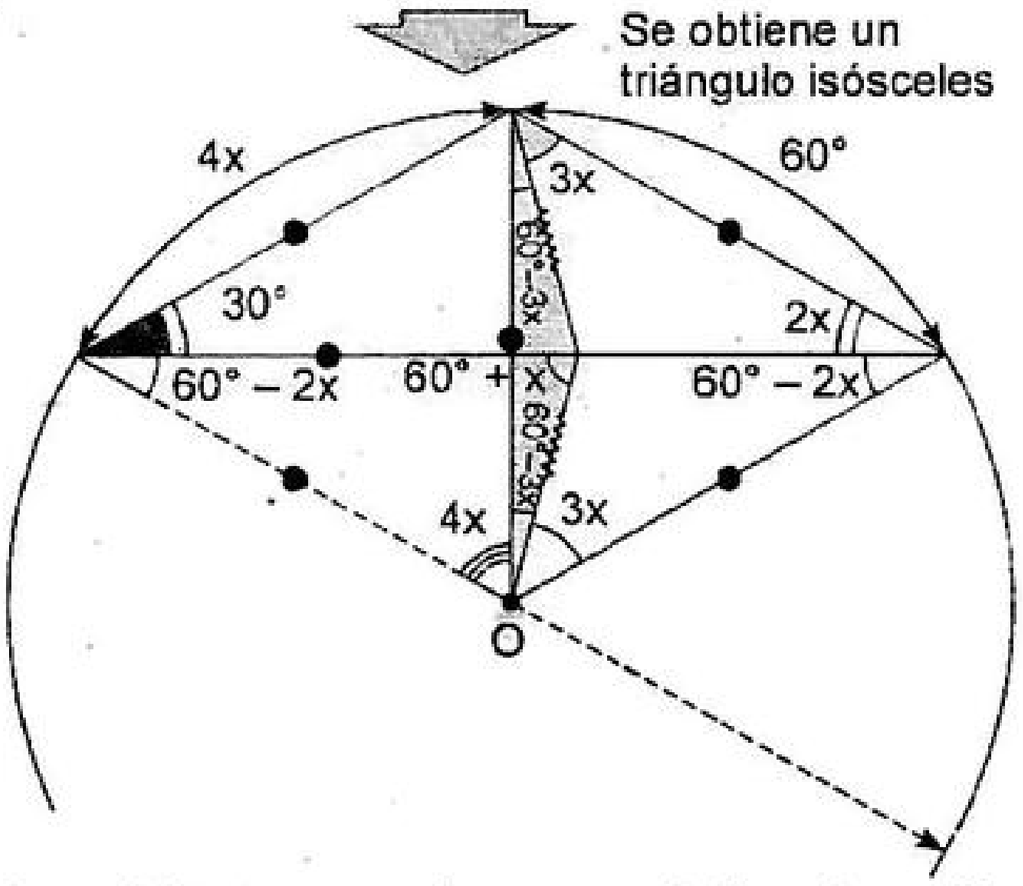


Paso N° 6. Observamos la siguiente figura:

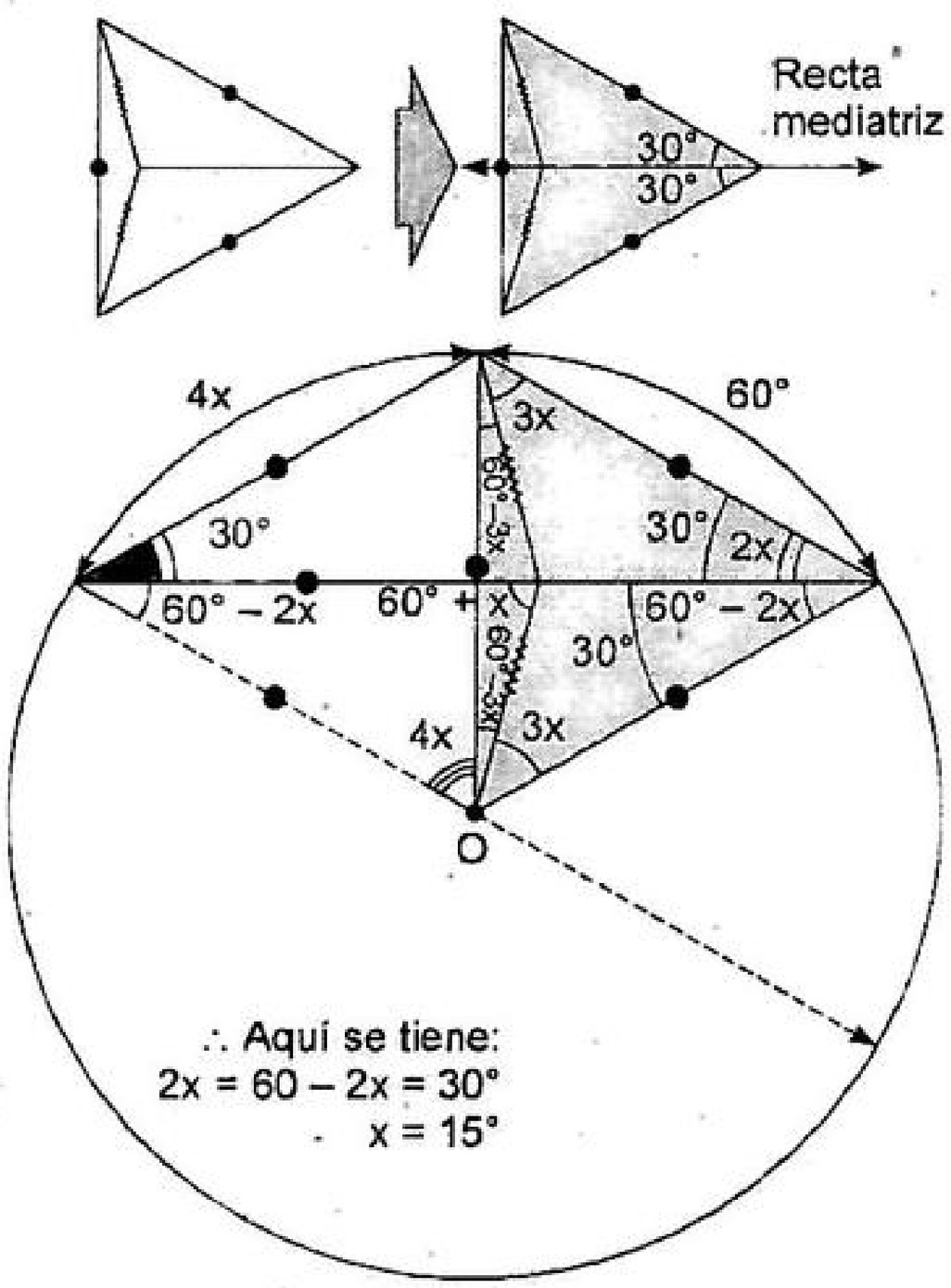




Scanned by CamScanner



Paso N° 7. Ahora se observa en el triángulo equilátero que se cumple:

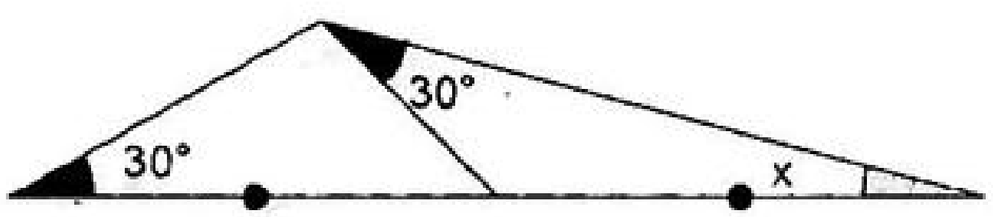


∴ Aquí se tiene:

$2x = 60 - 2x = 30°$

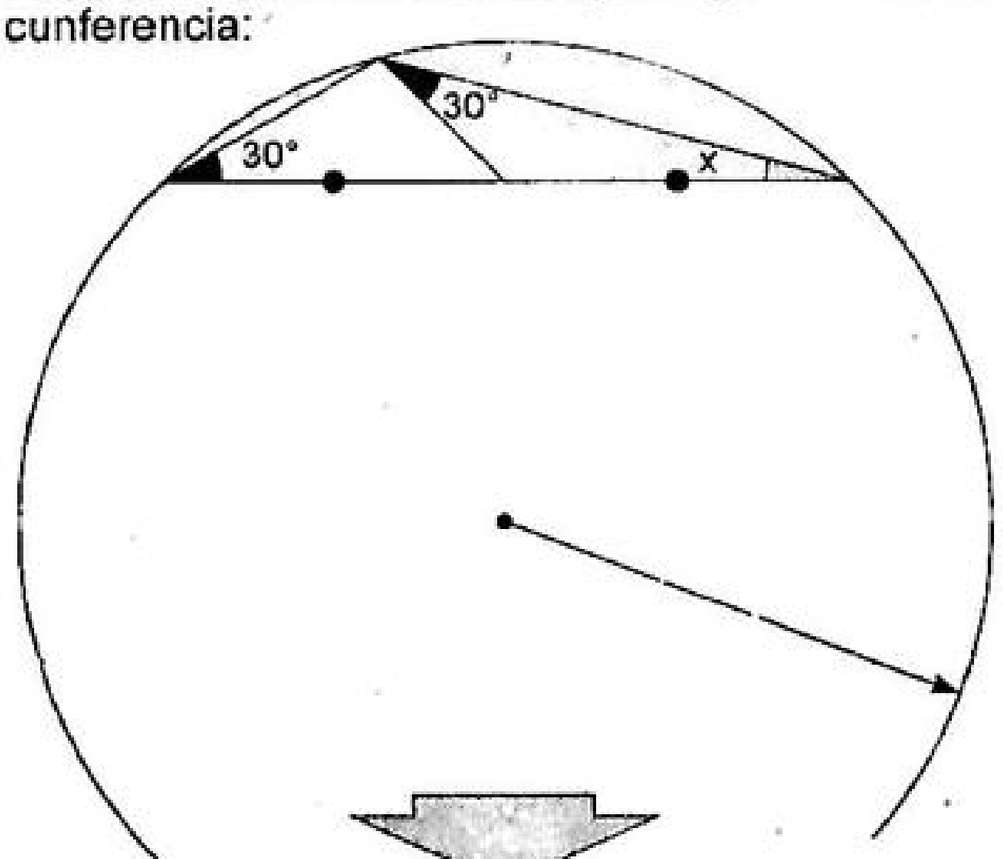
$x = 15°$

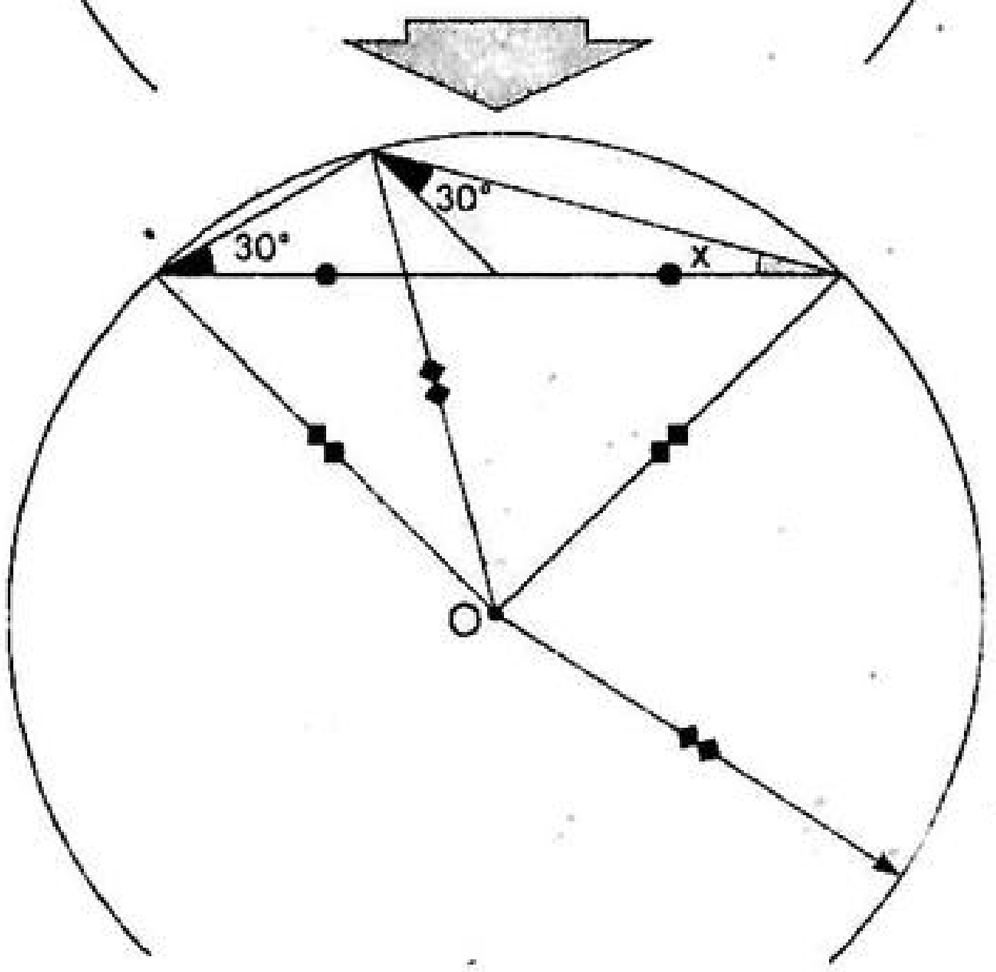
Problema 52. Calcular x.



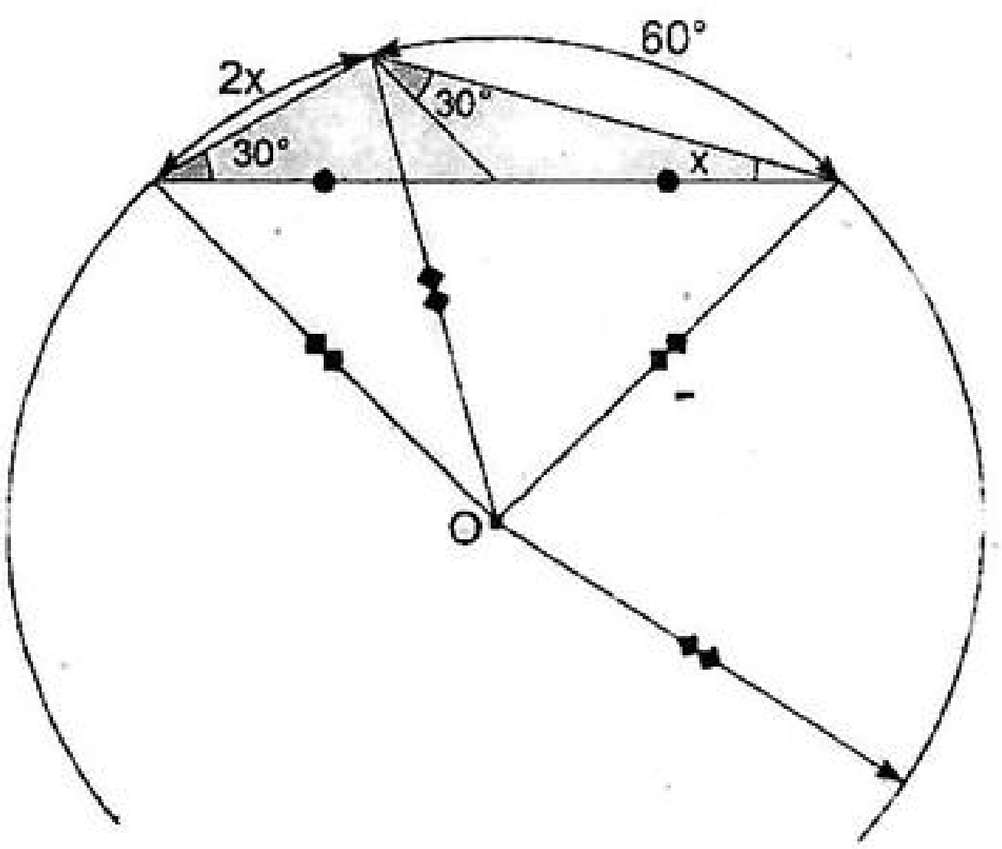
Resolución:

Paso N° 1. Colocamos nuestro triángulo en una circunferencia:

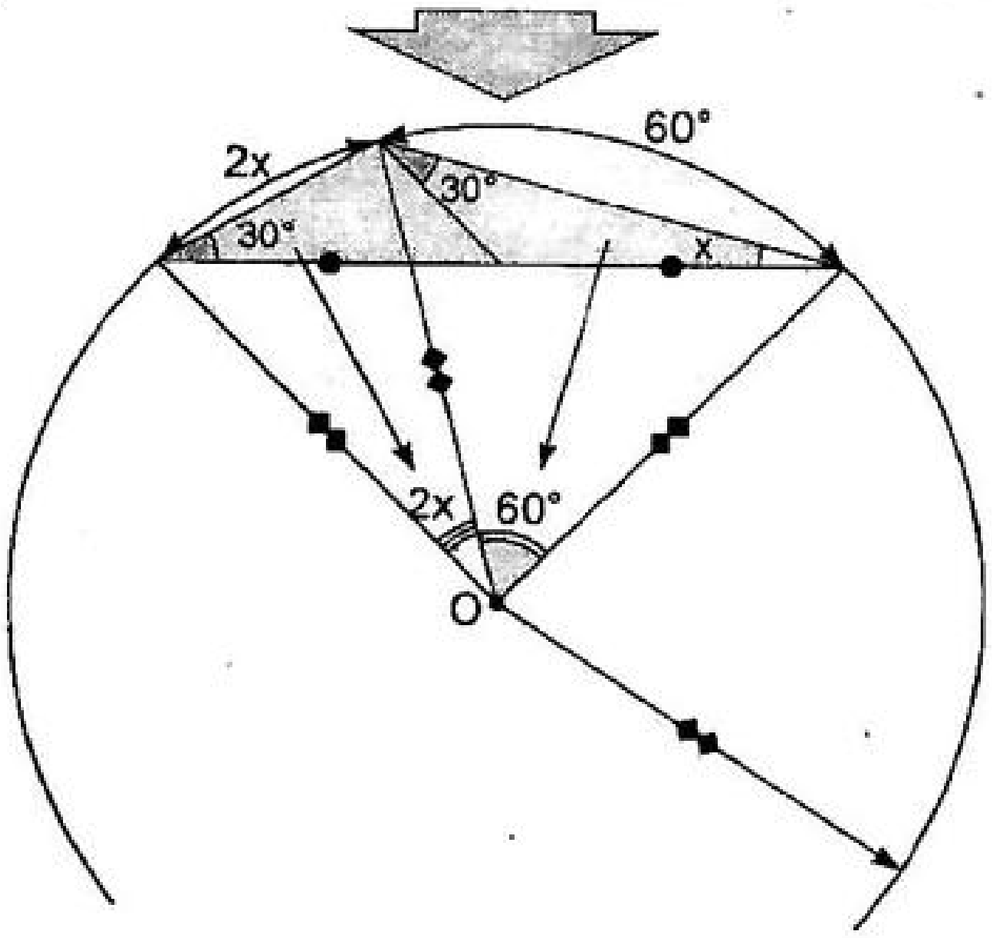




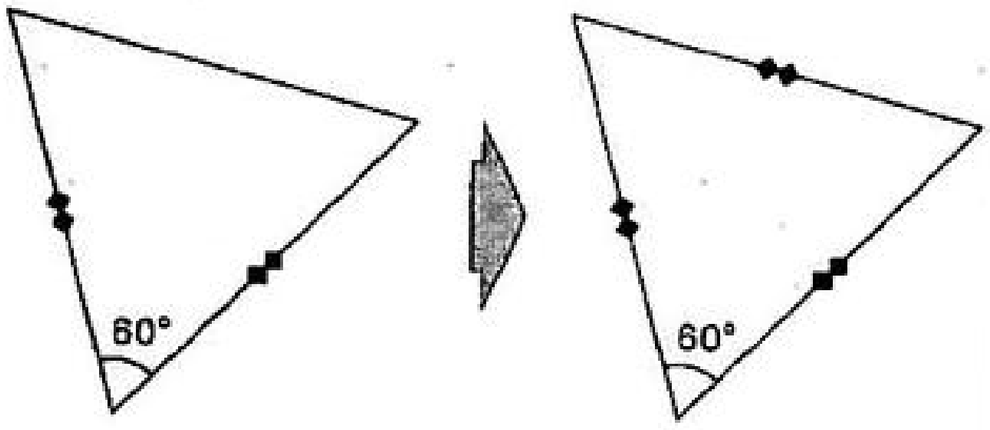
Paso N° 2. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

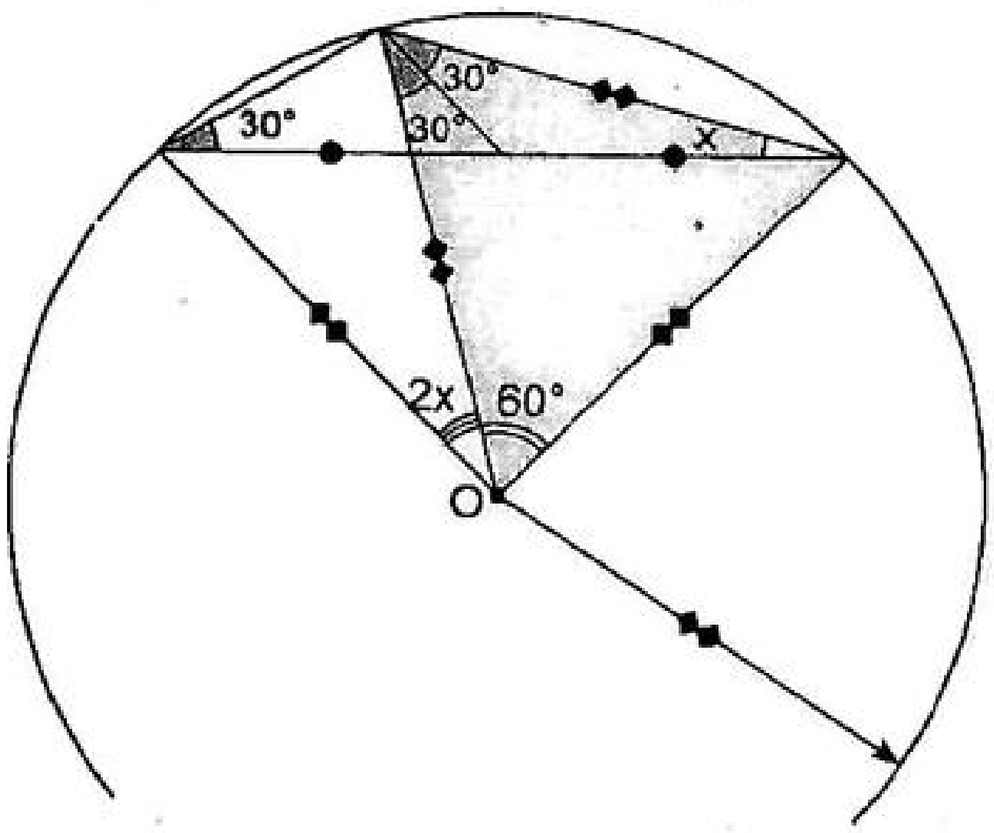


Scanned by CamScanner

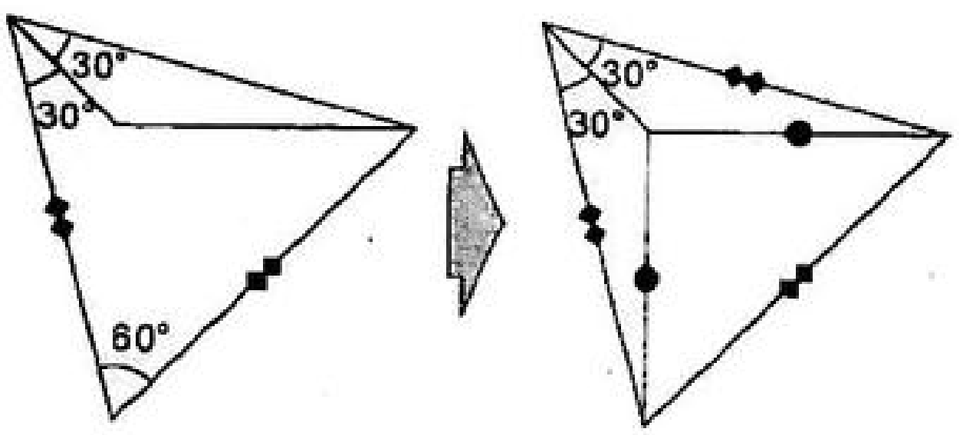


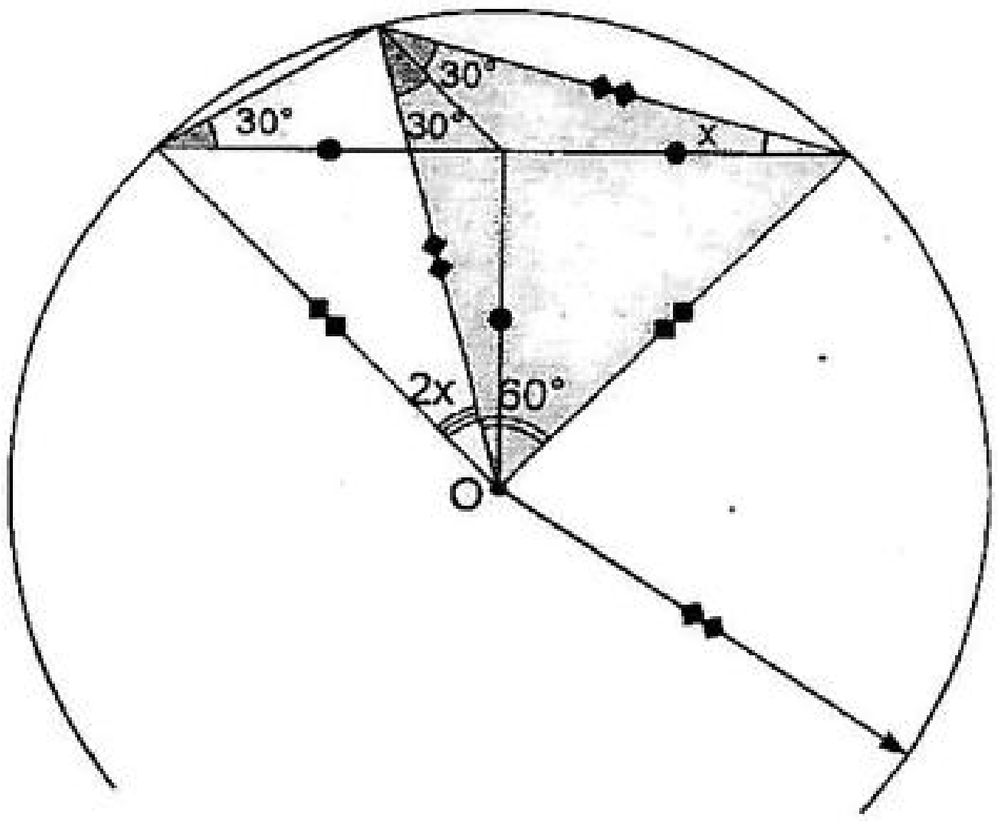
Paso N° 3. Se observa un triángulo equilátero:



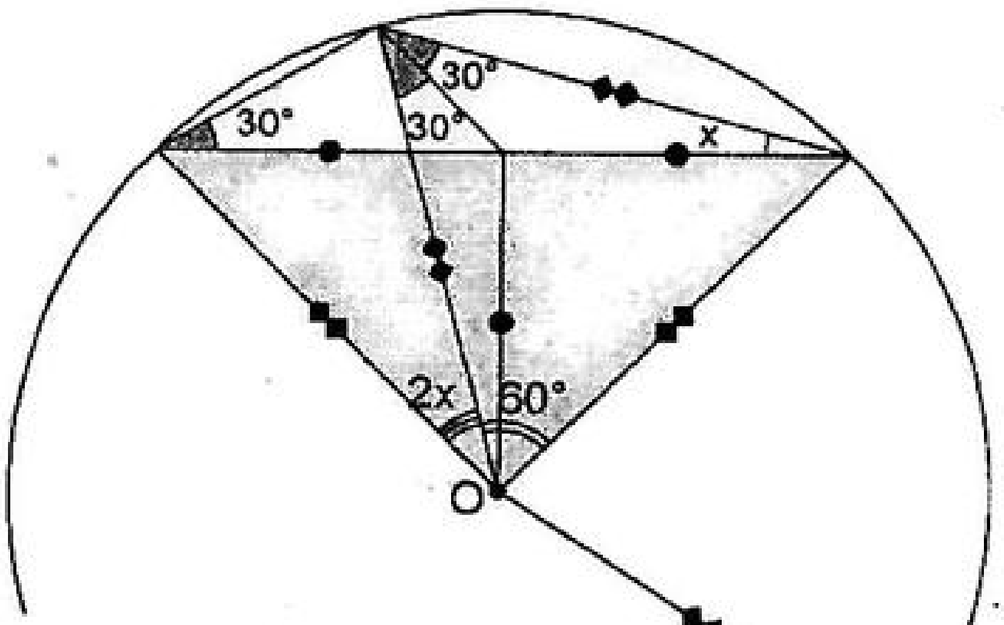


También en el triangulo equilátero se cumple:

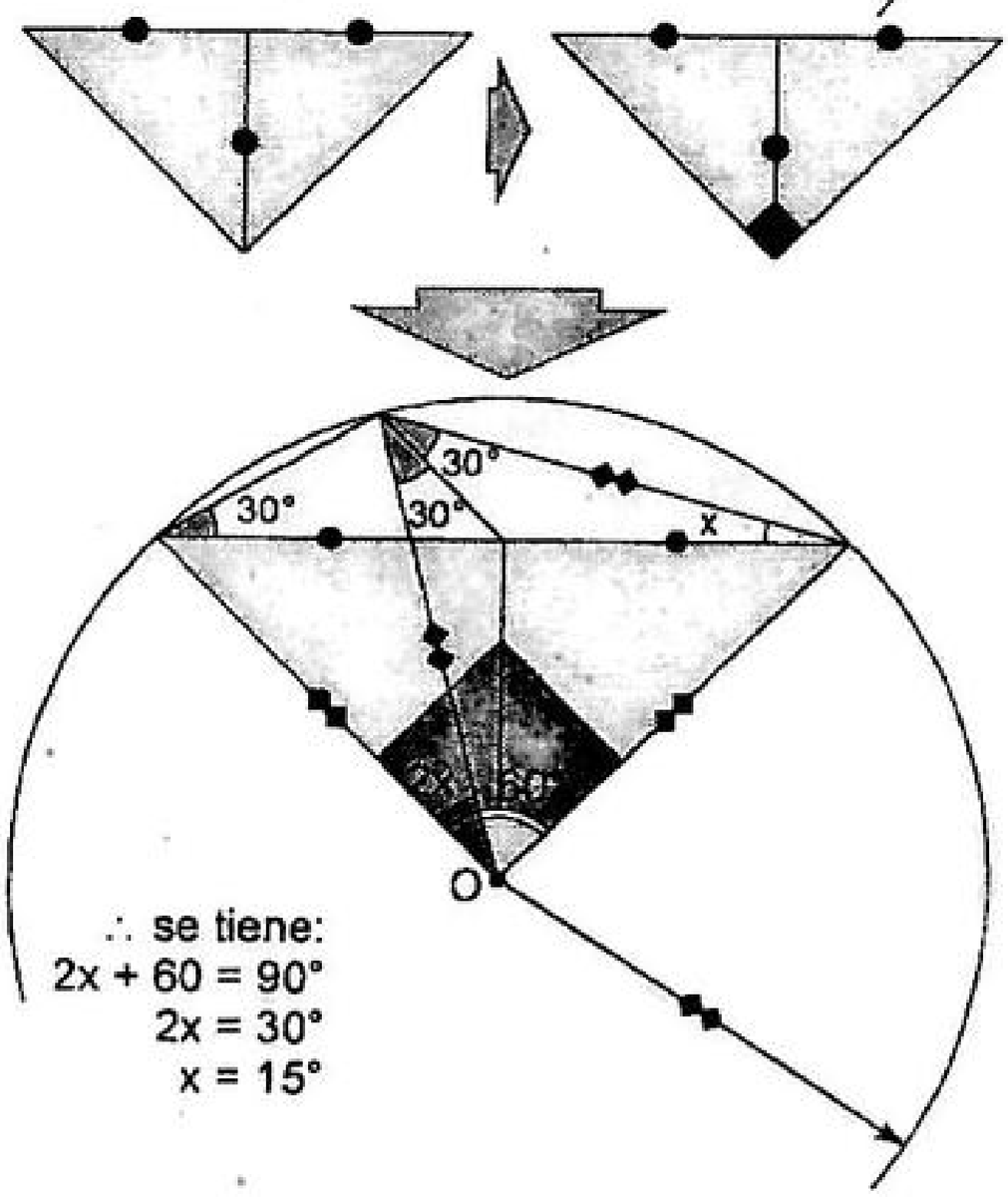




Paso N° 4. Observamos la siguiente figura



Aquí se cumple:



∴ se tiene:

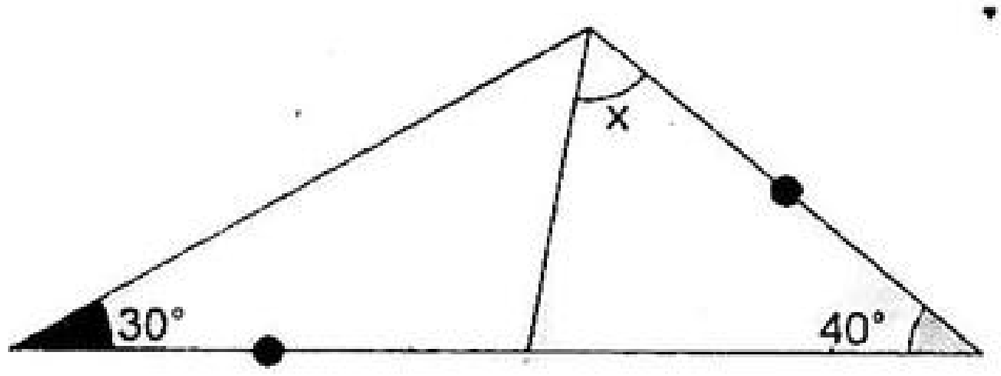
$2x + 60 = 90°$

$2x = 30°$

$x = 15°$

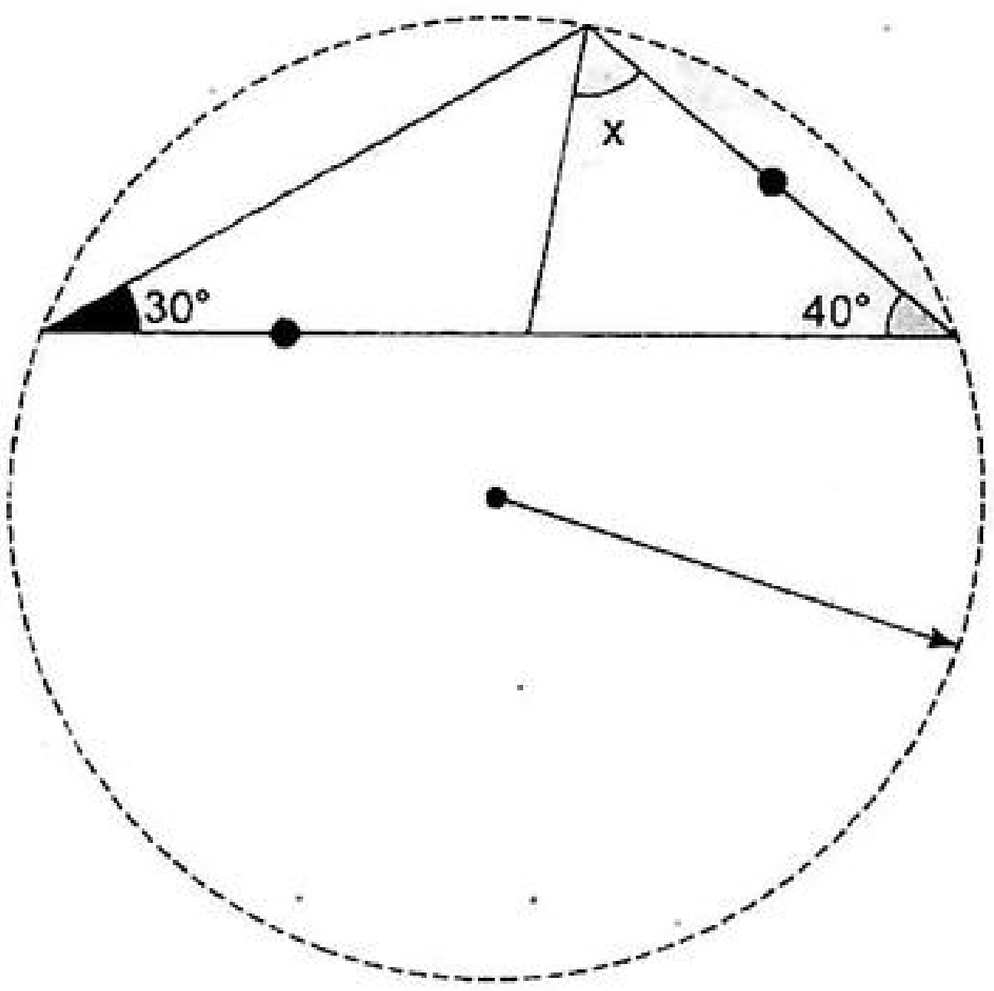
Scanned by CamScanner

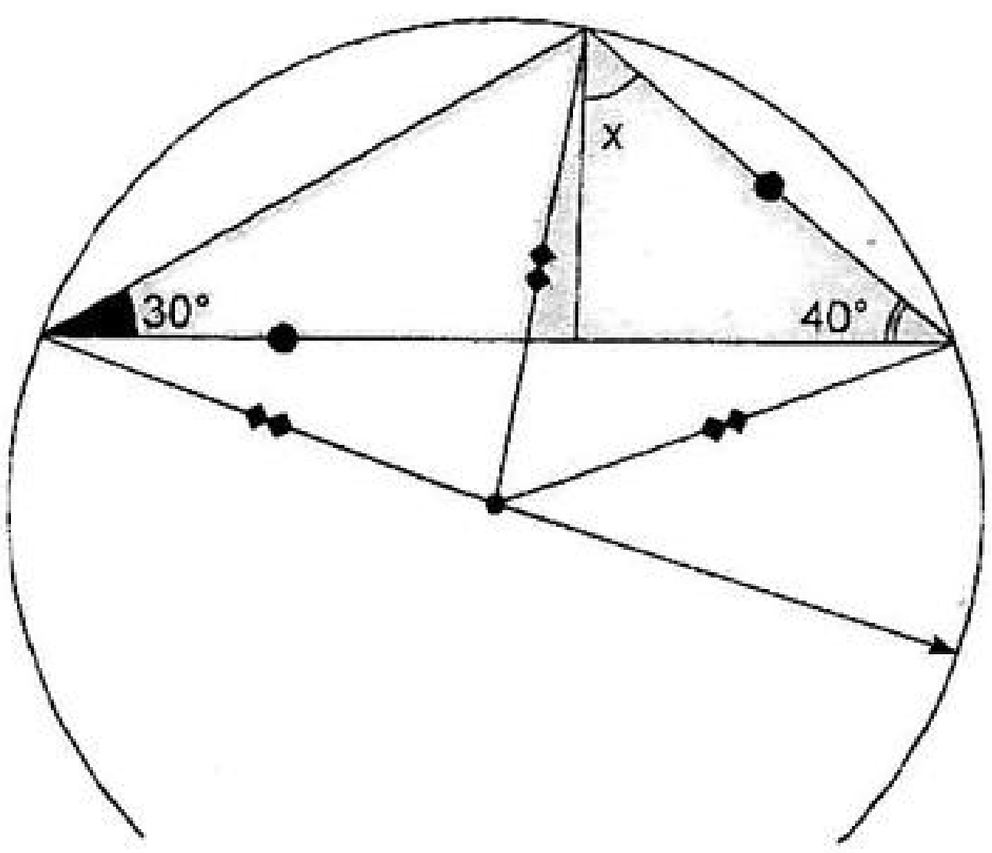
Problema 53. Calcular x.



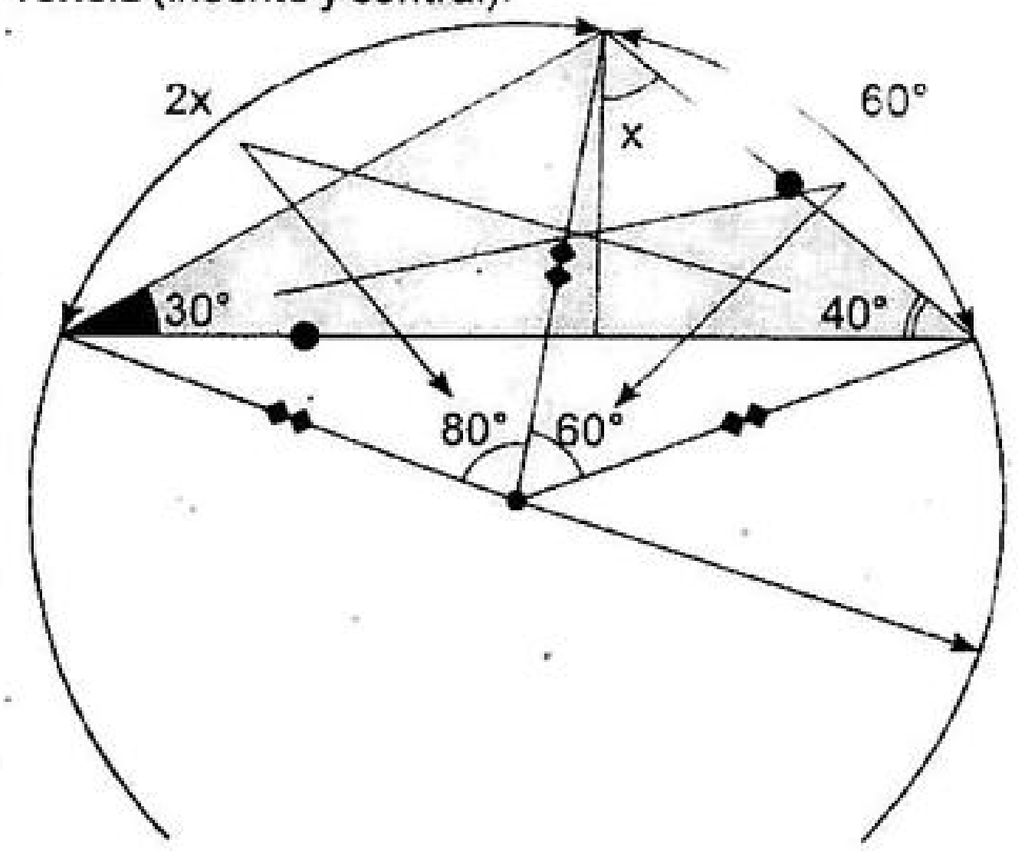
Resolución:

Paso N° 1. Colocamos nuestro triángulo en una circunferencia . Como el triángulo es obtusángulo el circuncentro está en su exterior:

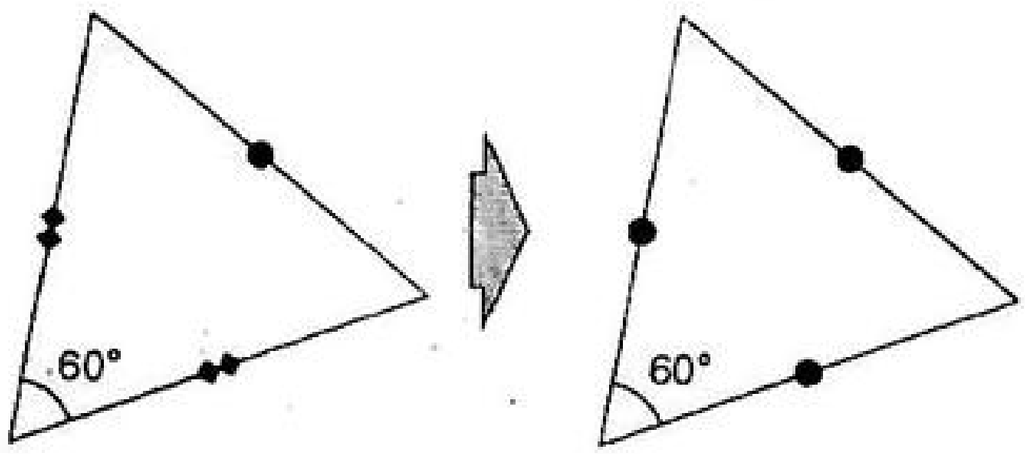


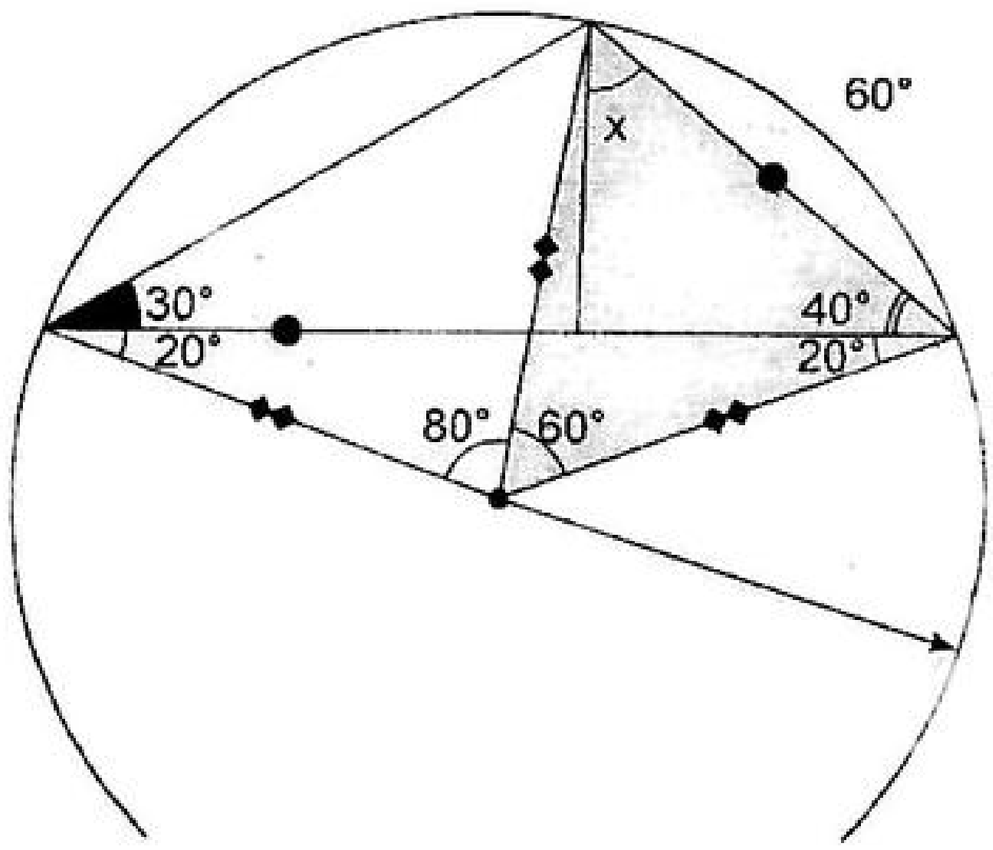


Paso N° 2. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):



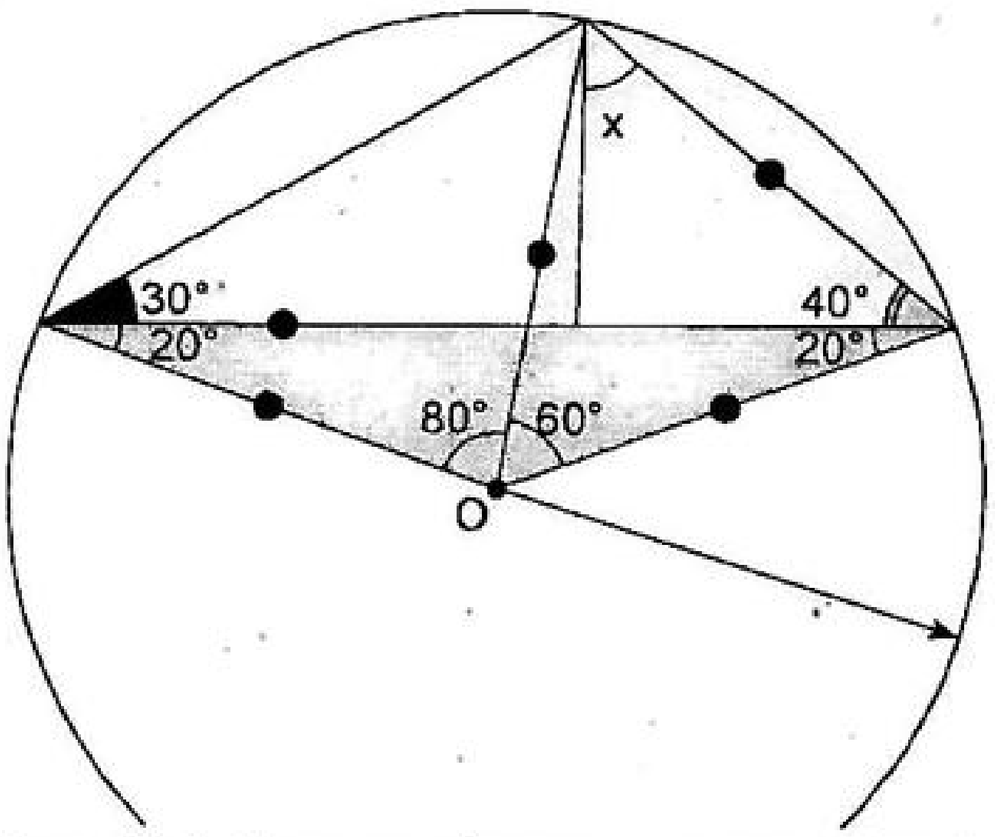
Paso N° 3. Se observa un triángulo equilátero:



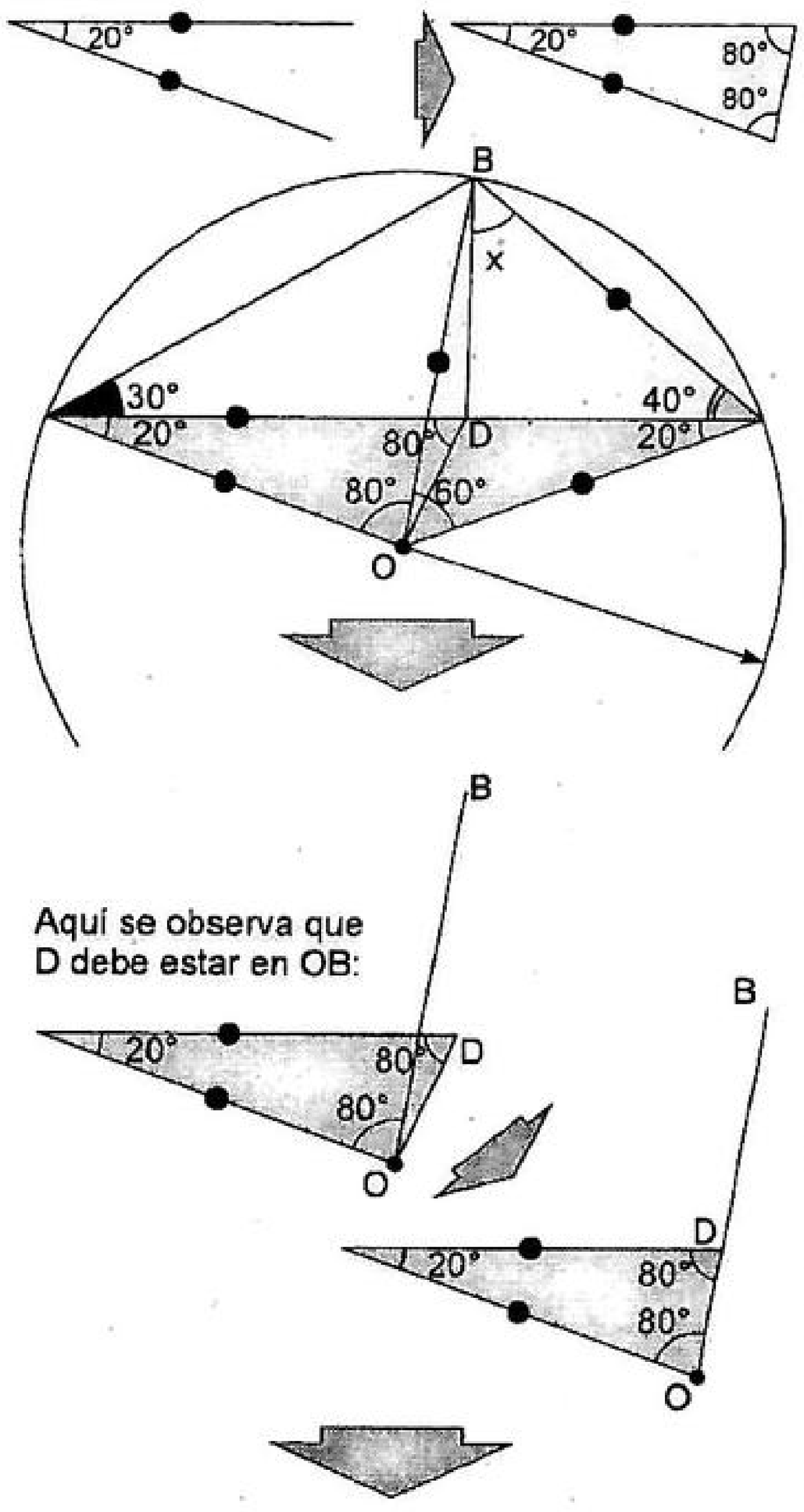


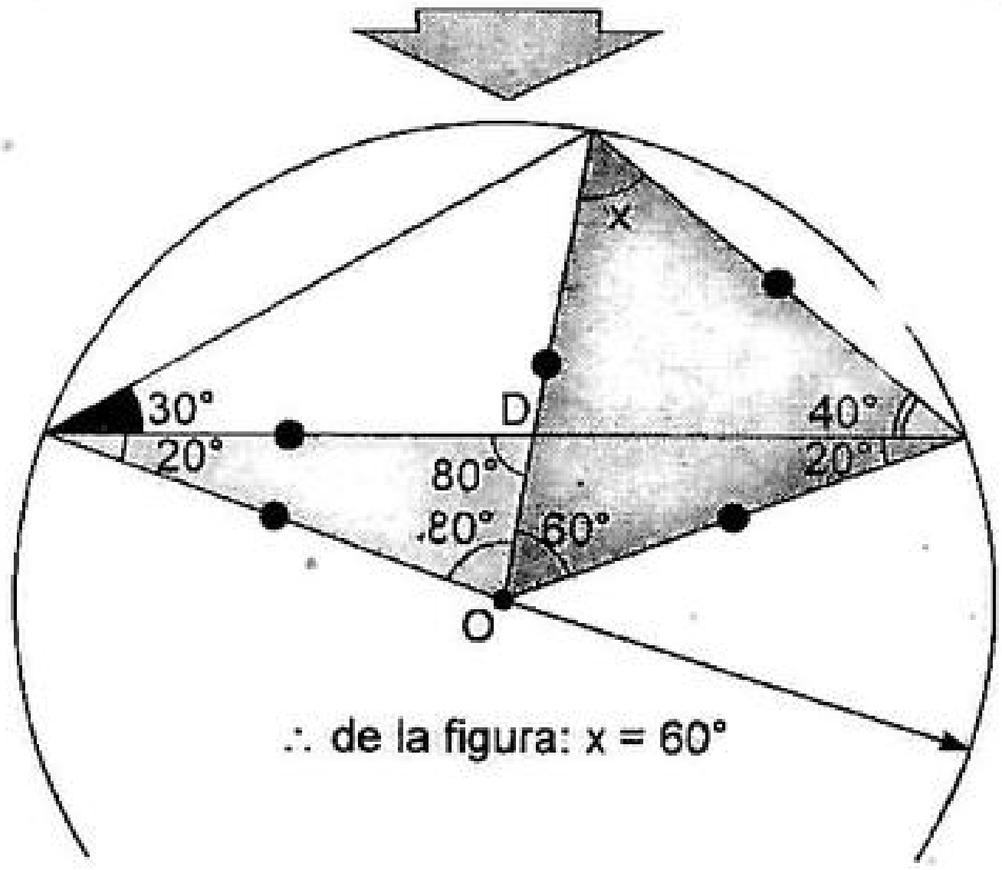
Paso N° 4 También observamos un triángulo isósceles:

Scanned by CamScanner



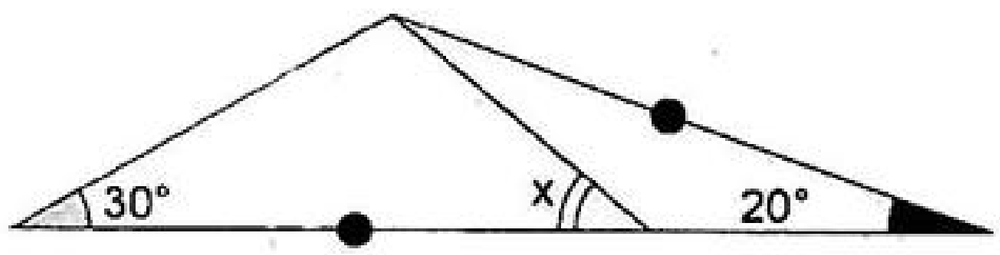
Paso N° 5. Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles:





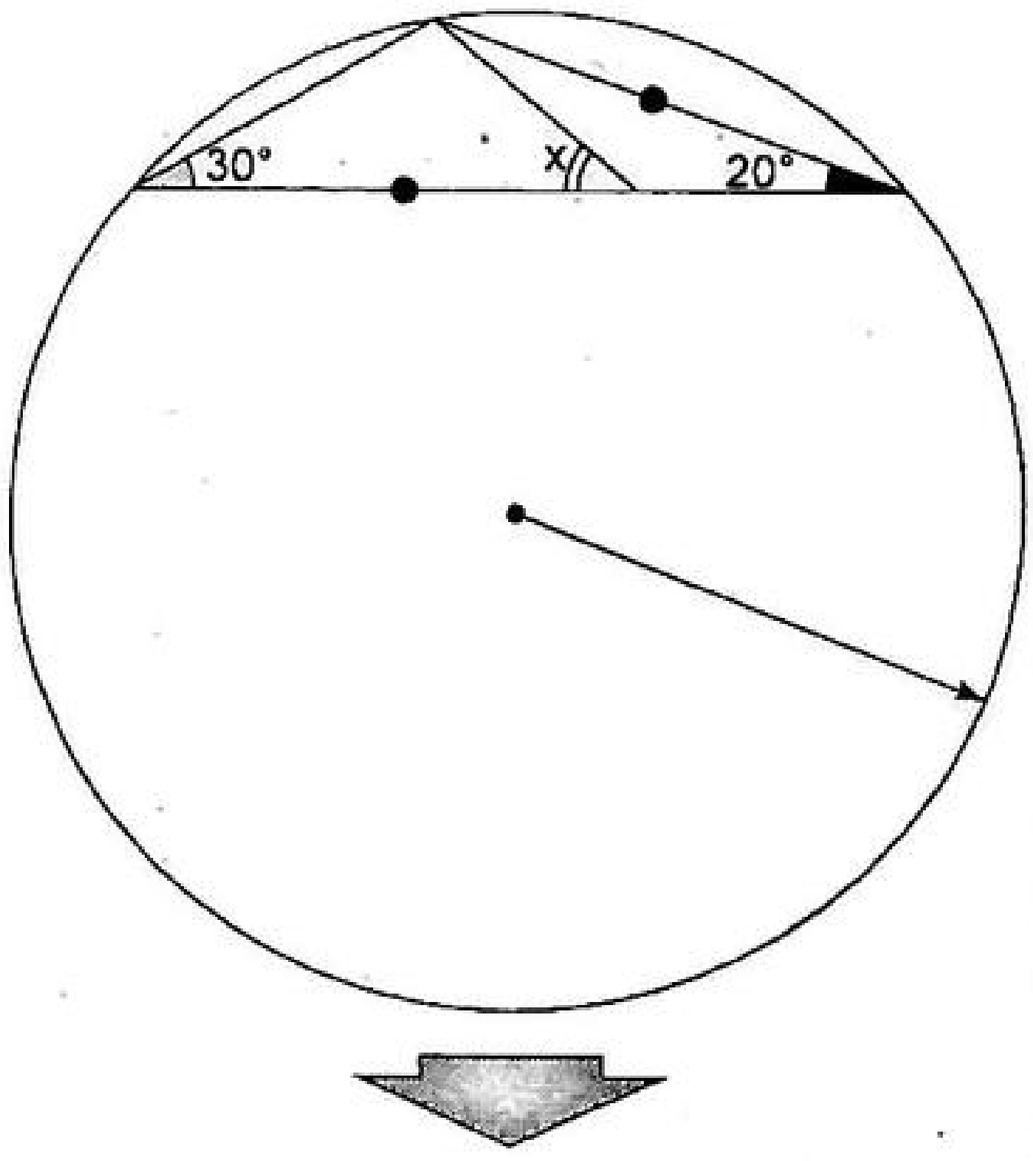
∴ de la figura: x = 60°

Problema 54. Calcular x.

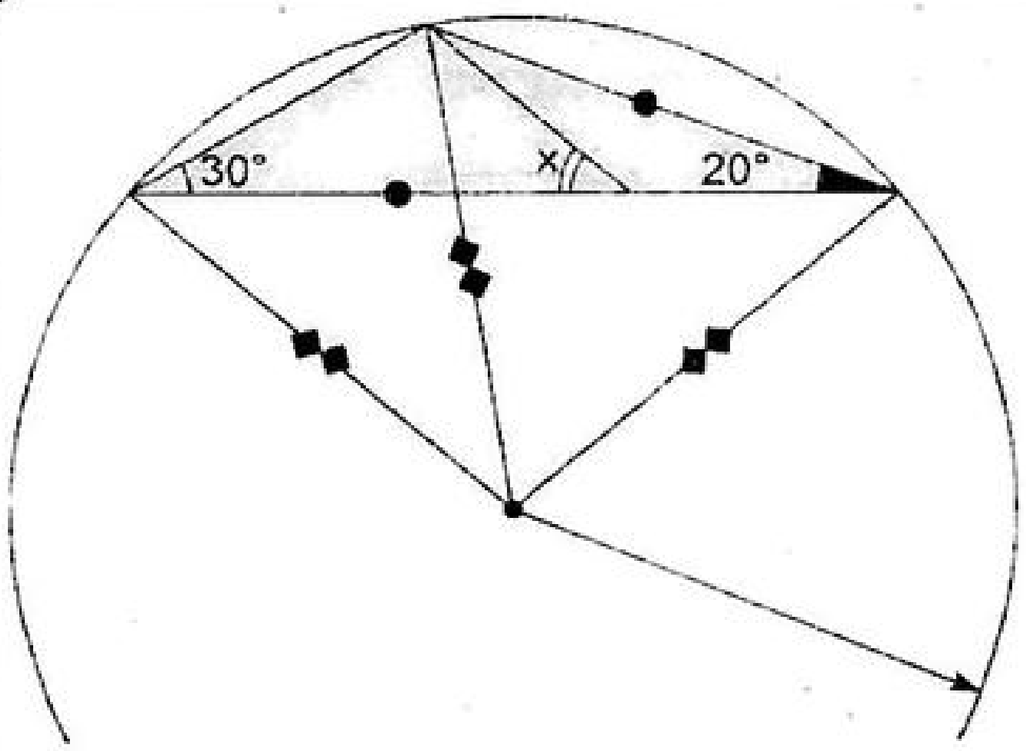


Resolución:

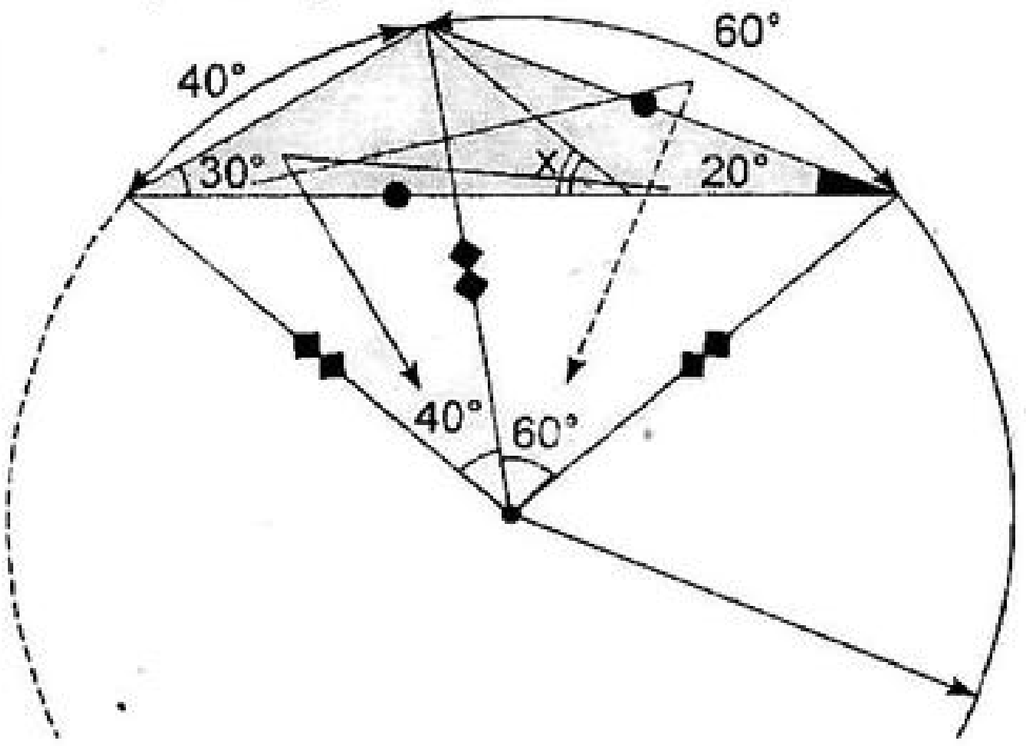
Paso N° 1. Colocamos el triángulo en una circunferencia y ubicamos el circuncentro (exterior al triángulo obtusángulo:



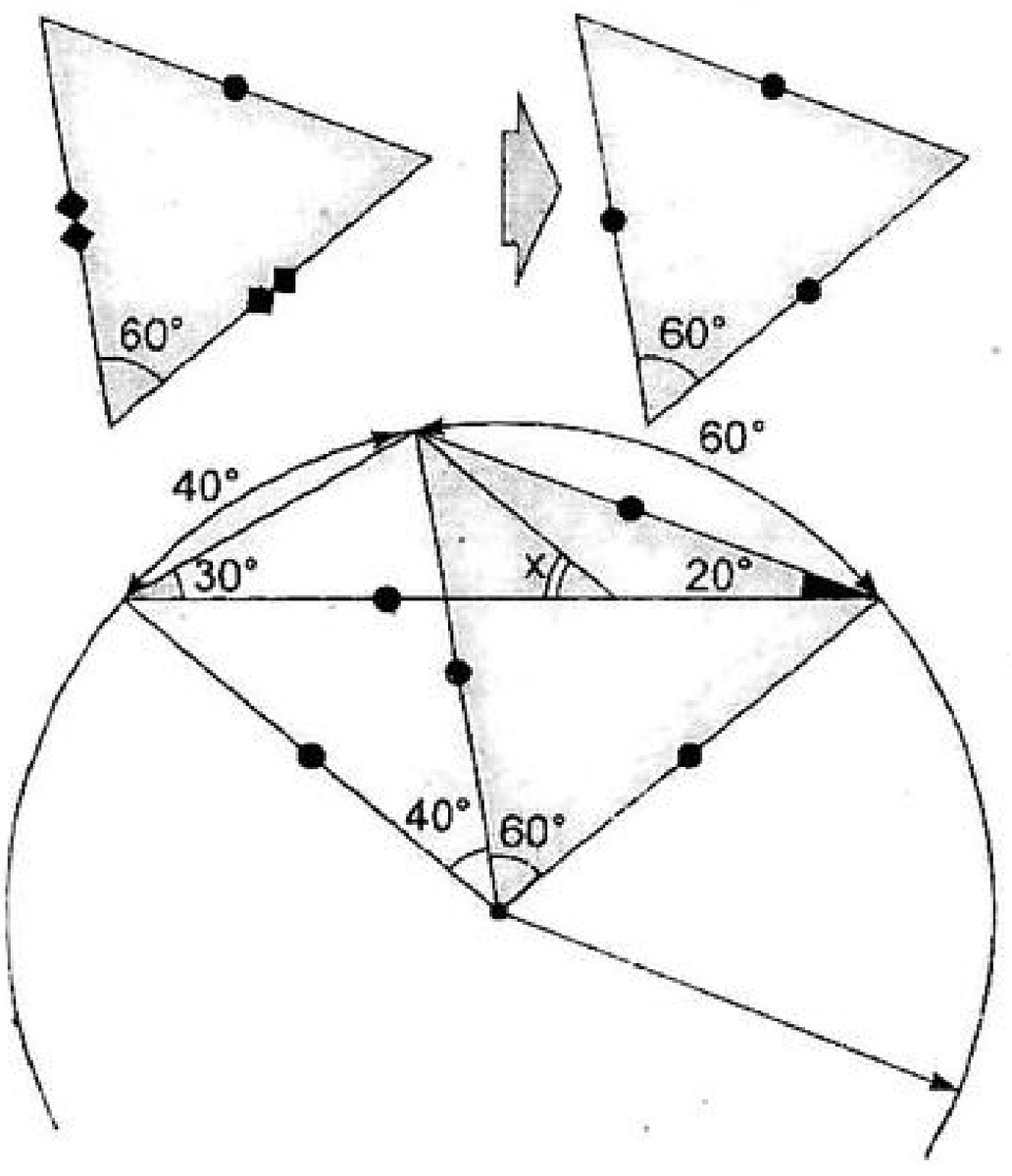
Scanned by CamScanner



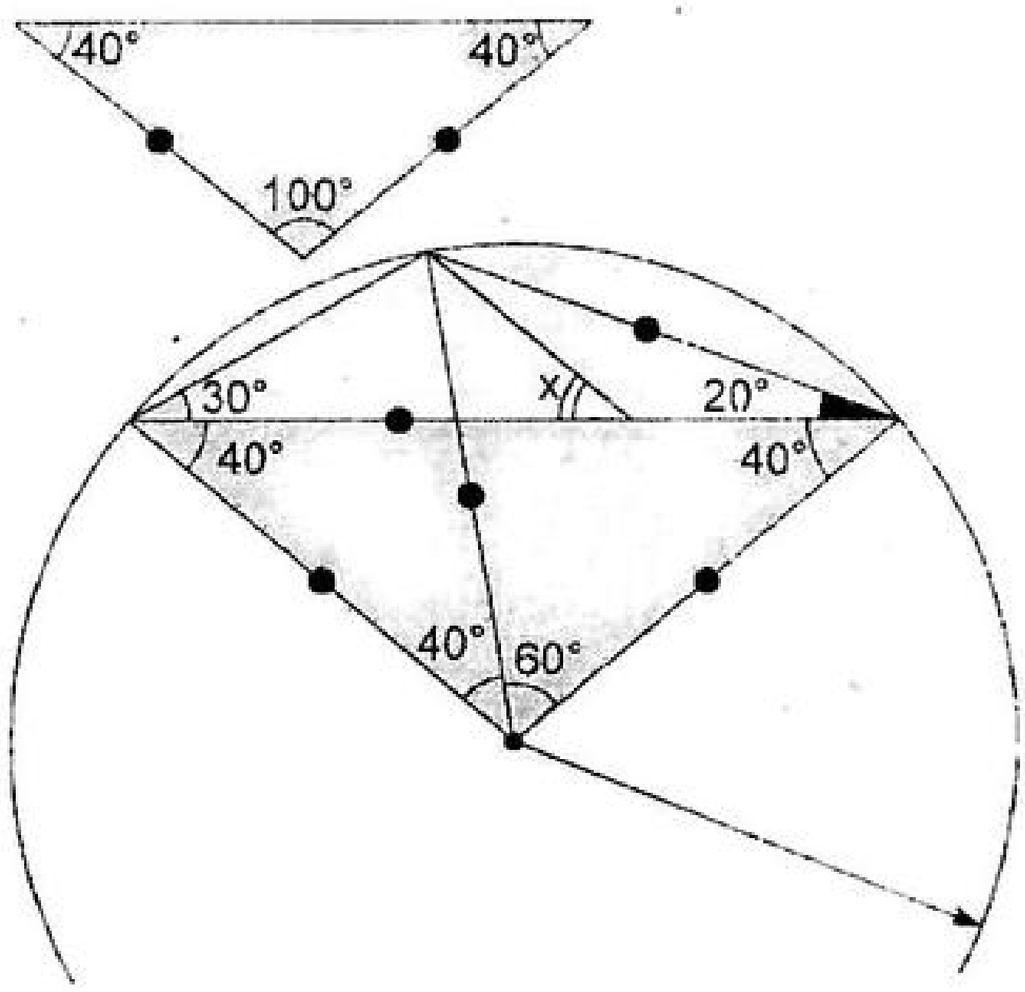
Paso N° 2. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):



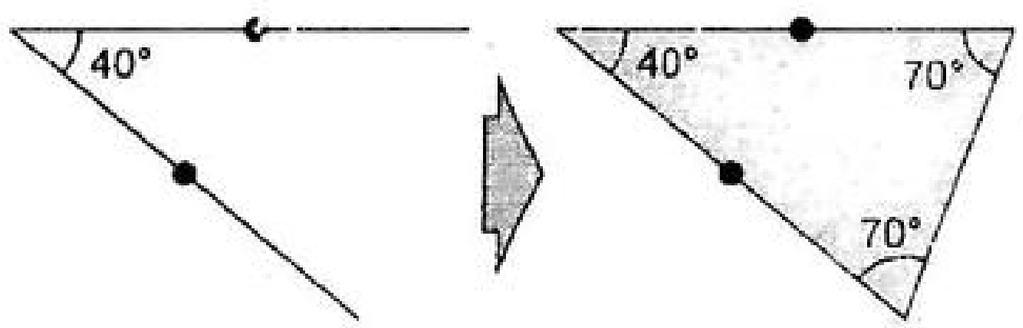
Paso N° 3. Se observa un triángulo equilátero:

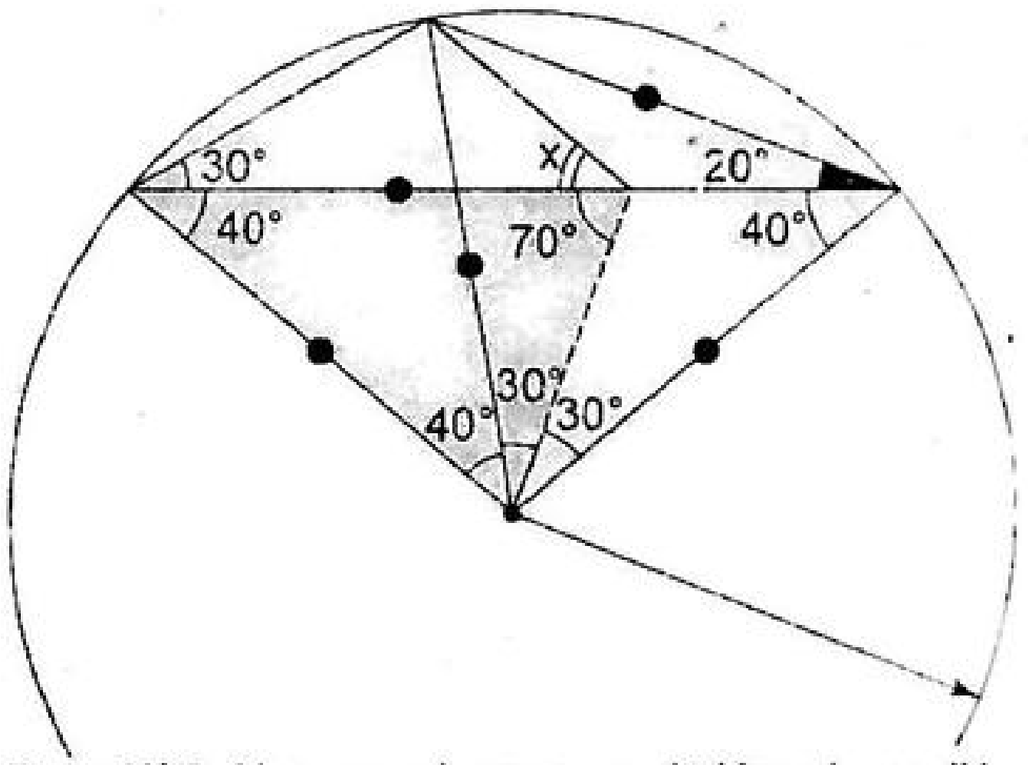


Paso N° 4. Se obtiene un triángulo isósceles:

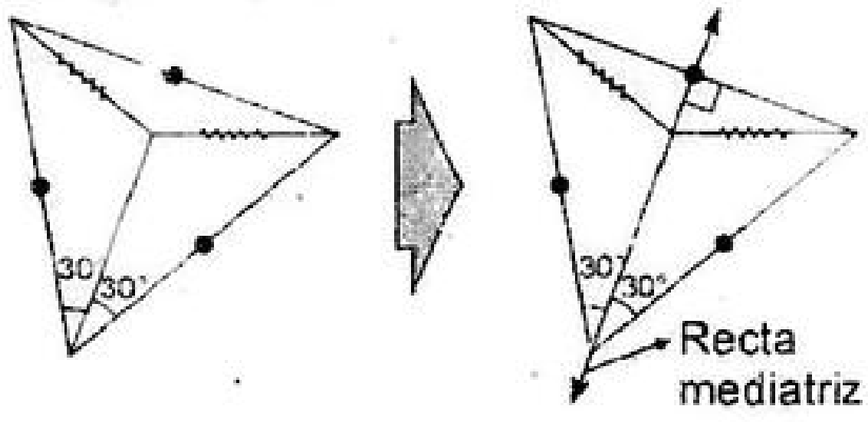


Paso N° 5. Se observa un nuevo triángulo isósceles:

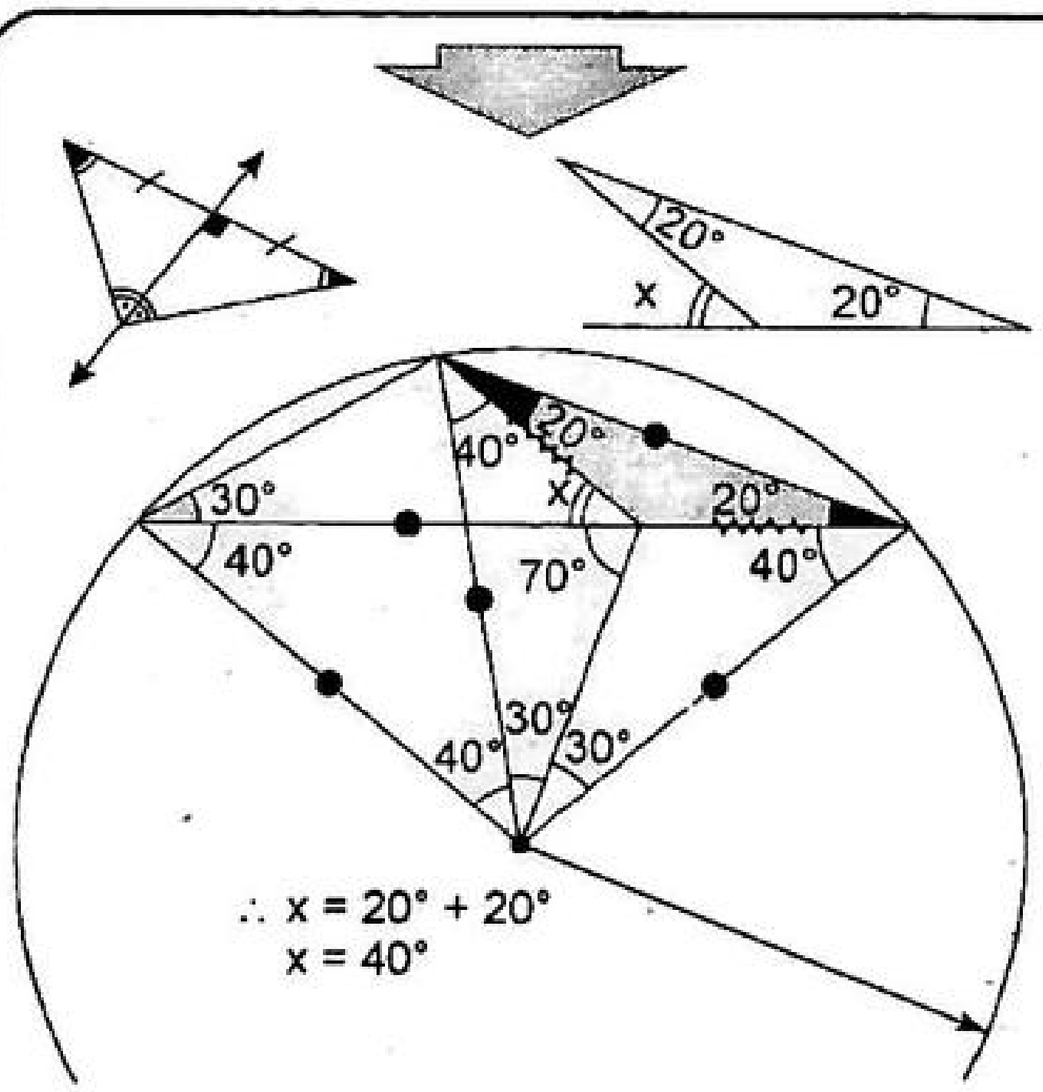




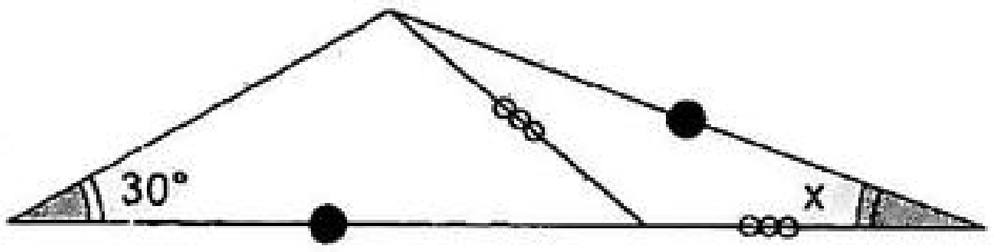
Paso N° 6. Ahora se observa en el triángulo equilátero la siguiente propiedad:



Scanned by CamScanner

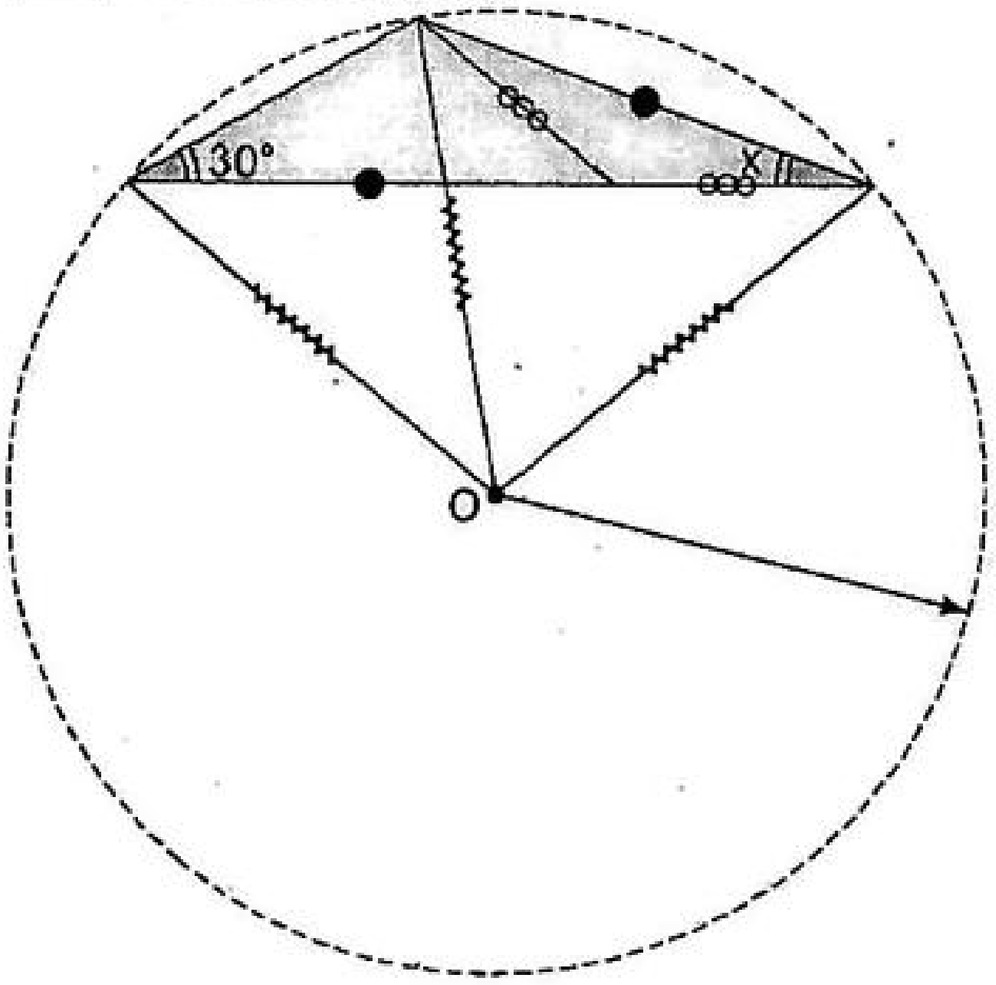


Problema 55. Calcular x.

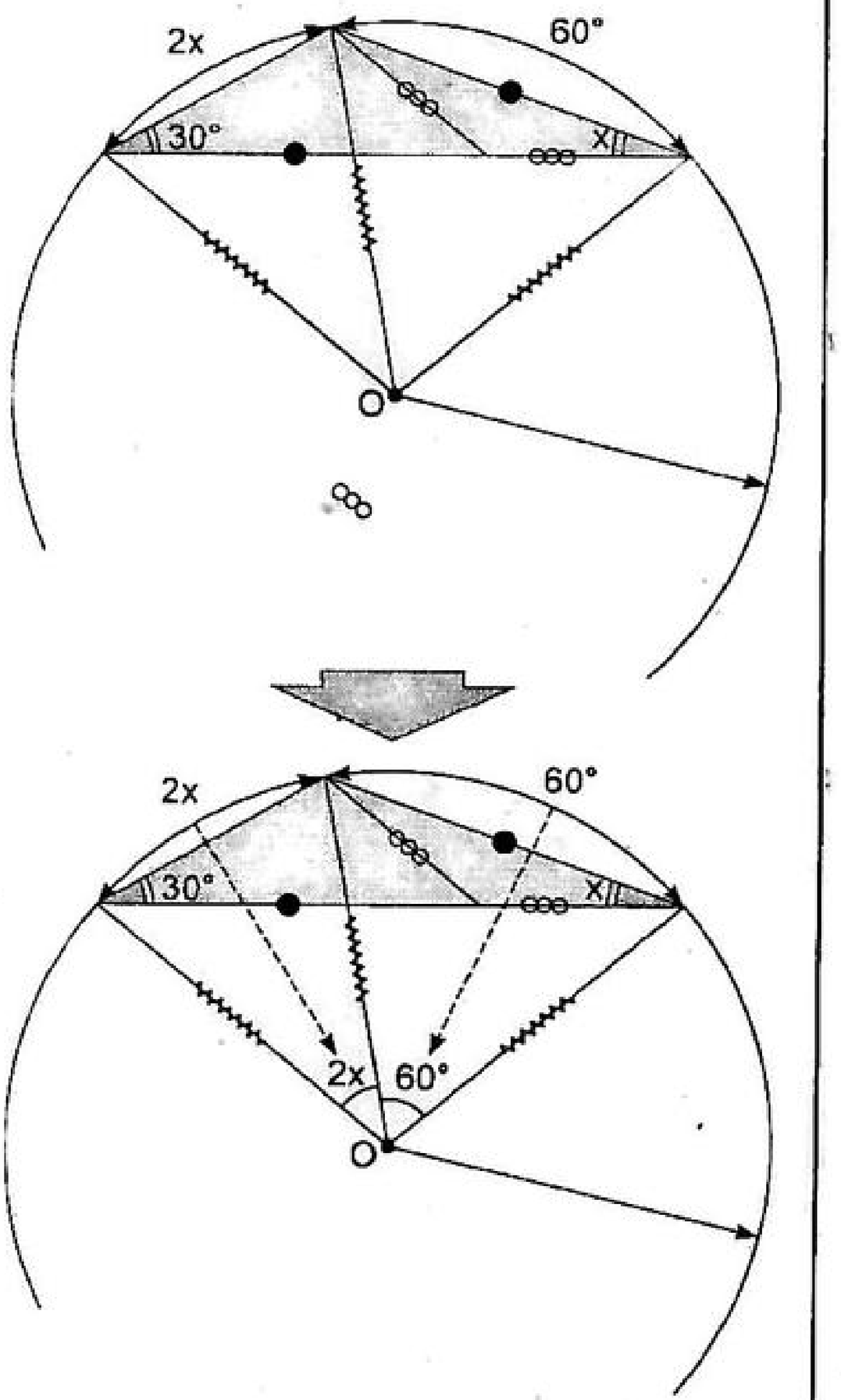


Resolución:

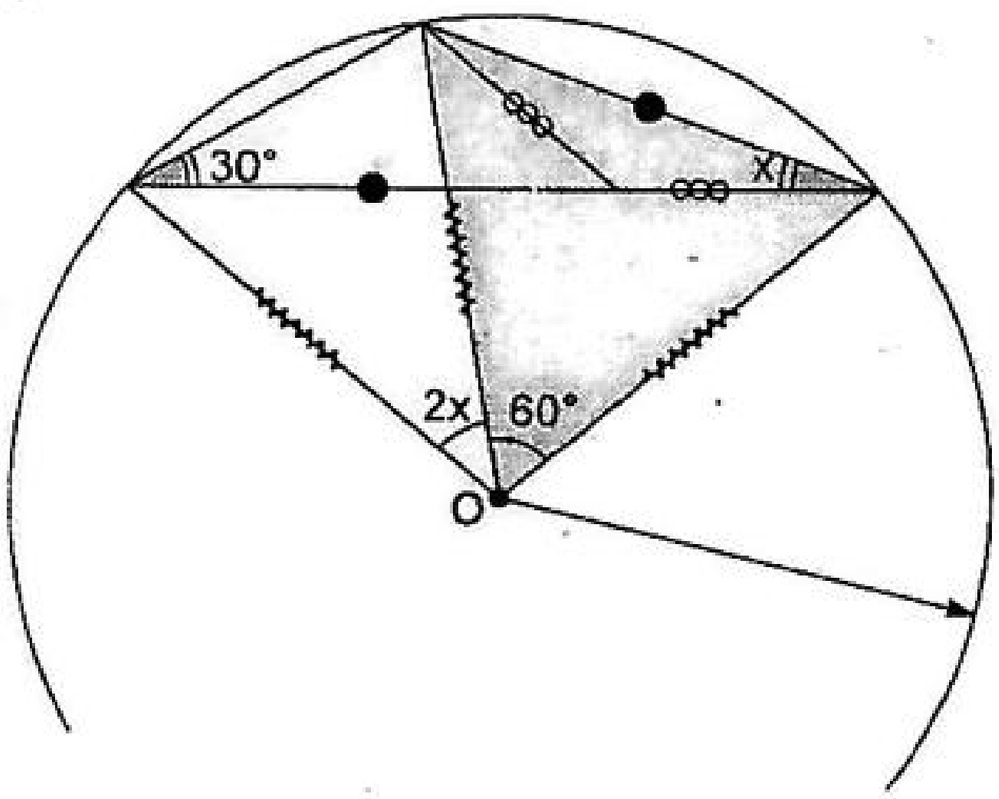
Paso N° 1. Colocamos el triángulo en una circunferencia y ubicamos su circuncentro (exterior al triángulo por ser obtusángulo):



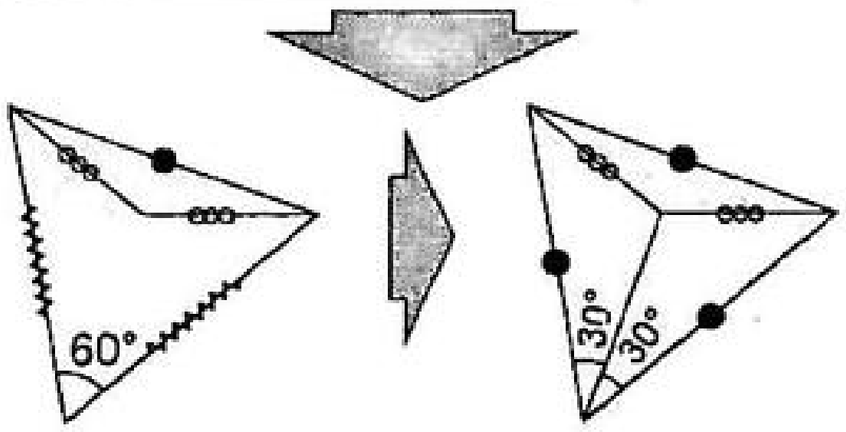
Paso N° 2. Ahora empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

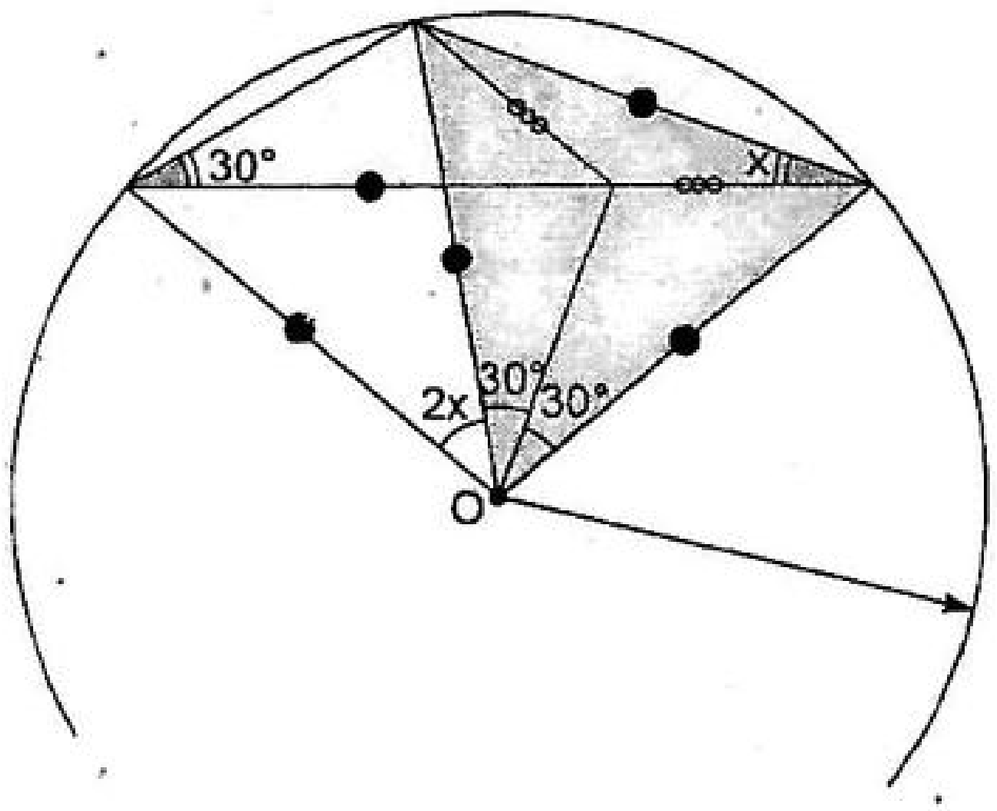


Paso N° 3. Se observa un triángulo equilátero donde cumple:

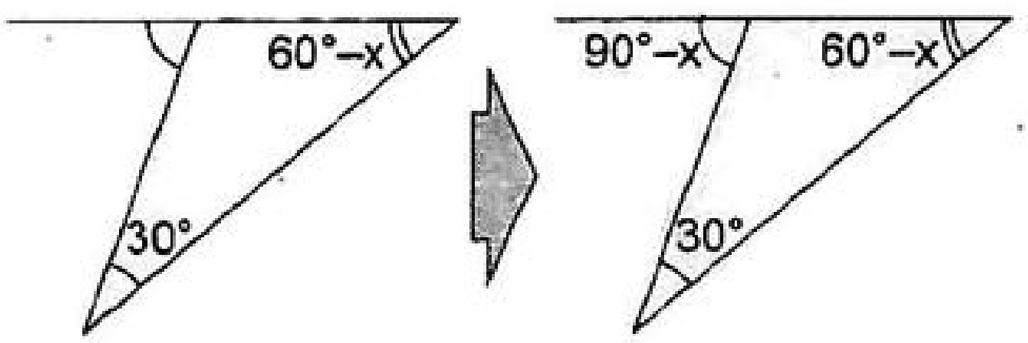


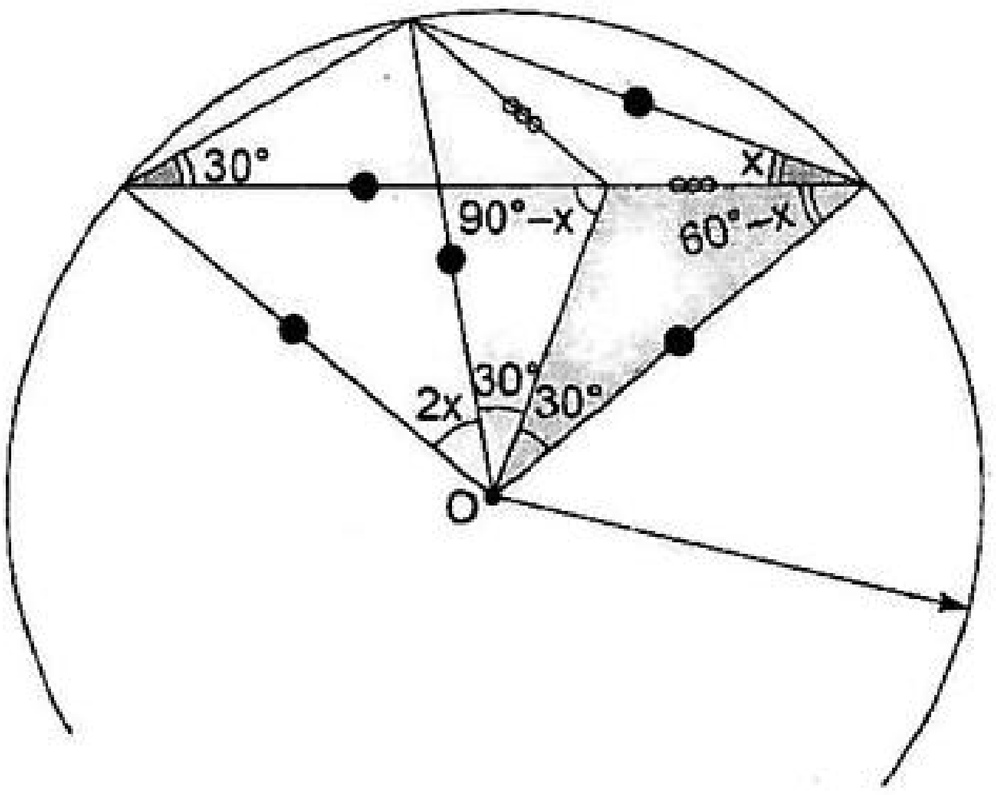
Scanned by CamScanner



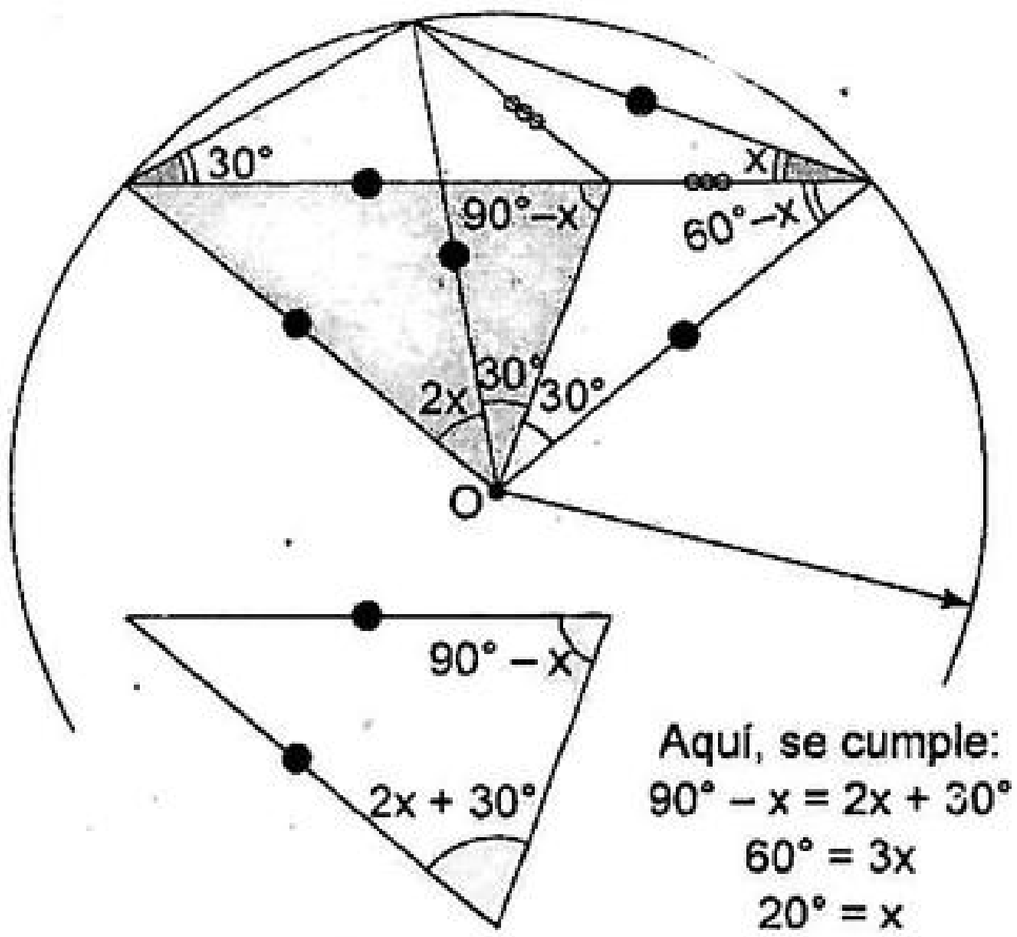


Paso N° 4. Se observa la siguiente figura, donde cumple:





Paso N°5. Ahora observamos un nuevo triángulo isósceles:



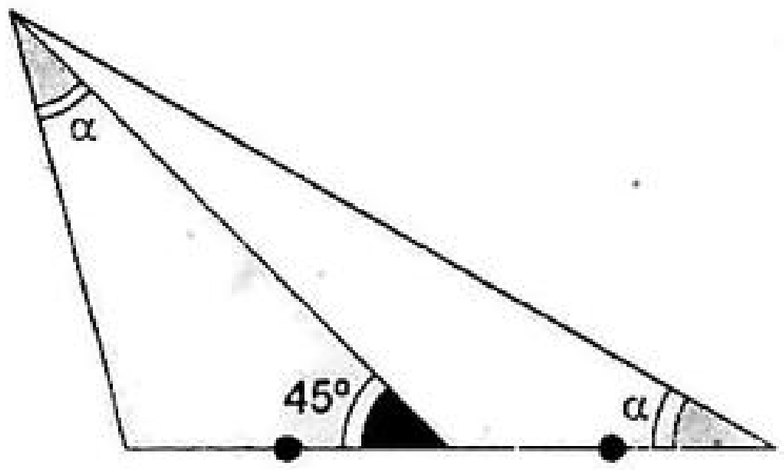
Aquí, se cumple:

$90° - x = 2x + 30°$

$60° = 3x$

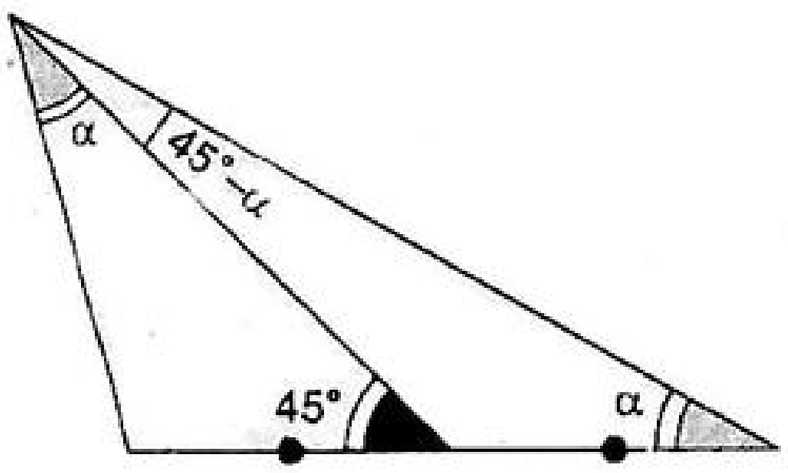
$20° = x$

Problema 56. Calcular α.



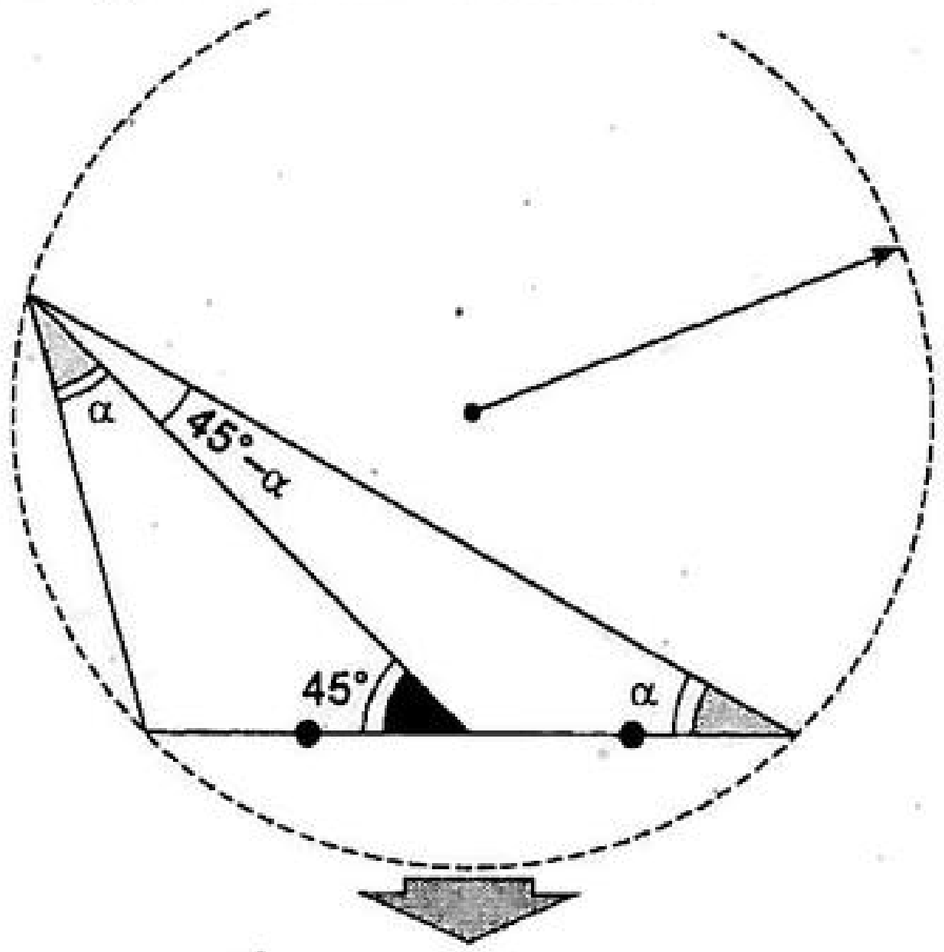
Resolución:

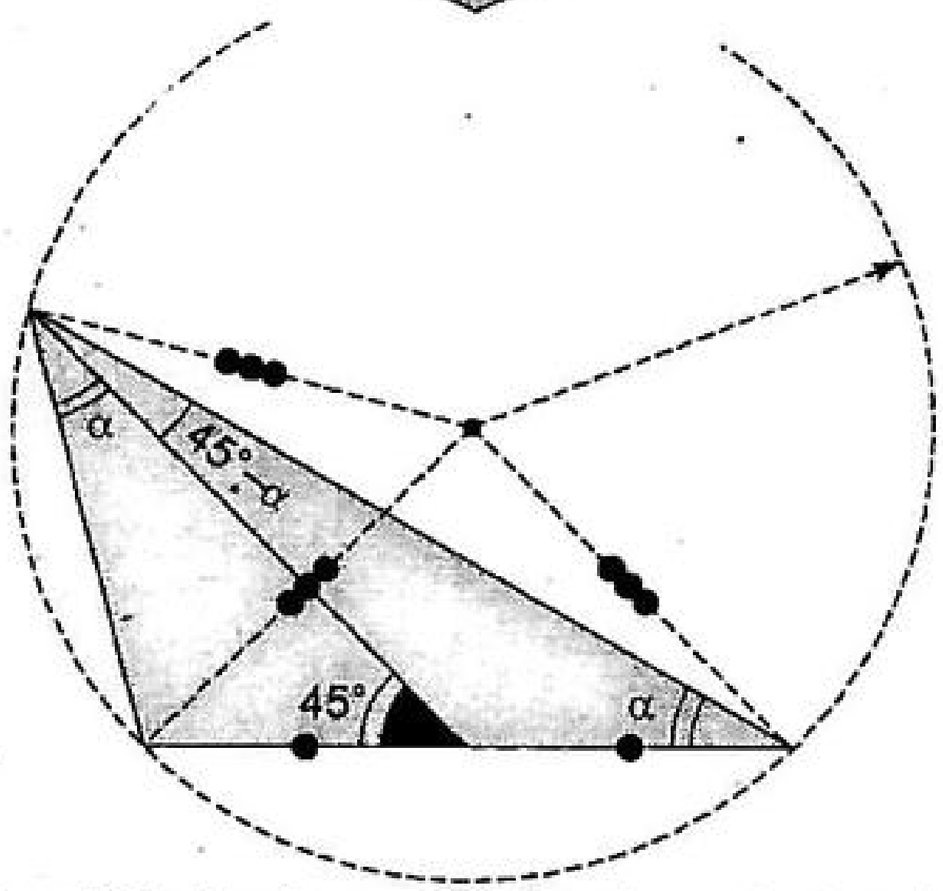
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:



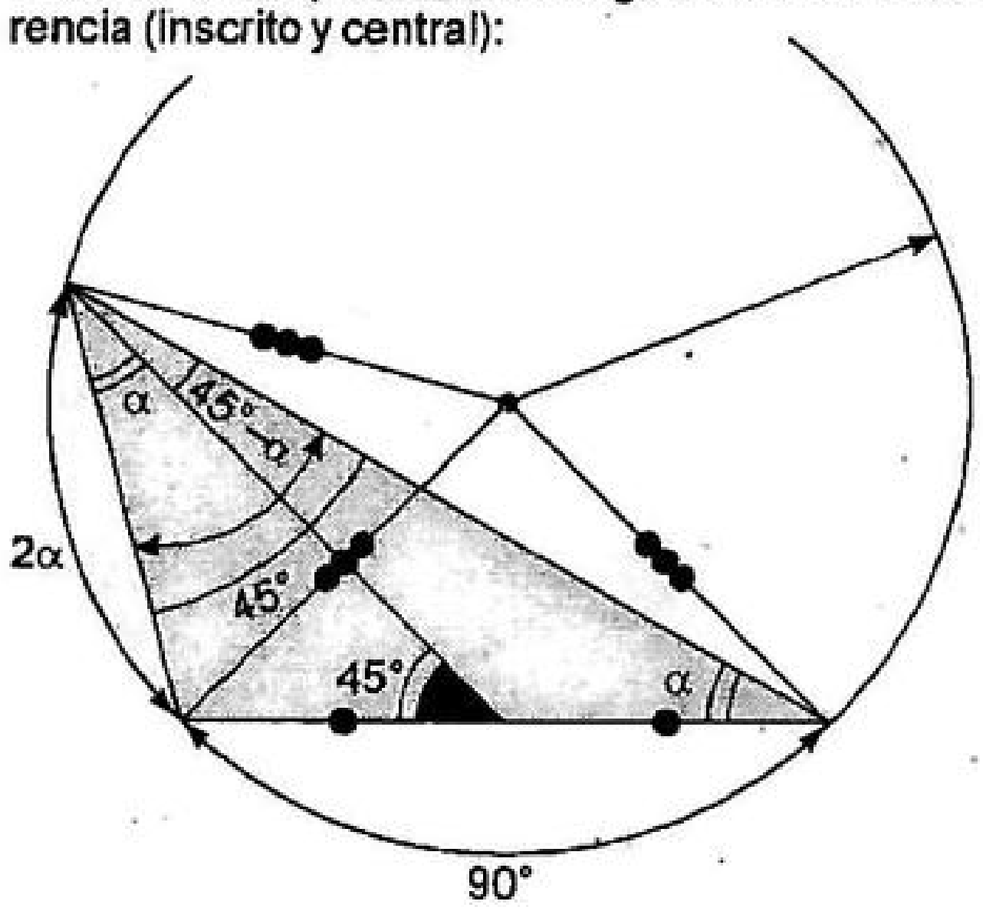
Scanned by CamScanner

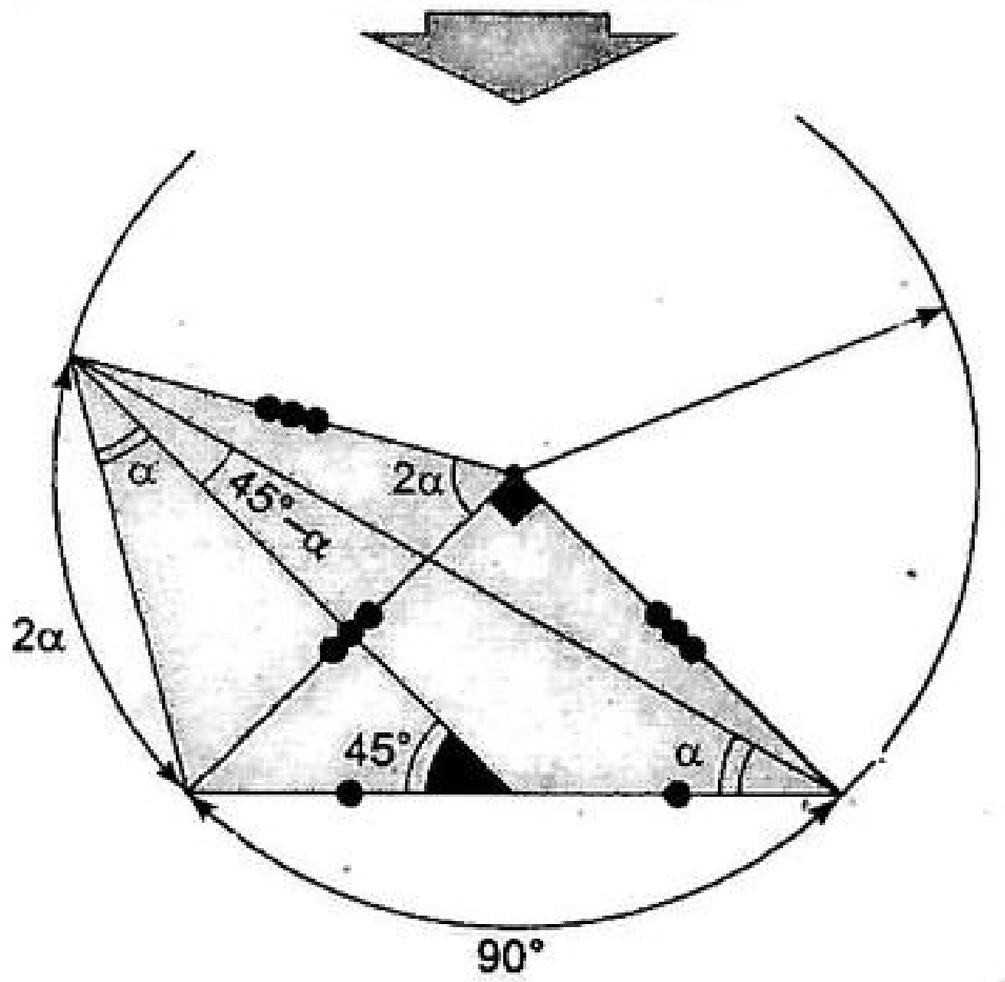
Paso N° 2. Colocamos el triángulo en una circunferencia y ubicamos su circuncentro:



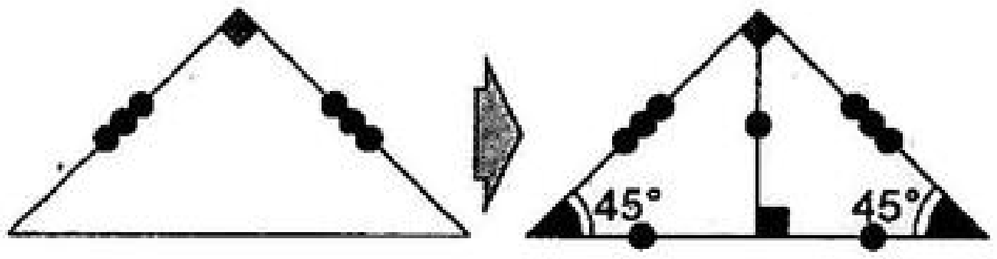


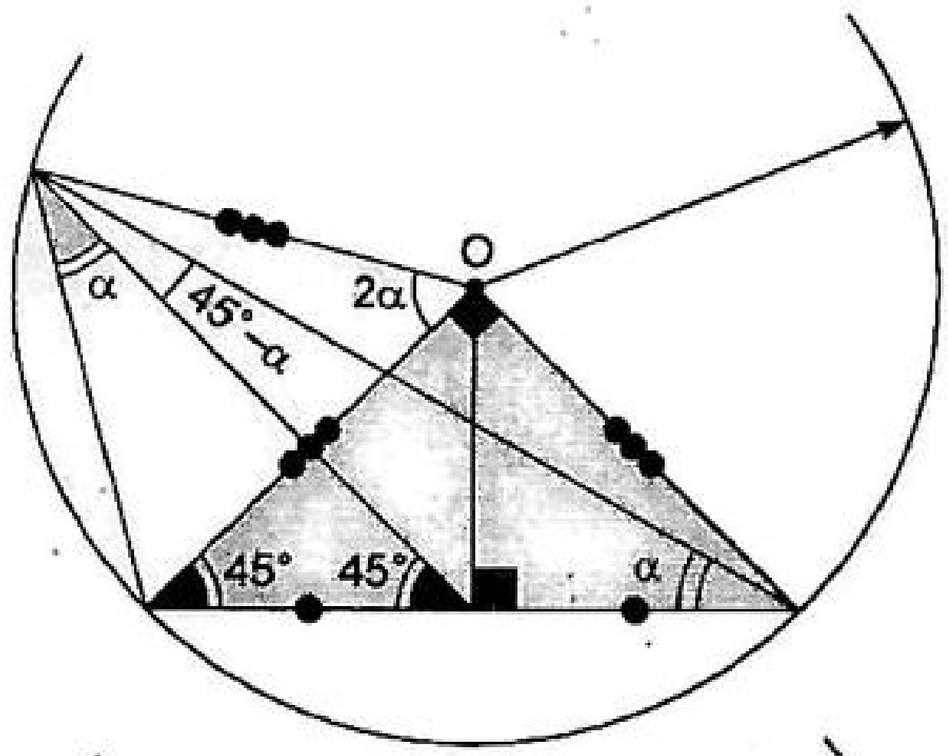
Paso N° 3. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

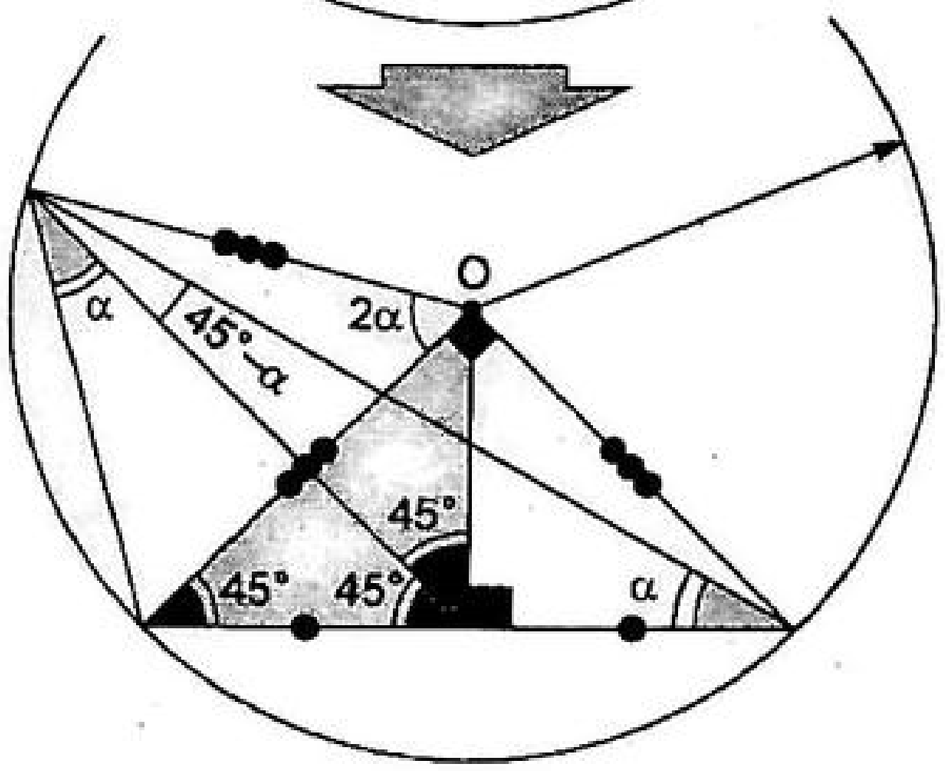




Paso N° 4. Observamos un triángulo rectángulo isósceles donde cumple:

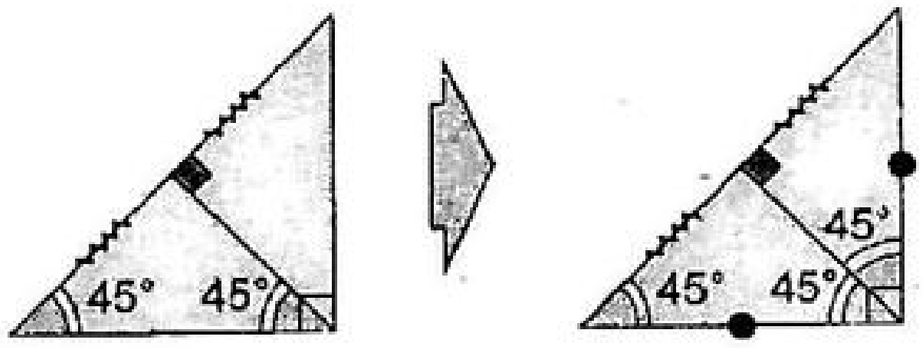


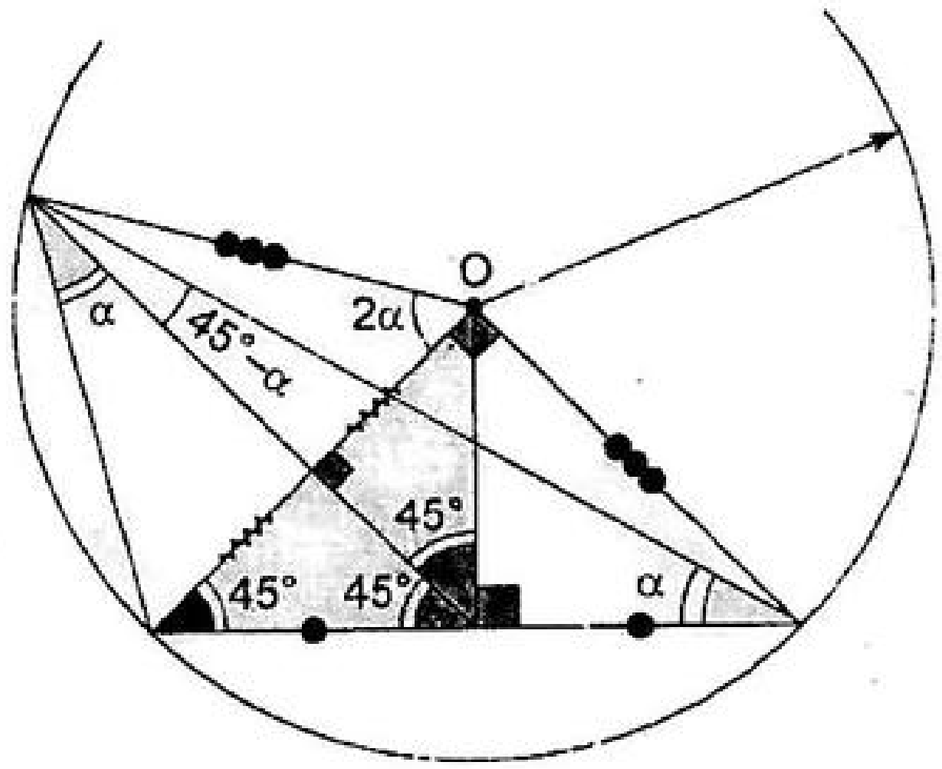




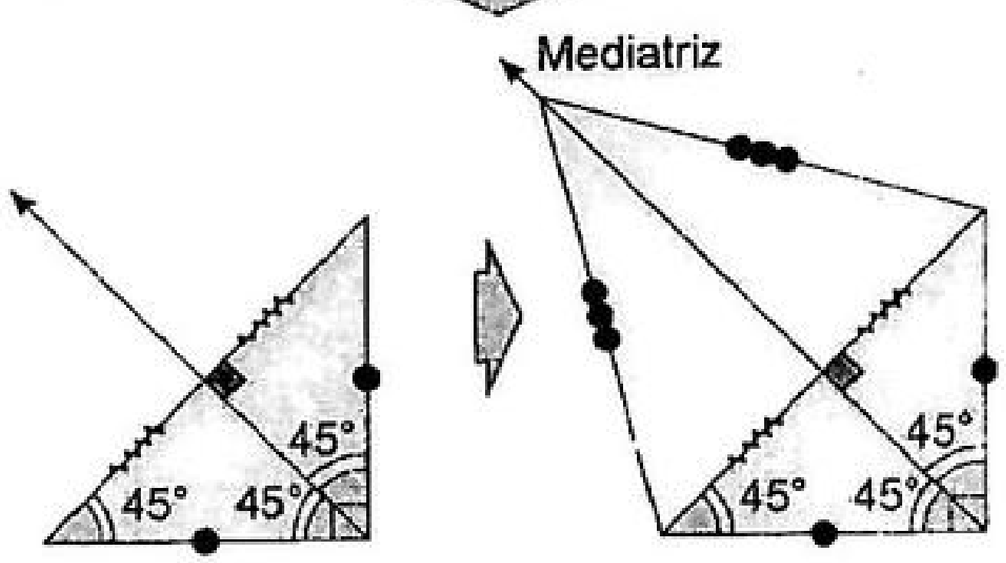
Scanned by CamScanner

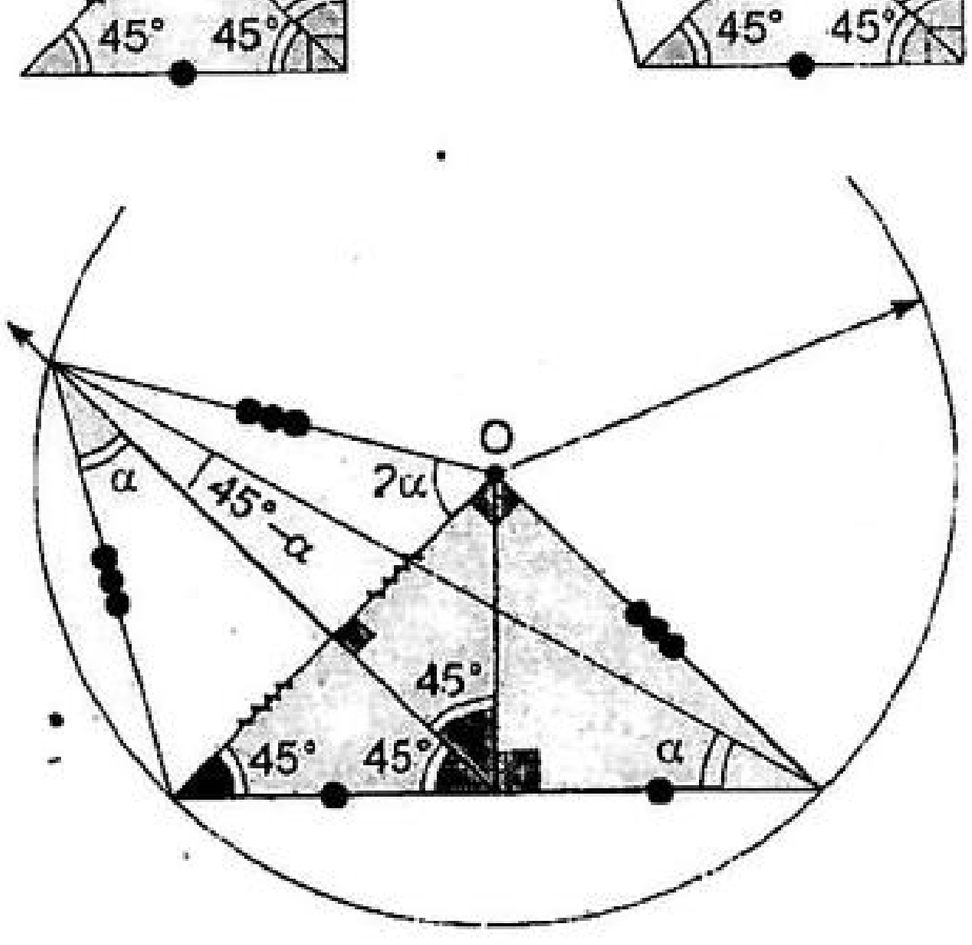
Paso N° 5. Se observa:



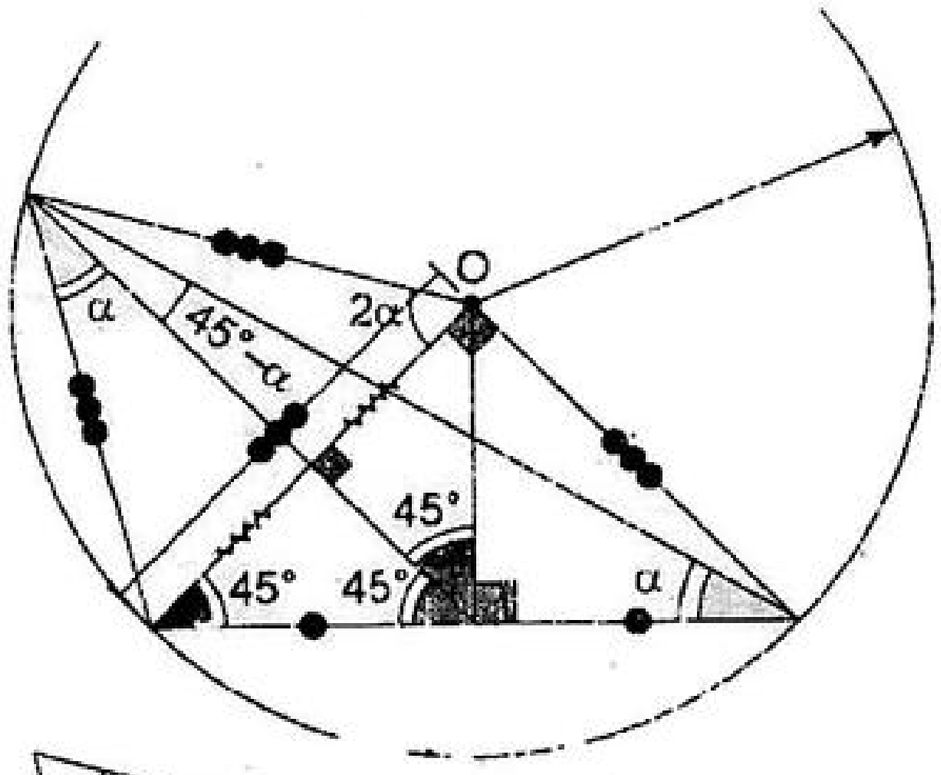


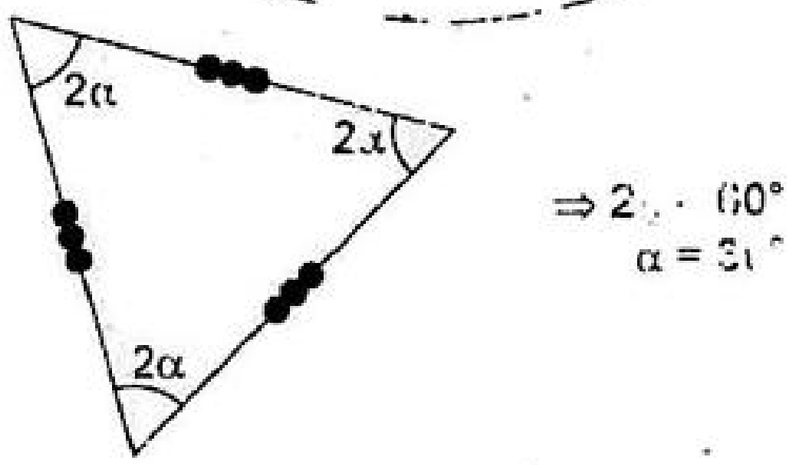
Mediatriz





Paso N° 6. ahora tenemos un triángulo equilátero

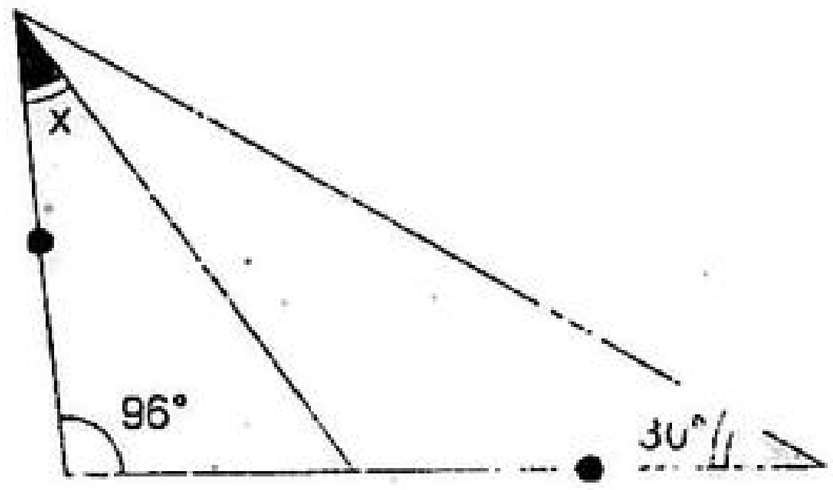




$\Rightarrow 2\alpha = 60°$

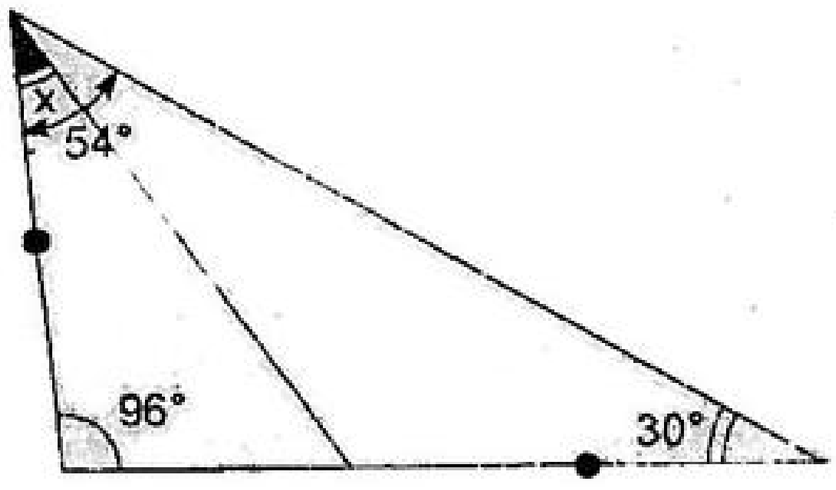
$\alpha = 30°$

Problema 57. Calcular x.



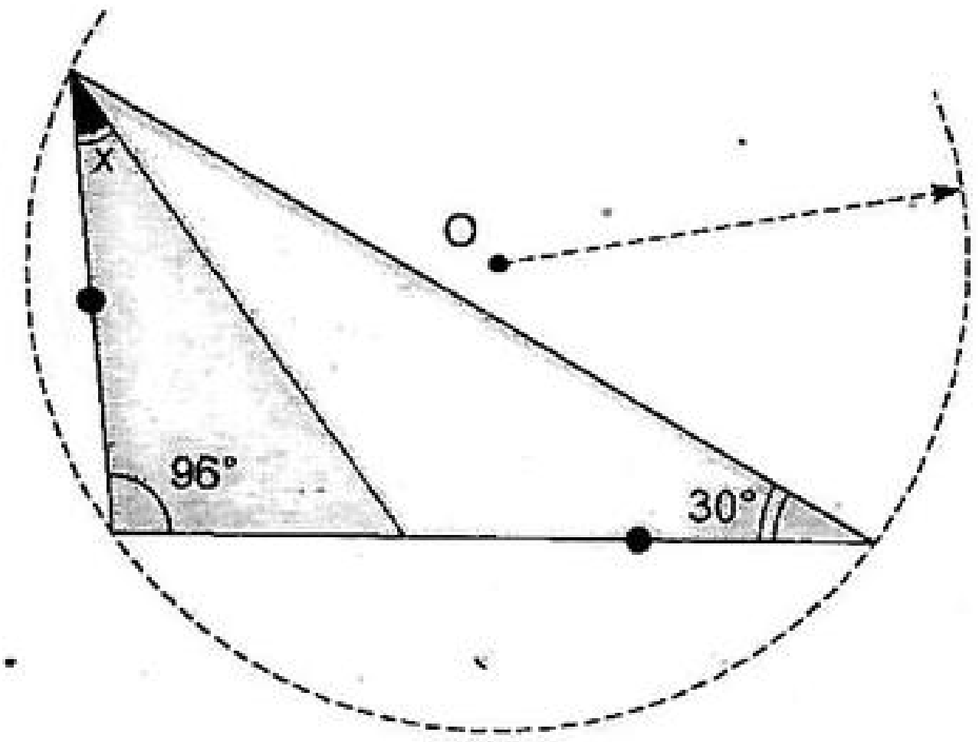
Resolución:

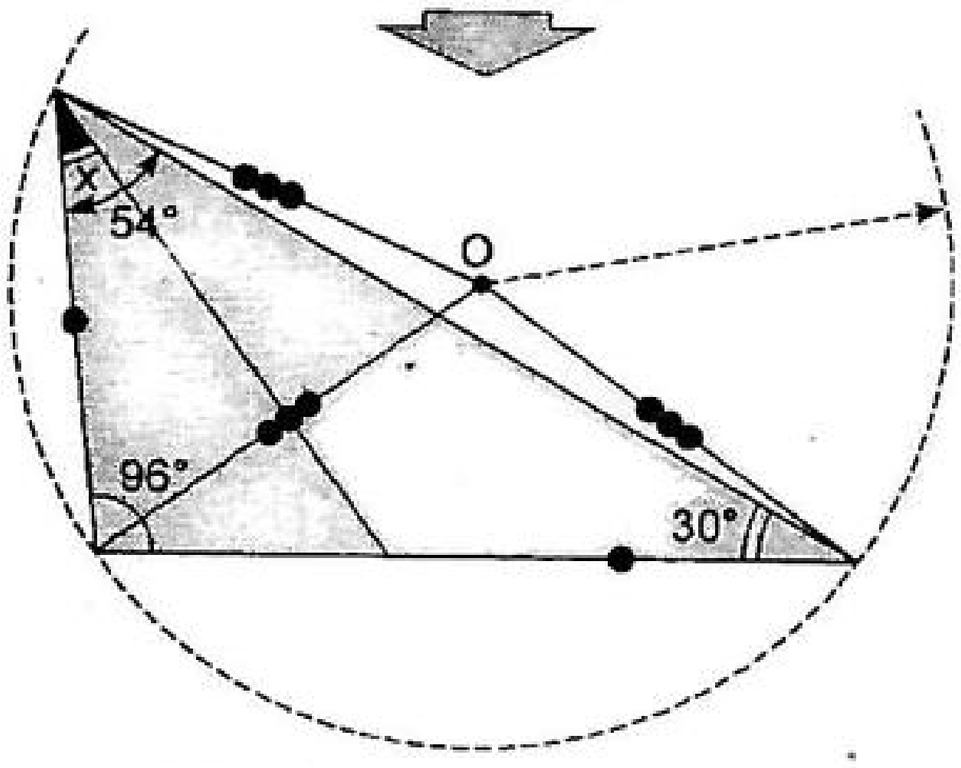
Paso N° 1. Completamos angulos internos del triángulo se obtiene:



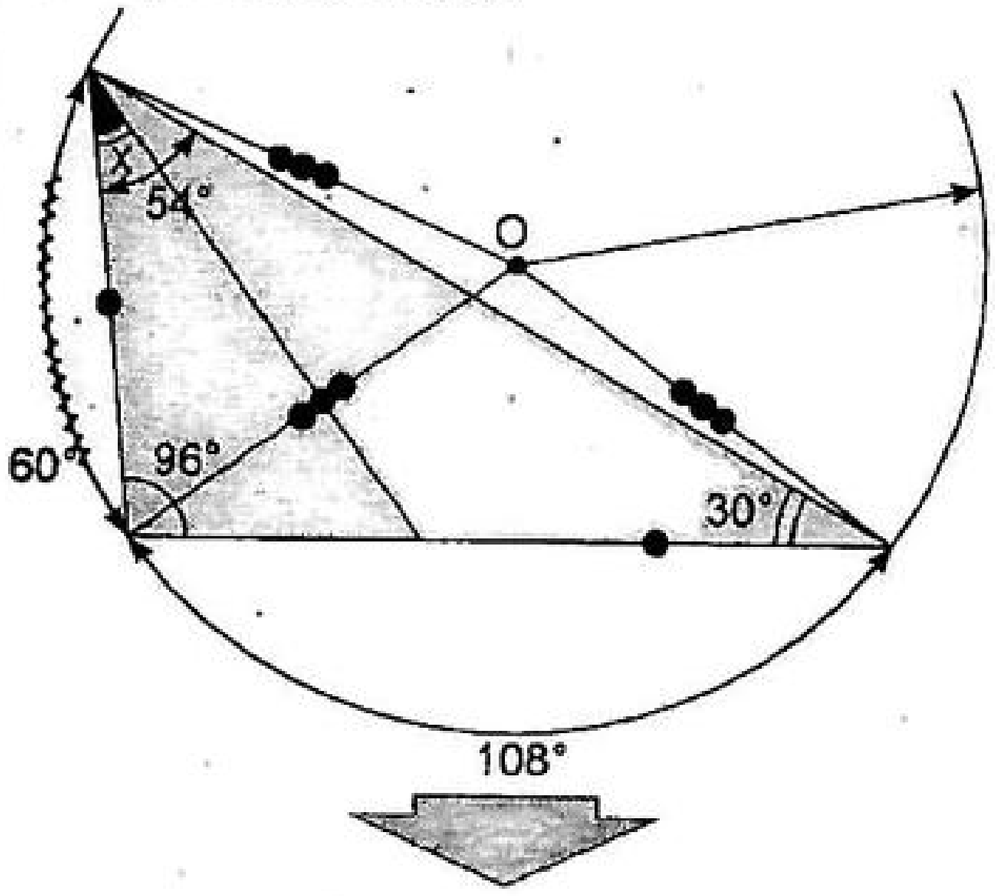
Scanned by CamScanner

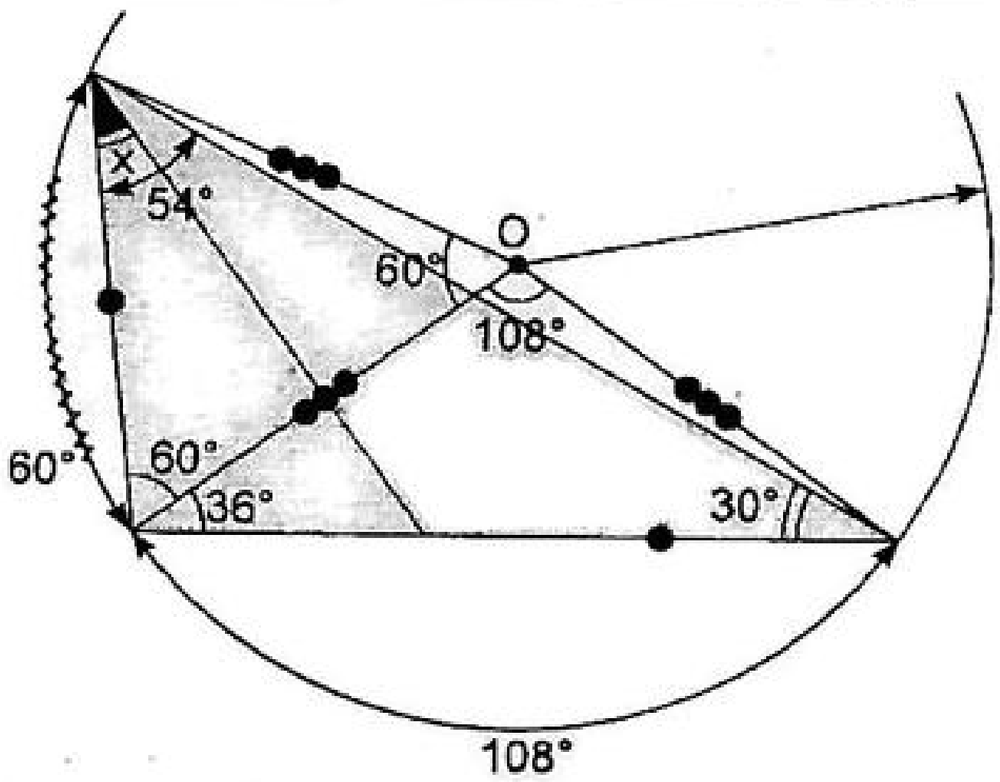
Paso N° 2. Colocamos al triángulo obtusángulo en una circunferencia y ubicamos su circuncentro:



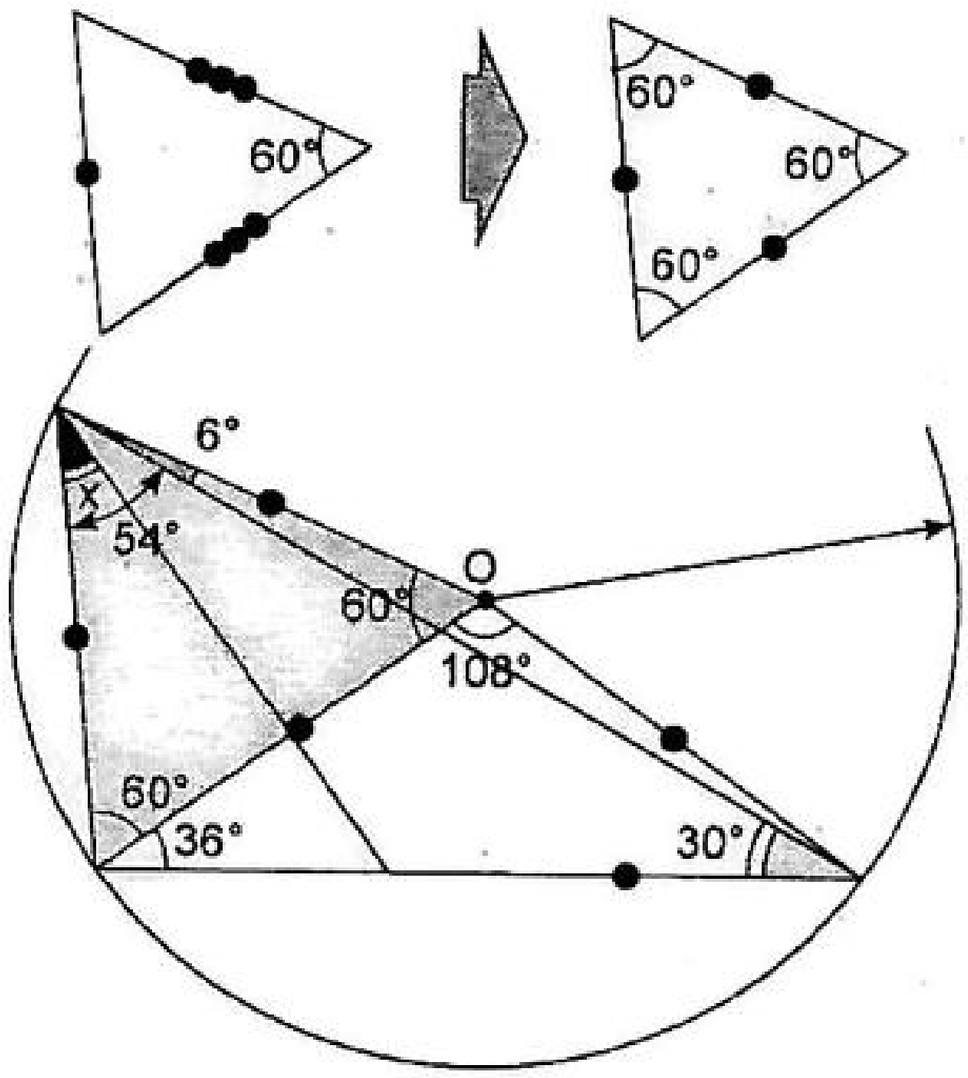


Paso N° 3. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

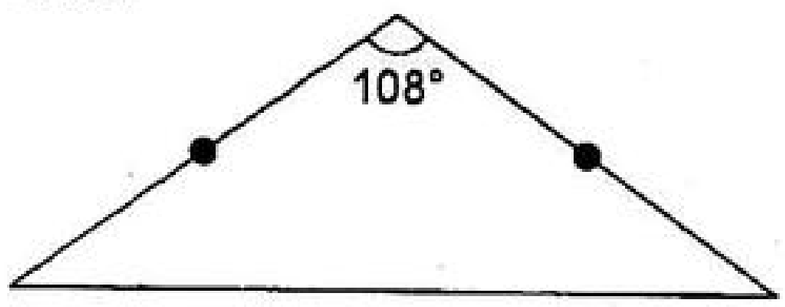


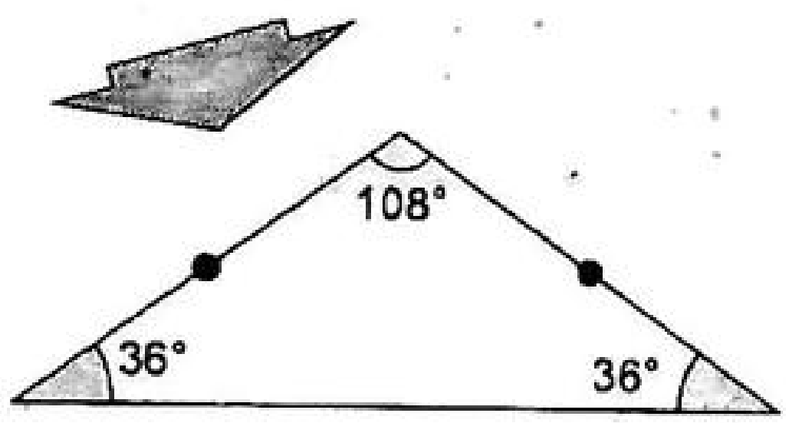


Paso N° 4. Se observa un triángulo equilátero:

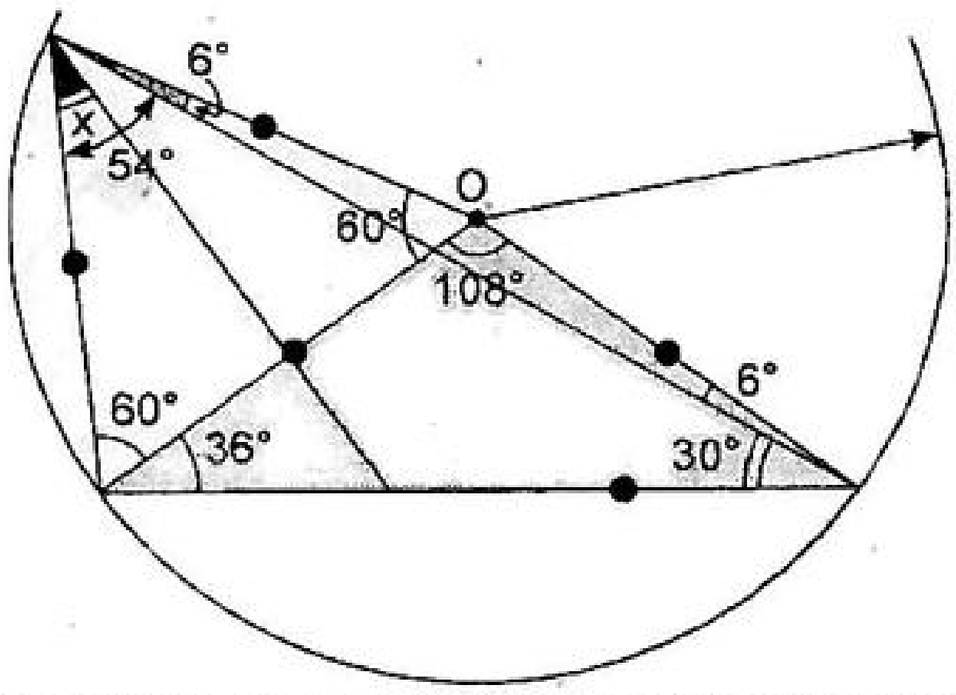


Paso N° 5. También observamos un triángulo isósceles:

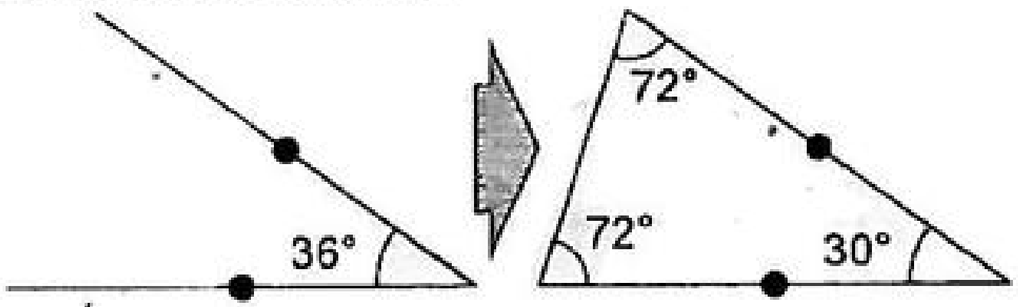


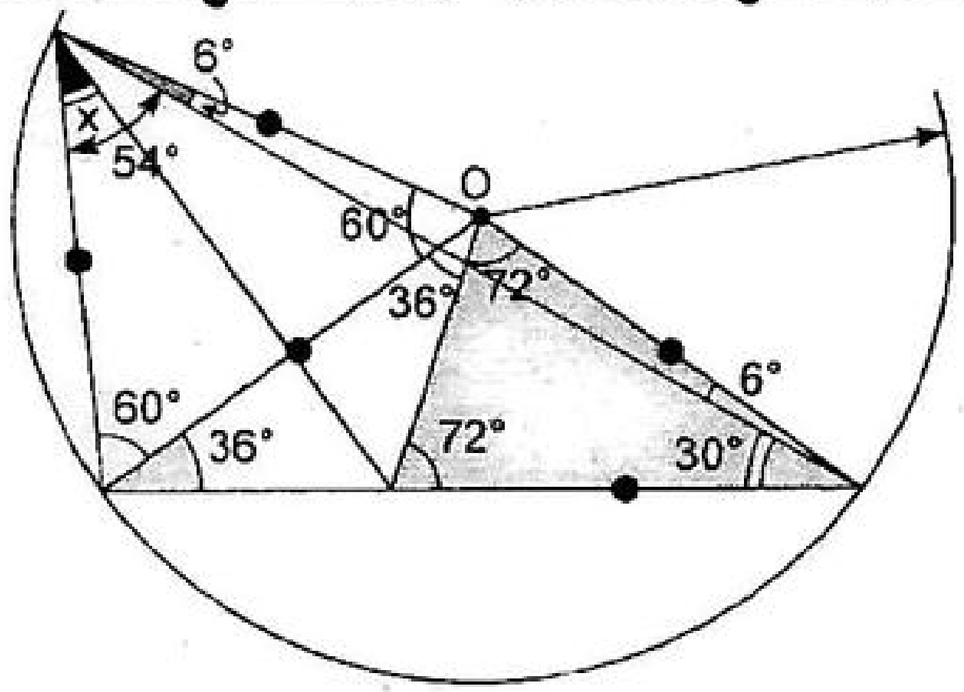


Scanned by CamScanner

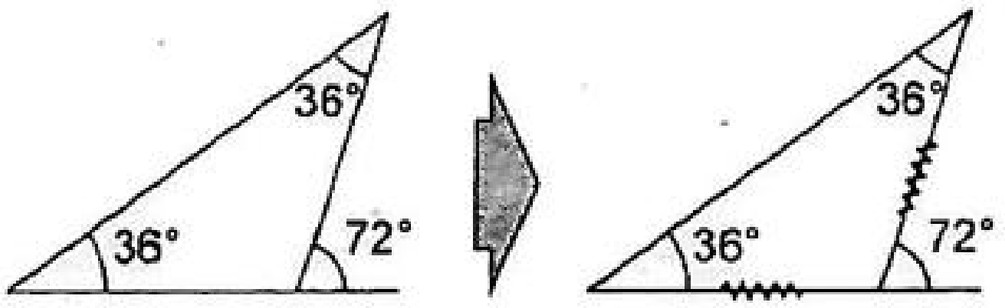


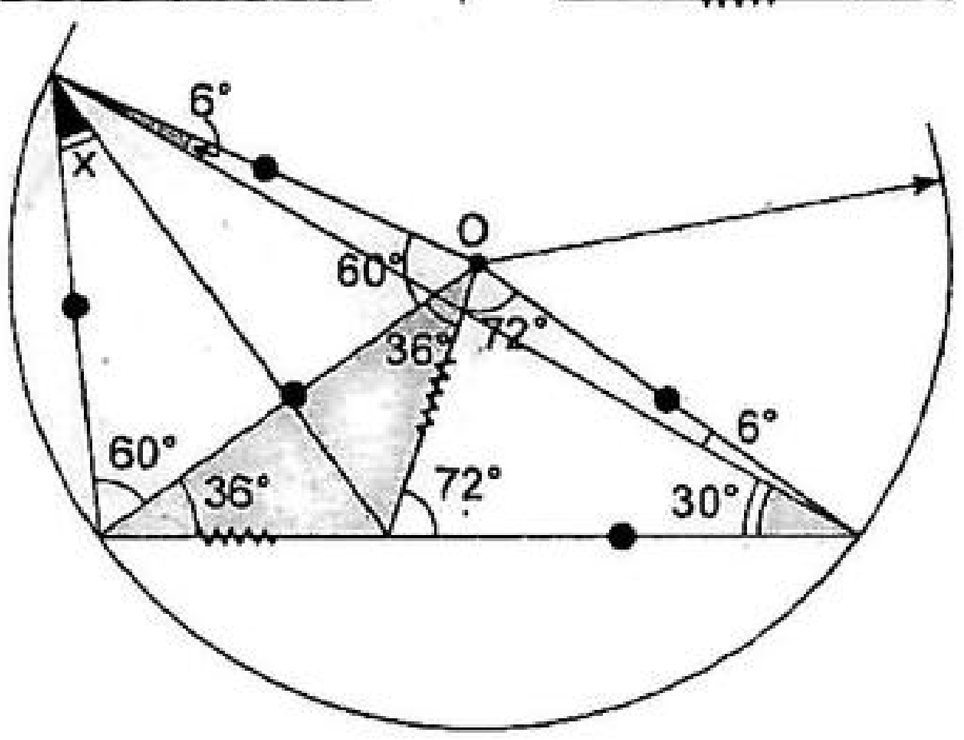
Paso N° 6. Ahora se obtiene un nuevo triángulo isósceles, de la forma:





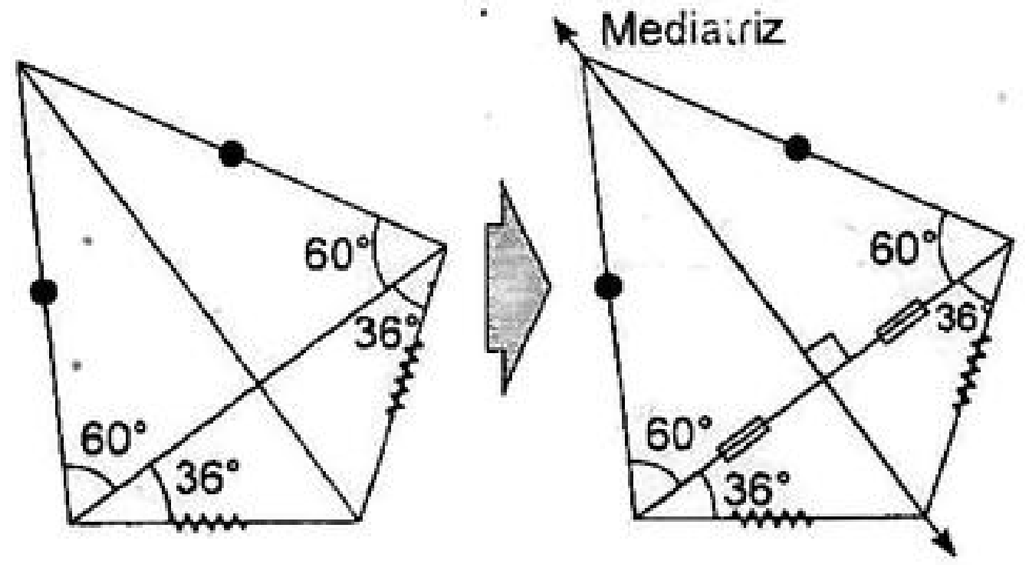
Paso N° 7. Se obtiene la siguiente figura:

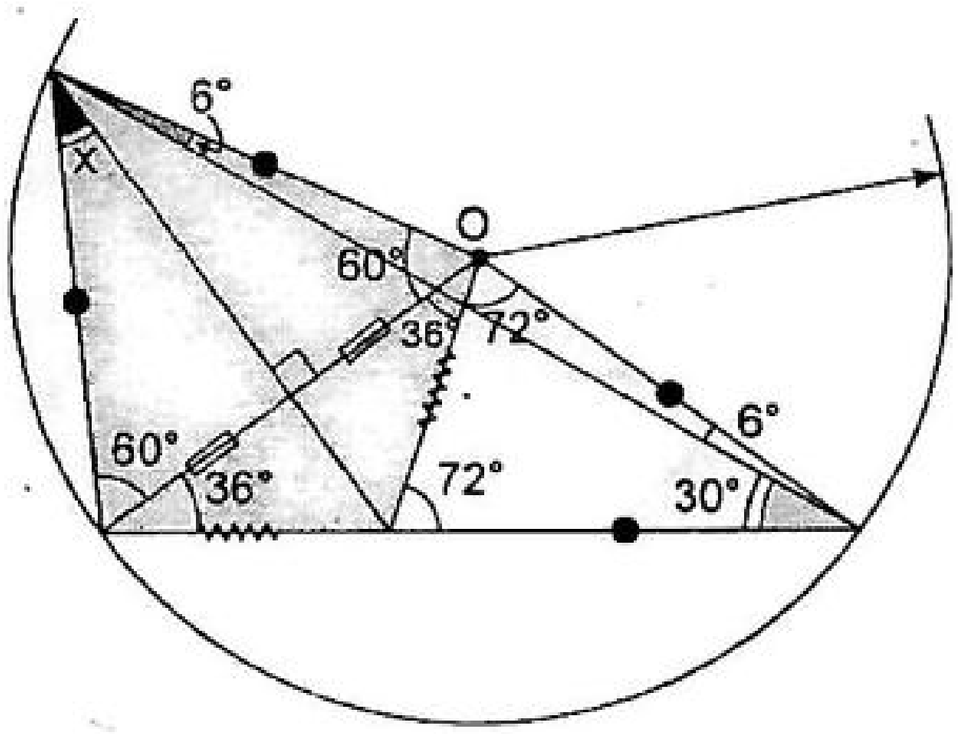




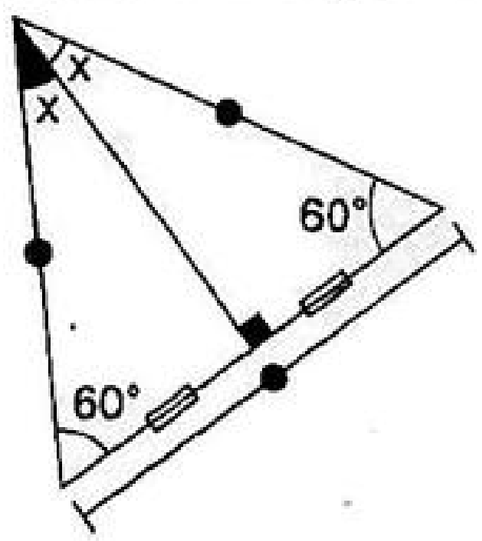
Paso N° 8. Se observa la siguiente figura:

Se obtiene un trapezoide simétrico.



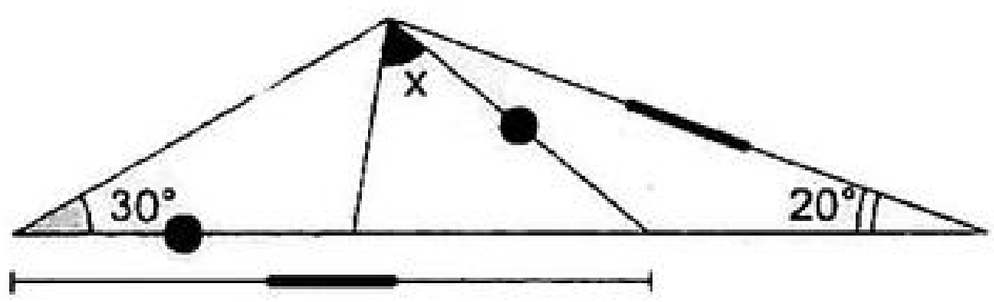


Entonces de la figura se tiene:



$\Rightarrow x = 30°$

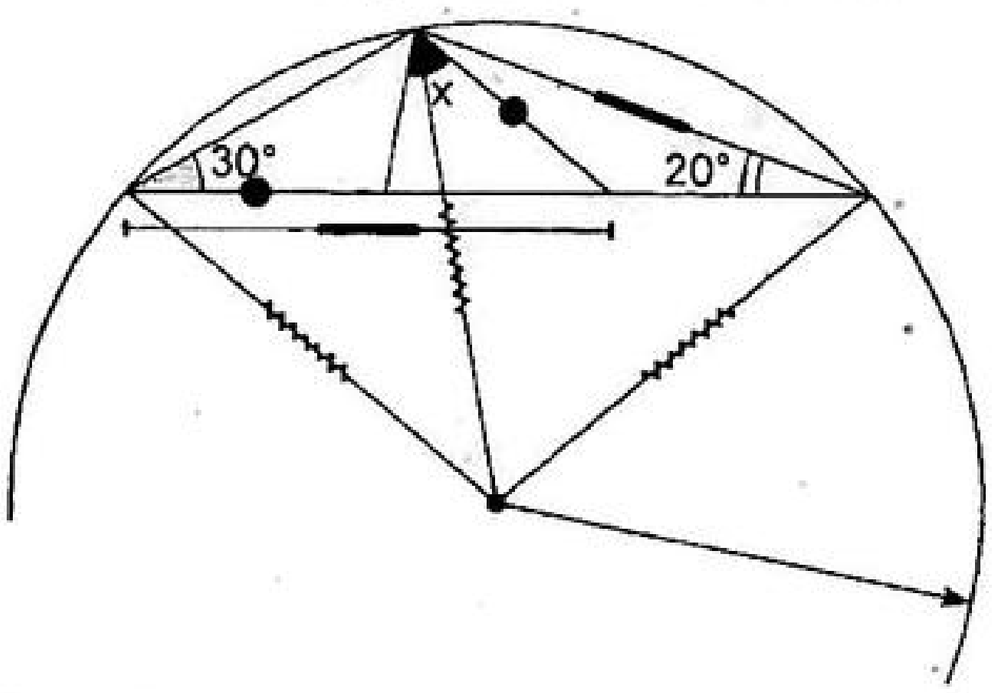
Problema 58. Calcular x.



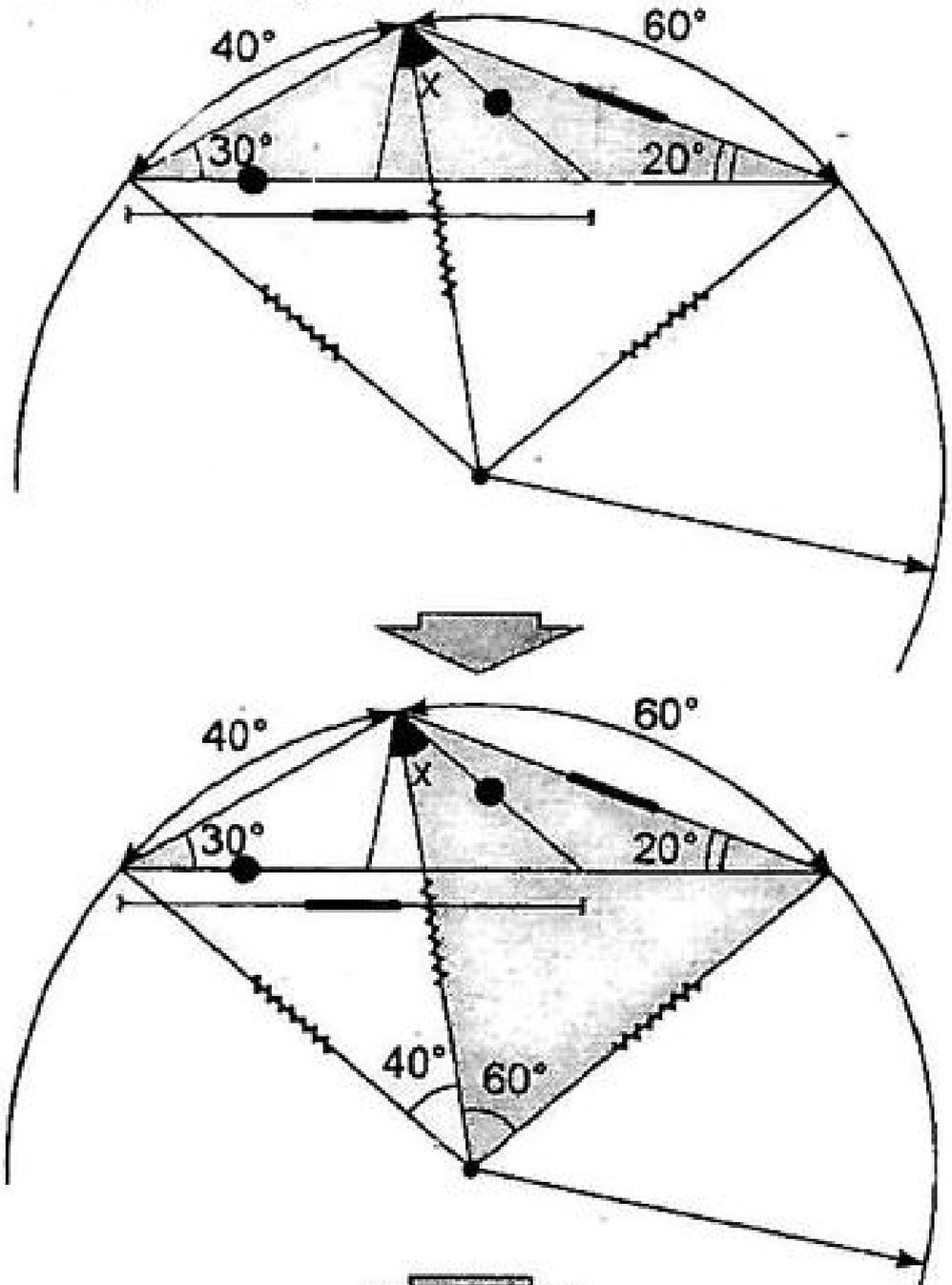
Scanned by CamScanner

Resolución:

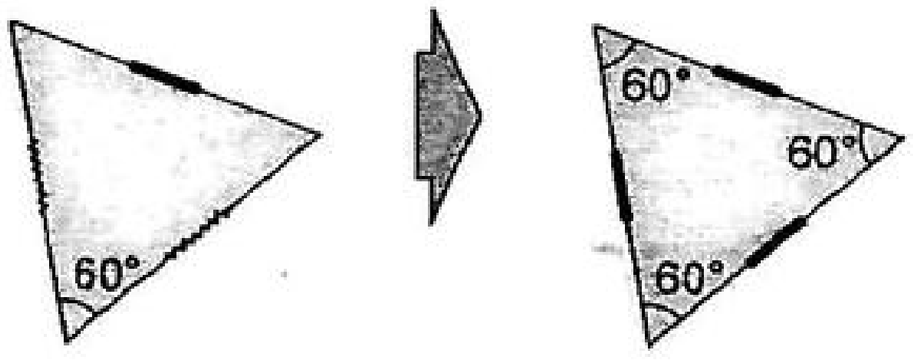
Paso N° 1. Colocamos el triángulo obtusángulo en una circunferencia y ubicamos su circuncentro:

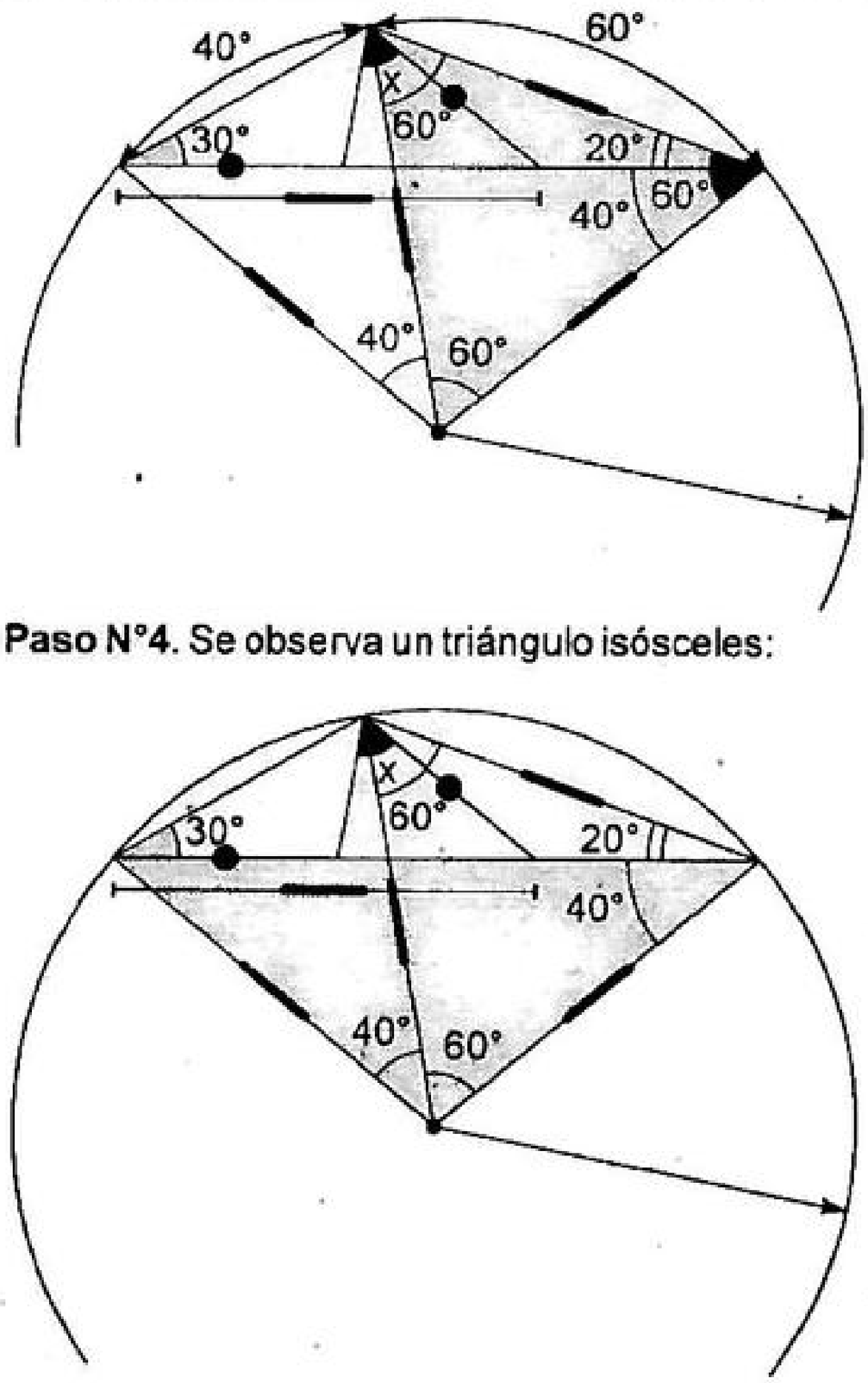


Paso N° 2. Empleamos los ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

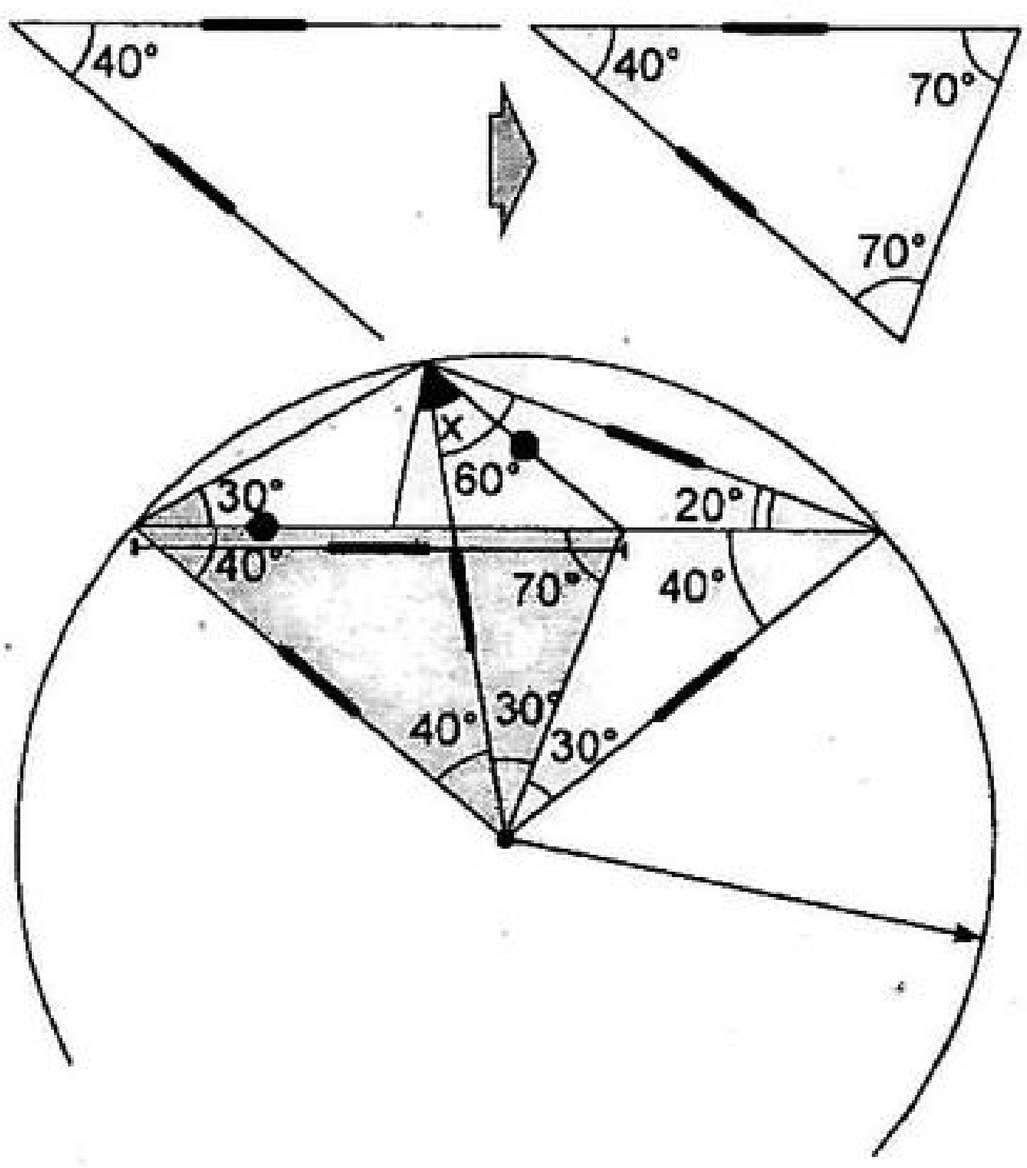


Paso N° 3. Se observa un triángulo equilátero:



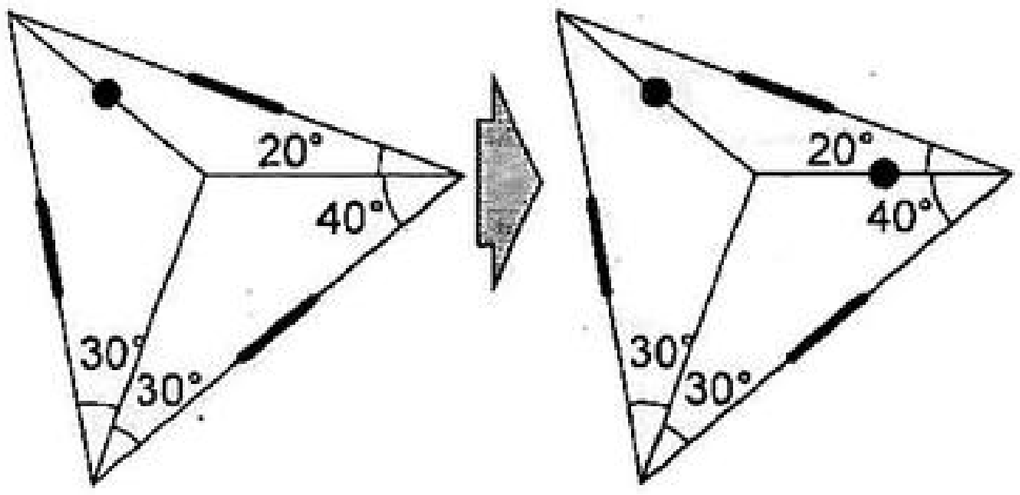


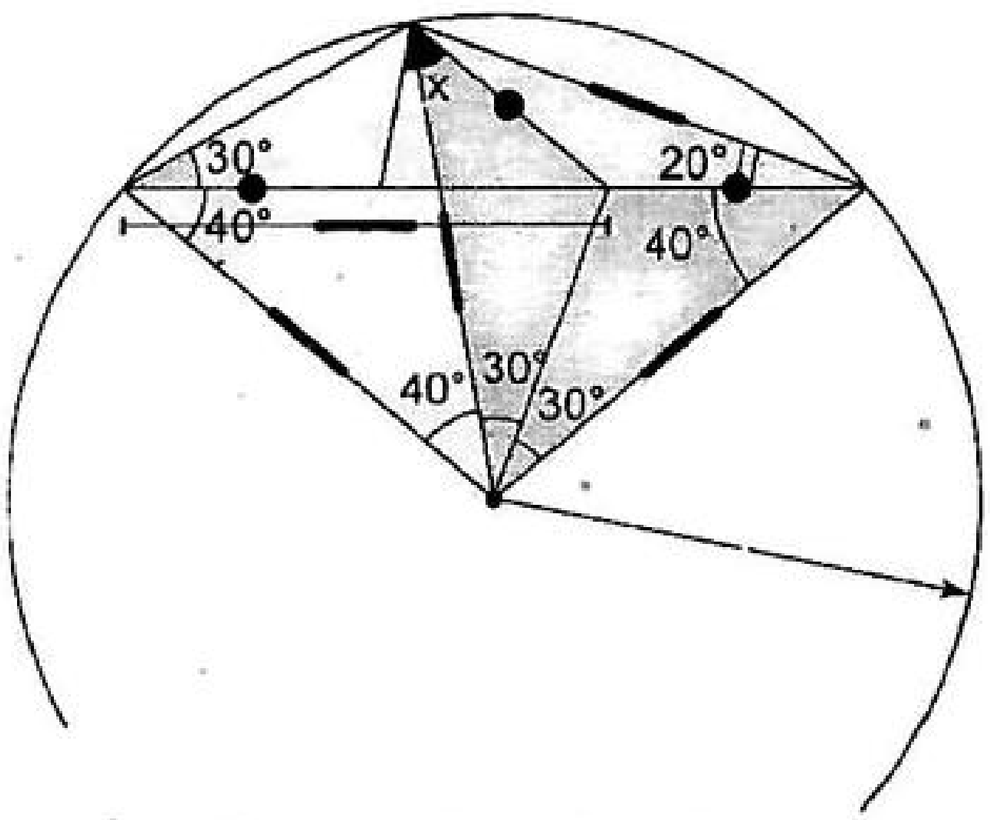
Paso N°4. Se observa un triángulo isósceles:



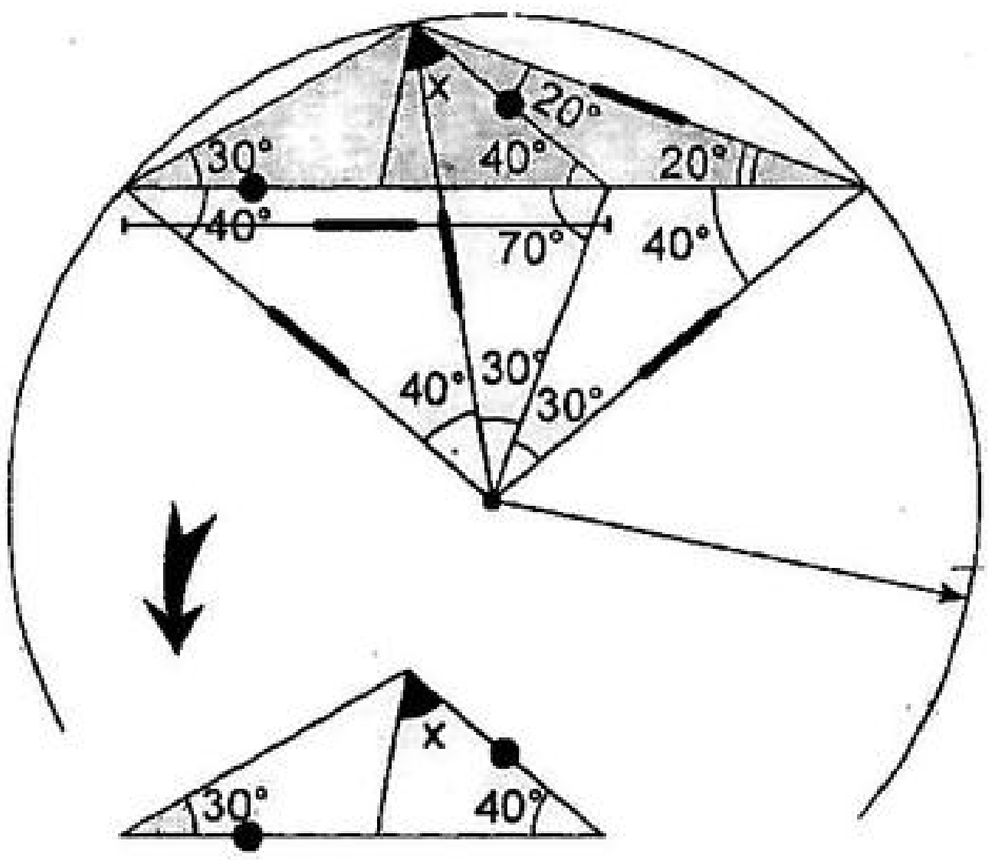
Scanned by CamScanner

Paso N°6. Ahora observamos en el triángulo equilátero, la siguiente propiedad:



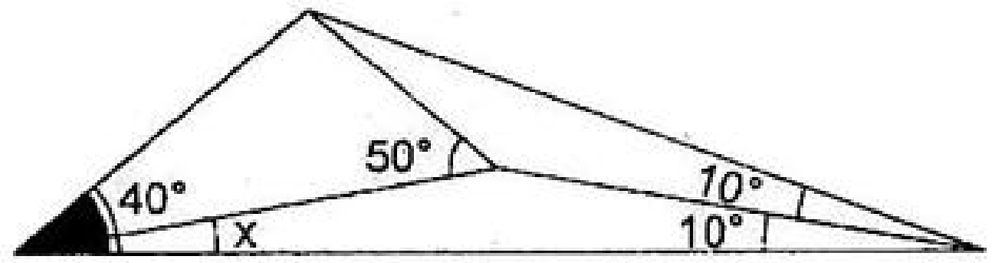


Paso N° 7. Obtenemos la siguiente figura:



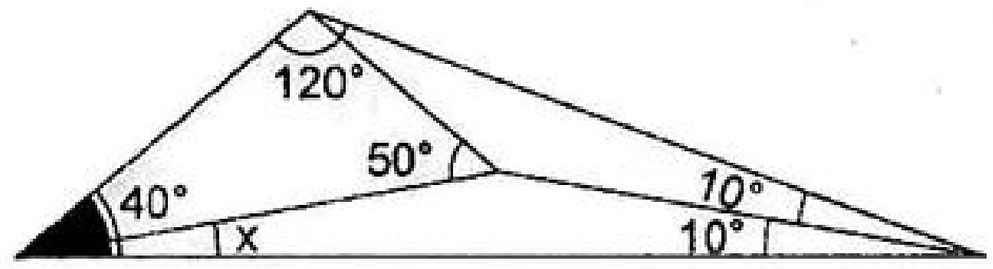
Paso N° 8. La figura obtenida tiene como resolución el problema 53, donde se obtiene $x = 60°$

Problema 59. Calcular x.

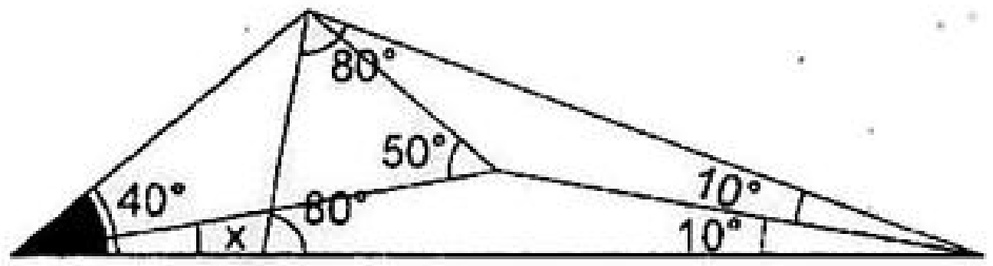


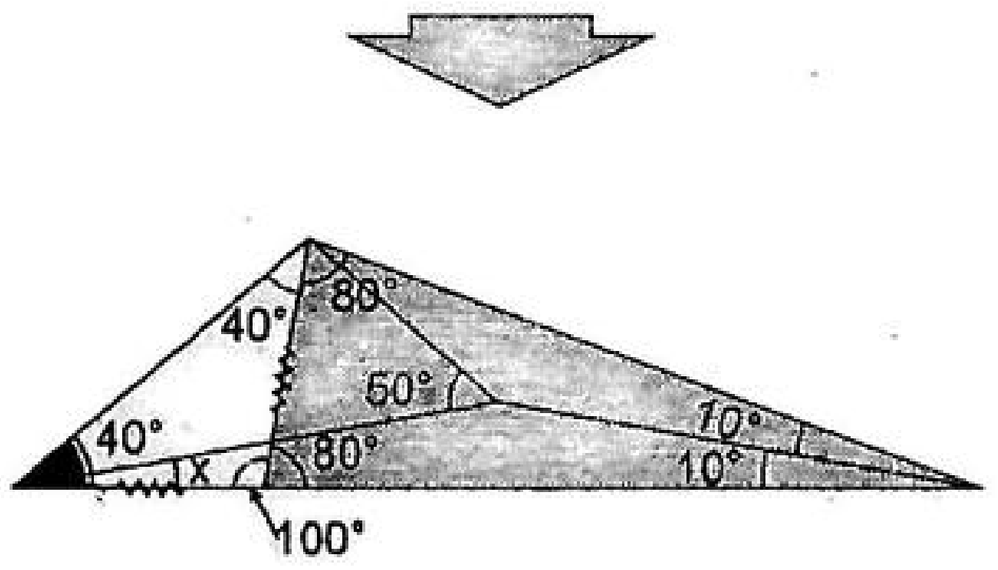
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:

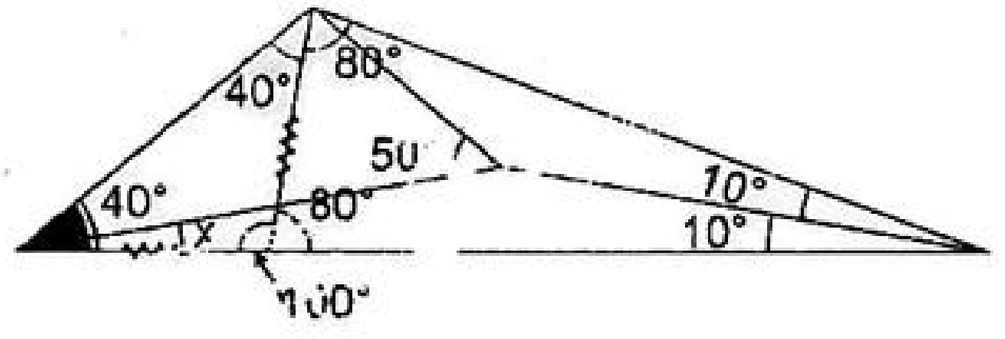


Paso N° 2. Buscamos triángulos isósceles en la figura, de la siguiente manera:



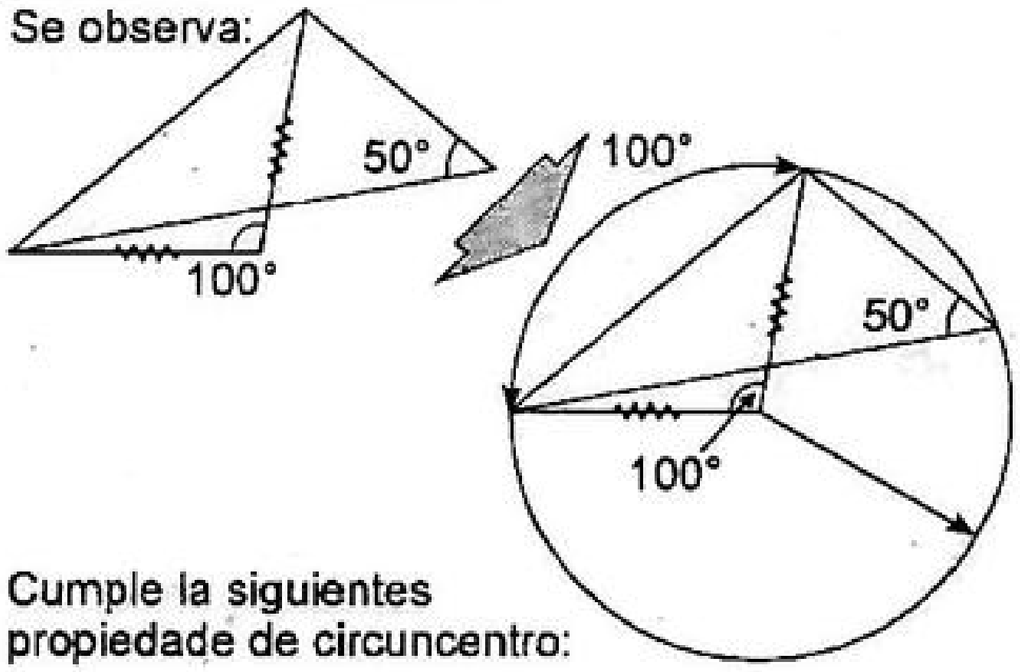


Paso N° 3. Observamos la siguiente figura con la siguiente característica:

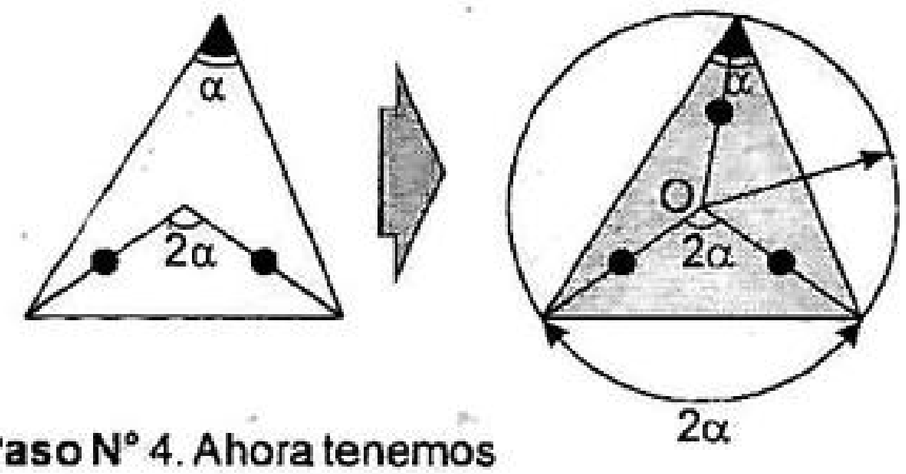


Scanned by CamScanner

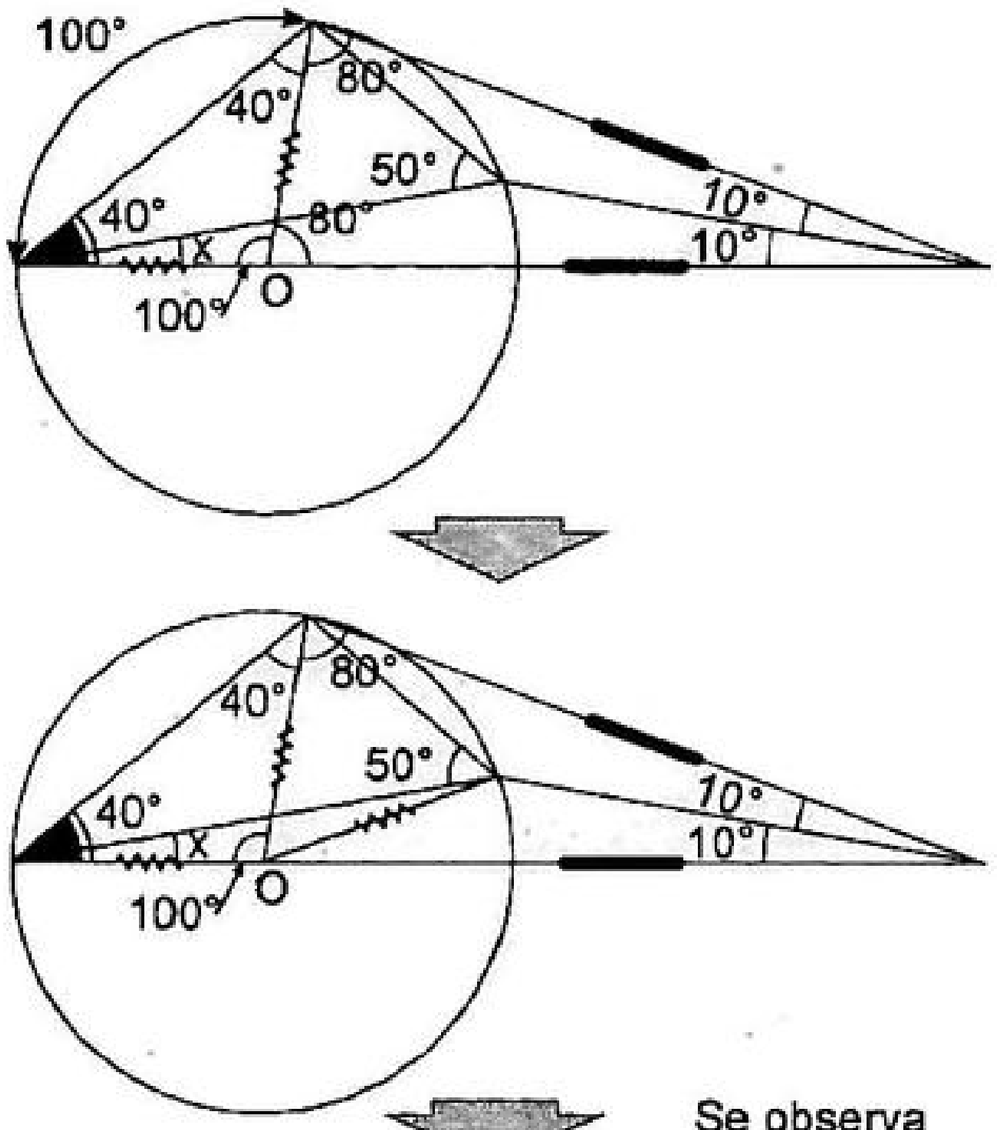
Se observa:

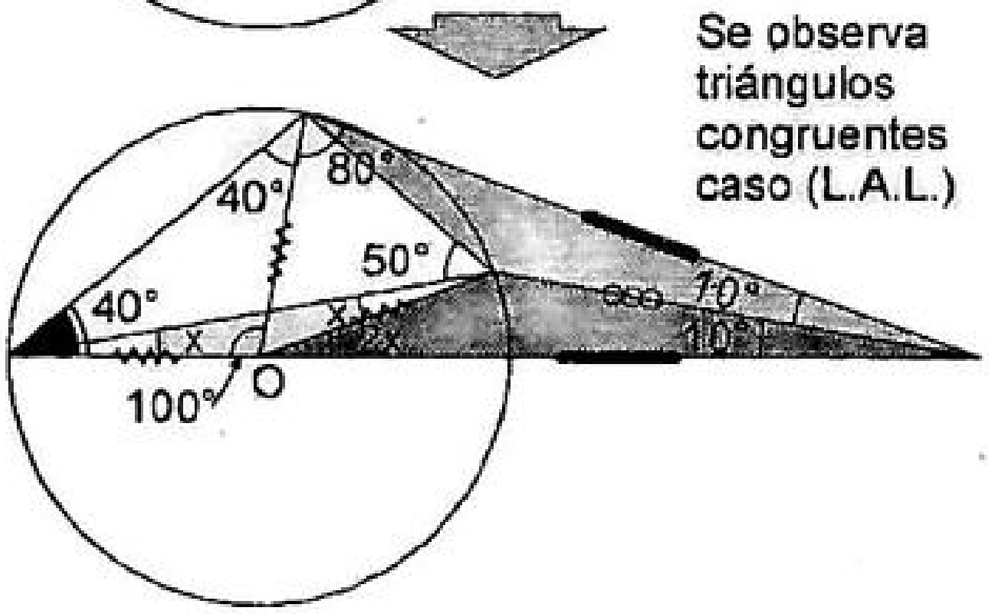


Cumple la siguientes propiedade de circuncentro:

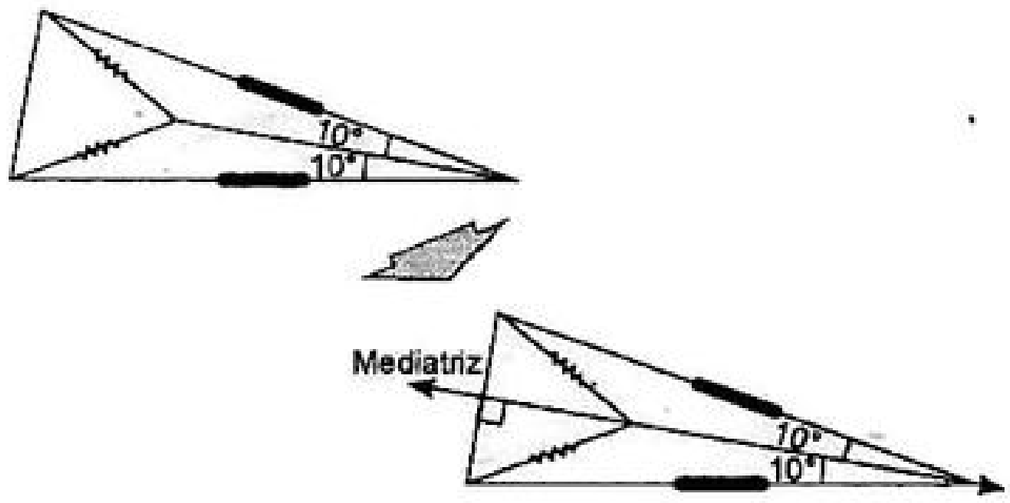


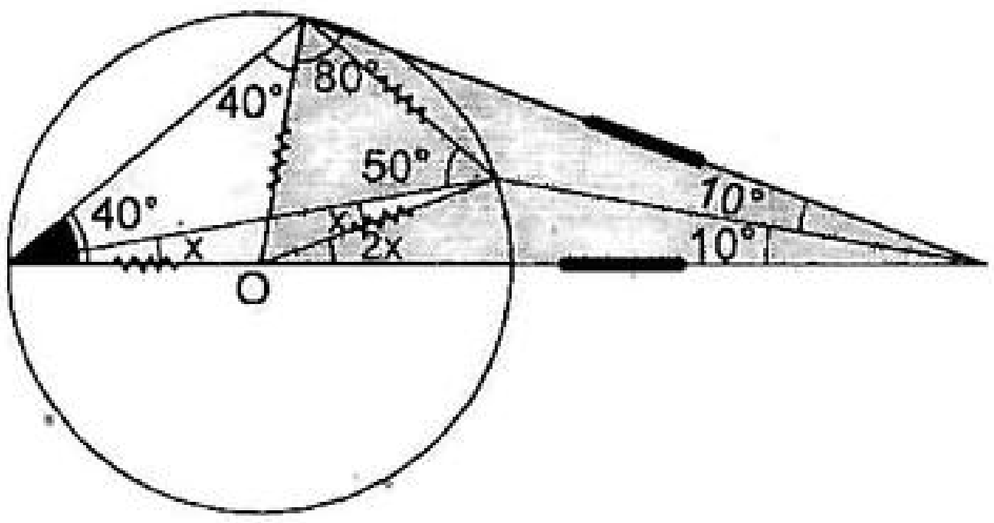
Paso N° 4. Ahora tenemos



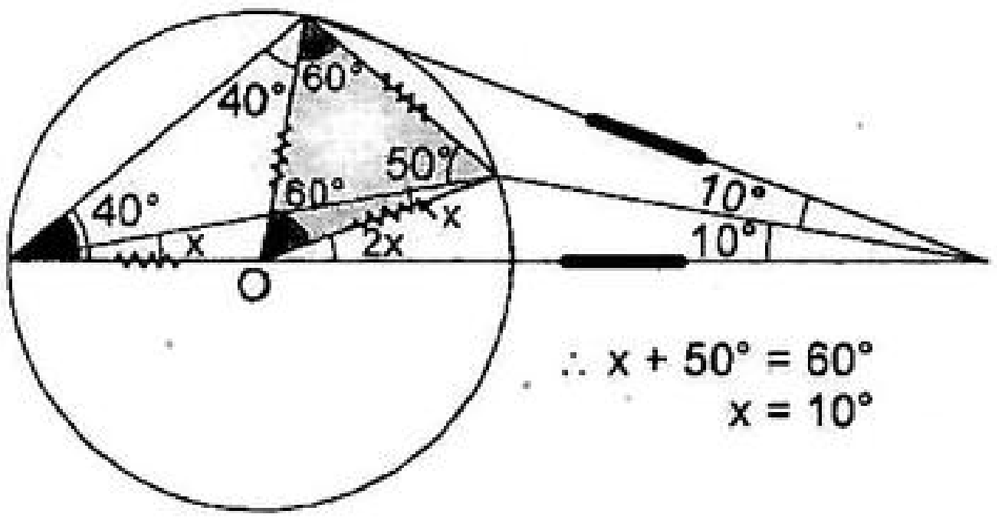


Paso N° 5. Ahora tenemos un triángulo isósceles de la forma y donde cumple:





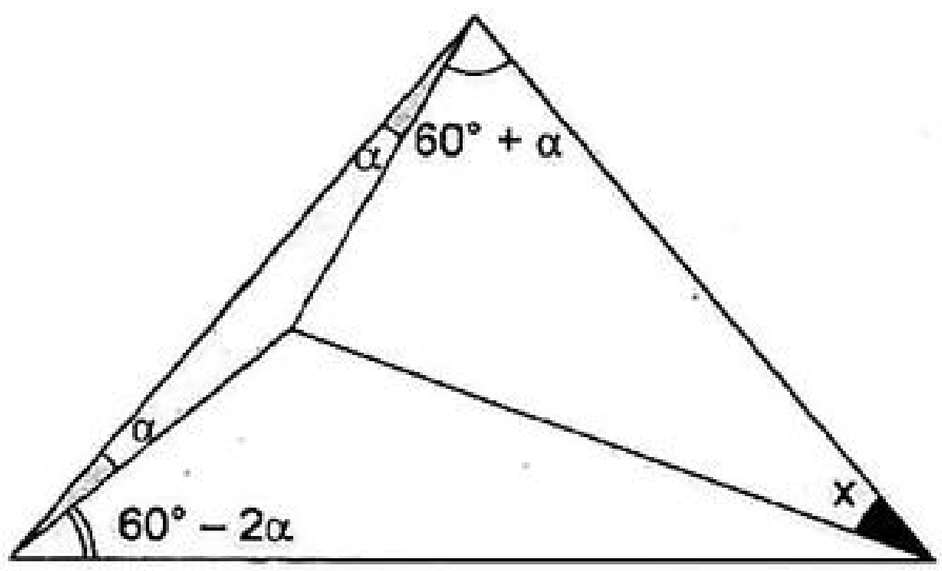
Paso N° 6. Ahora se tiene un triángulo equilátero (tres lados iguales):



$\therefore x + 50° = 60°$

$x = 10°$

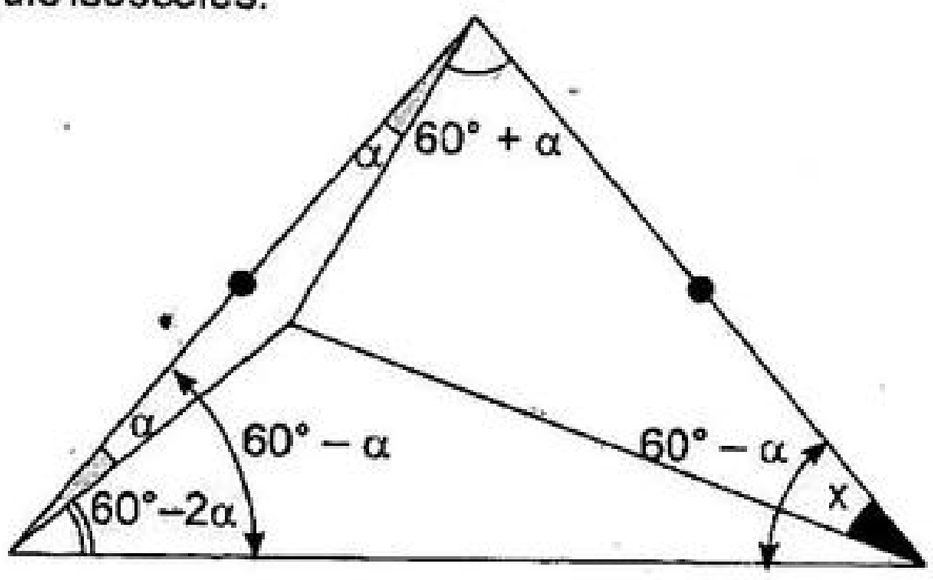
Problema 60. Calcular x.



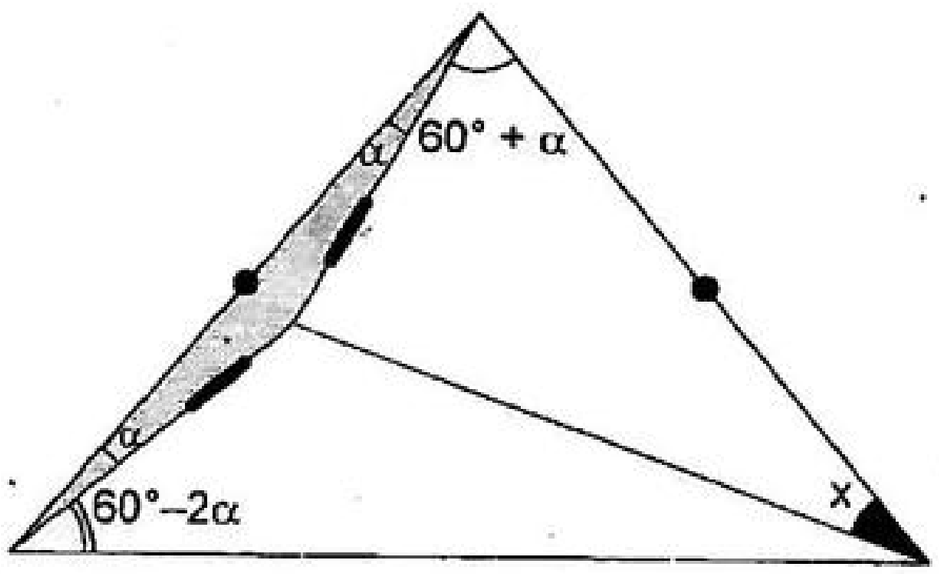
Scanned by CamScanner

Resolución:

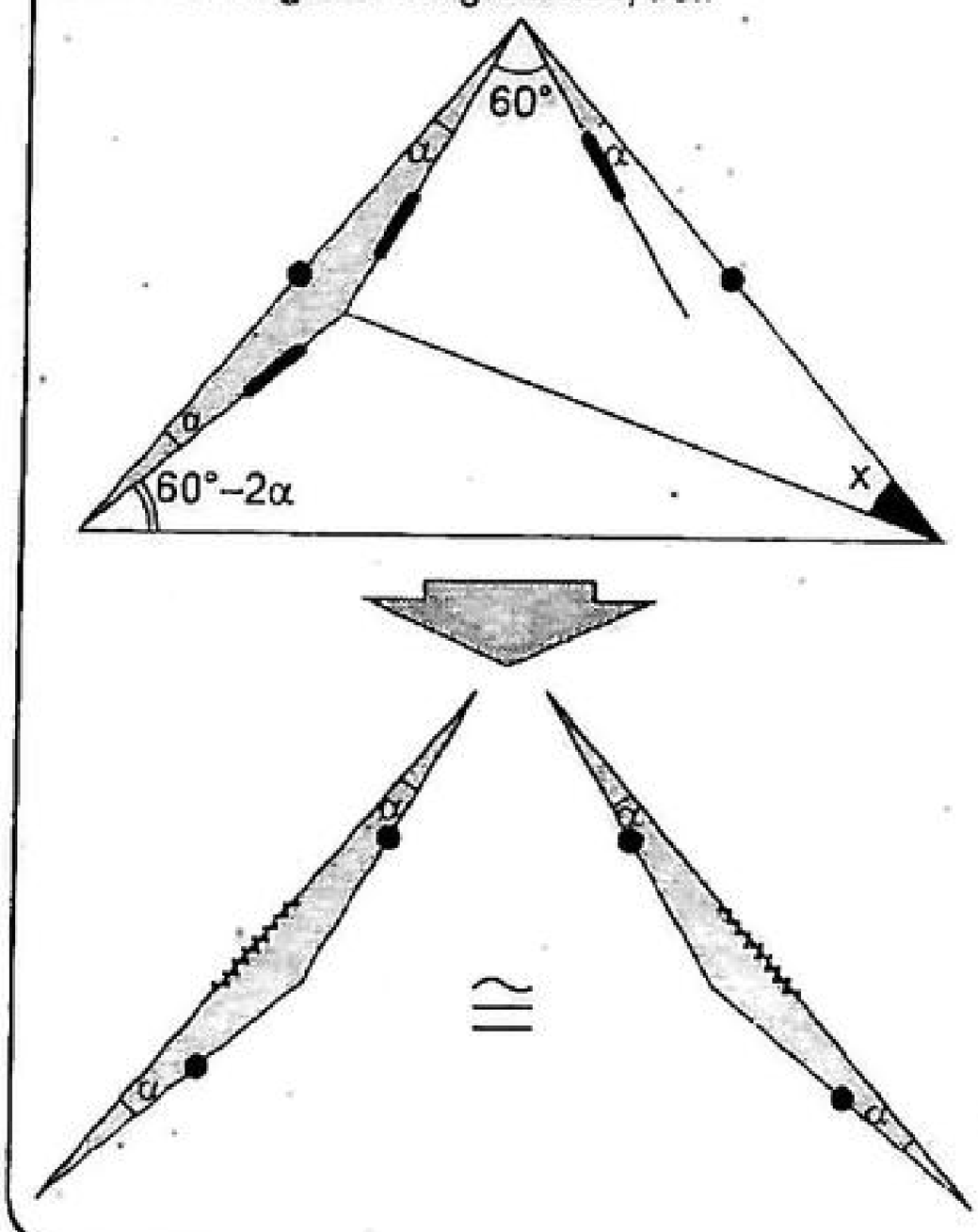
Paso N° 1. Observamos que la figura es un triángulo isósceles:

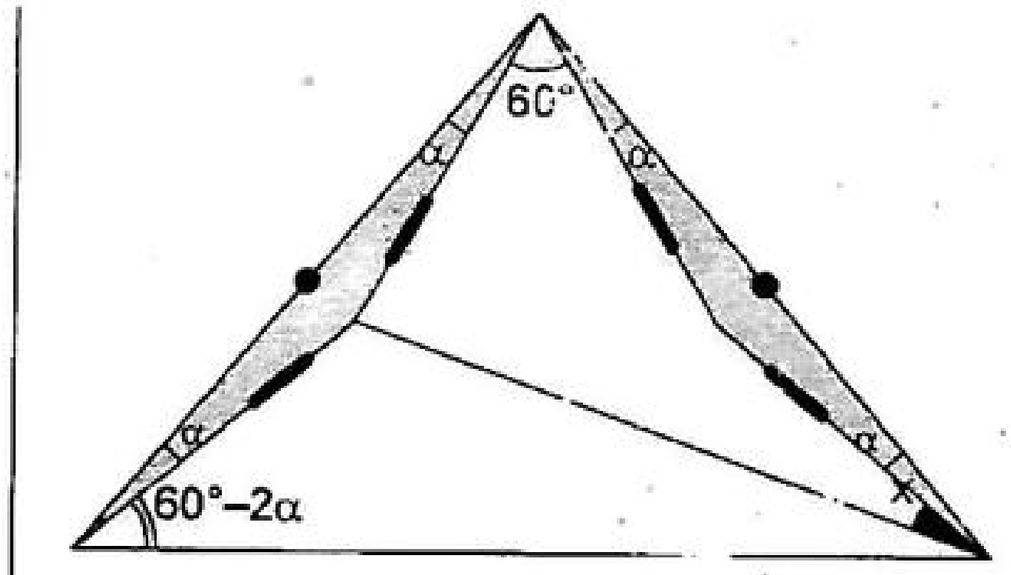


Paso N° 2. Ahora tenemos la siguiente figura:

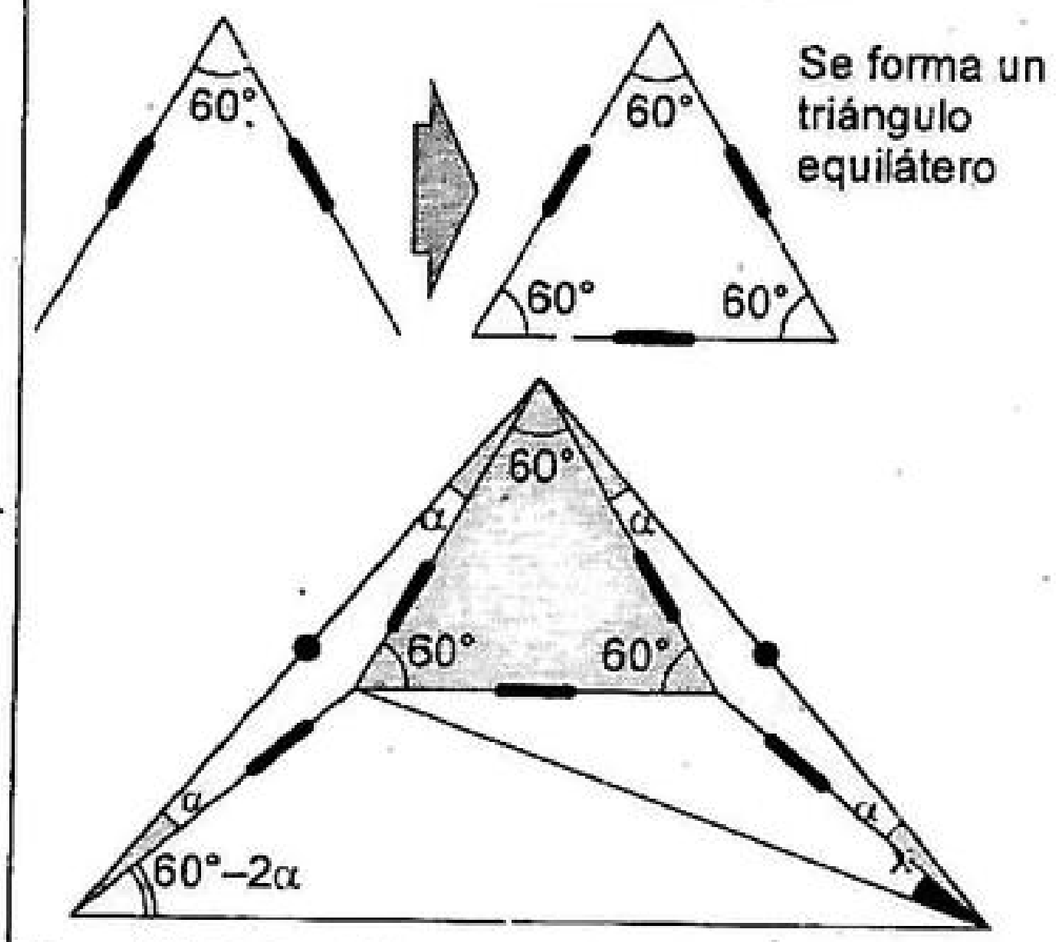


Paso N° 3. Realizamos el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes, así:

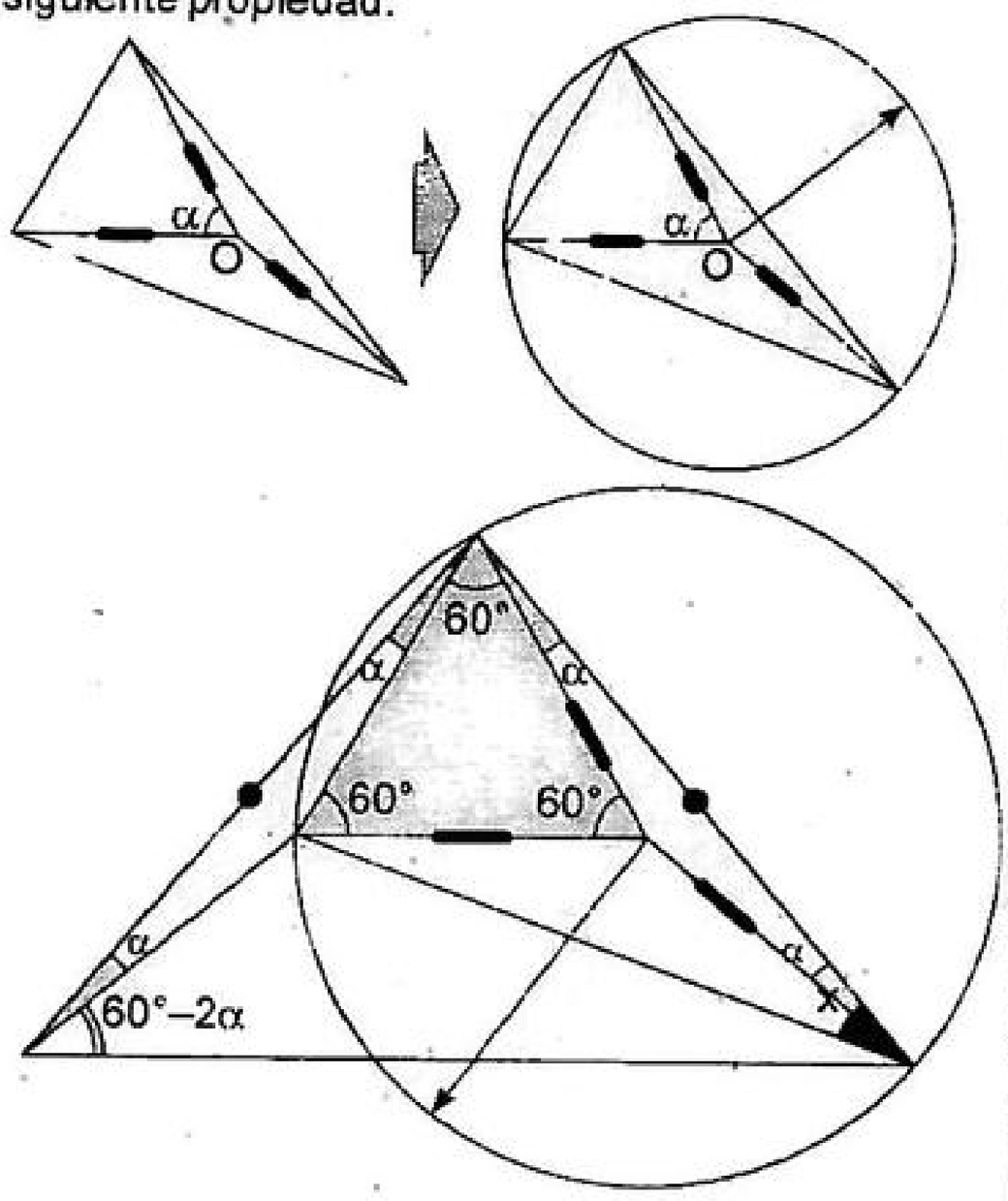




Paso N° 4. Se observa la siguiente figura:

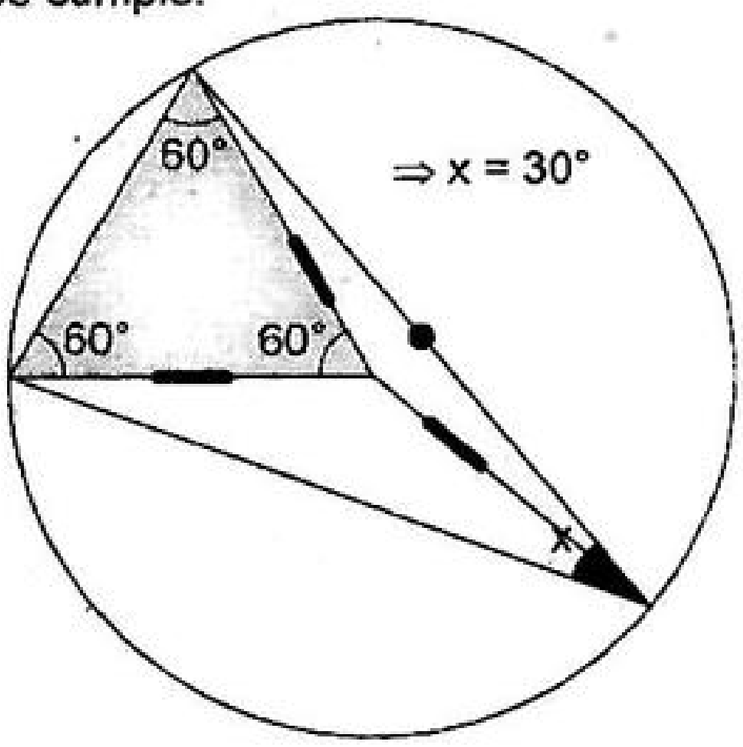


Paso N° 5. Se obtiene una figura donde cumple la siguiente propiedad:

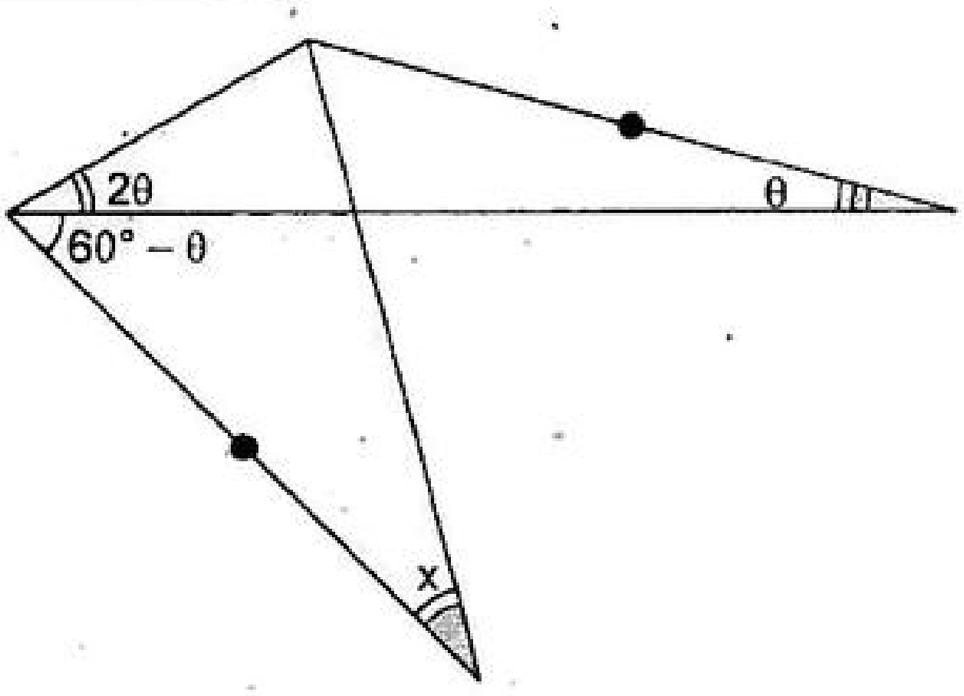


Scanned by CamScanner

Aquí se cumple:

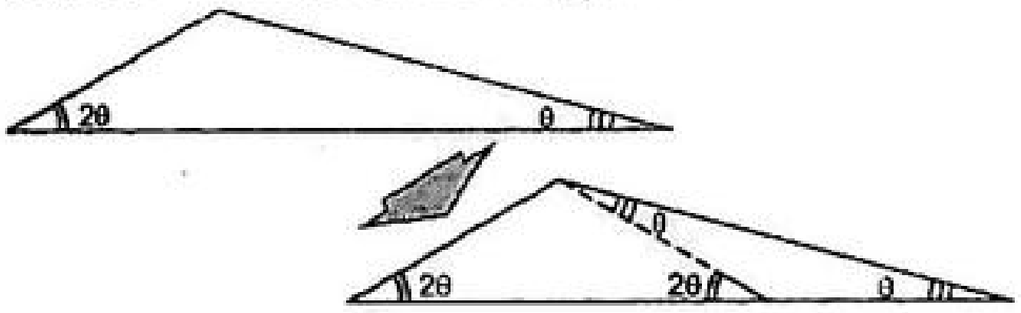


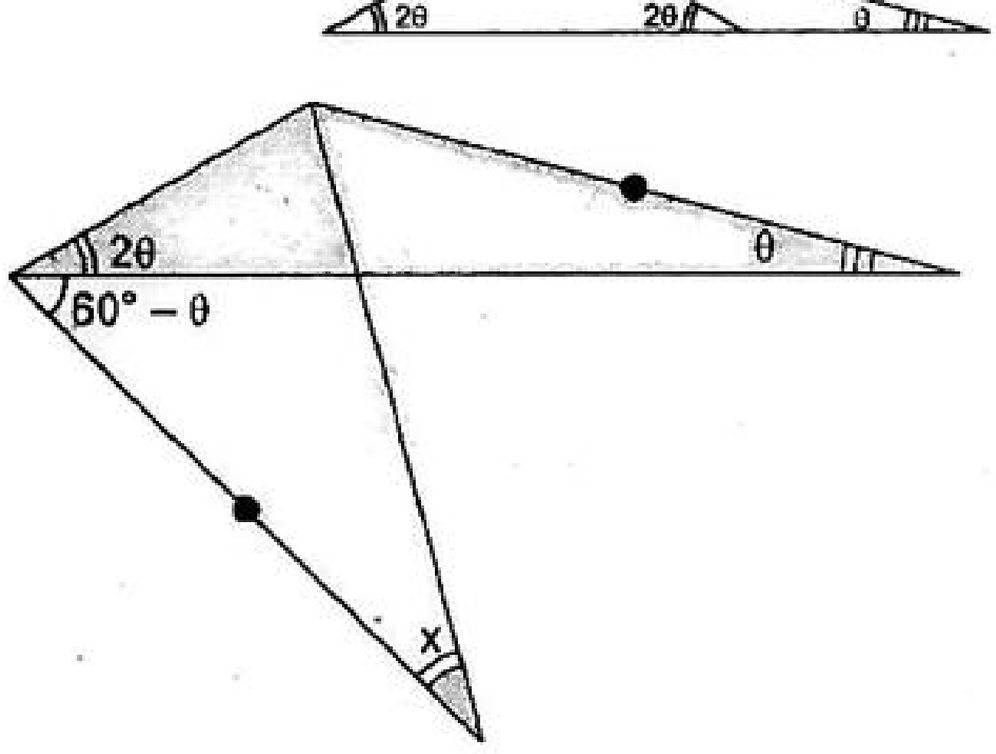
Problema 61. Calcular x.



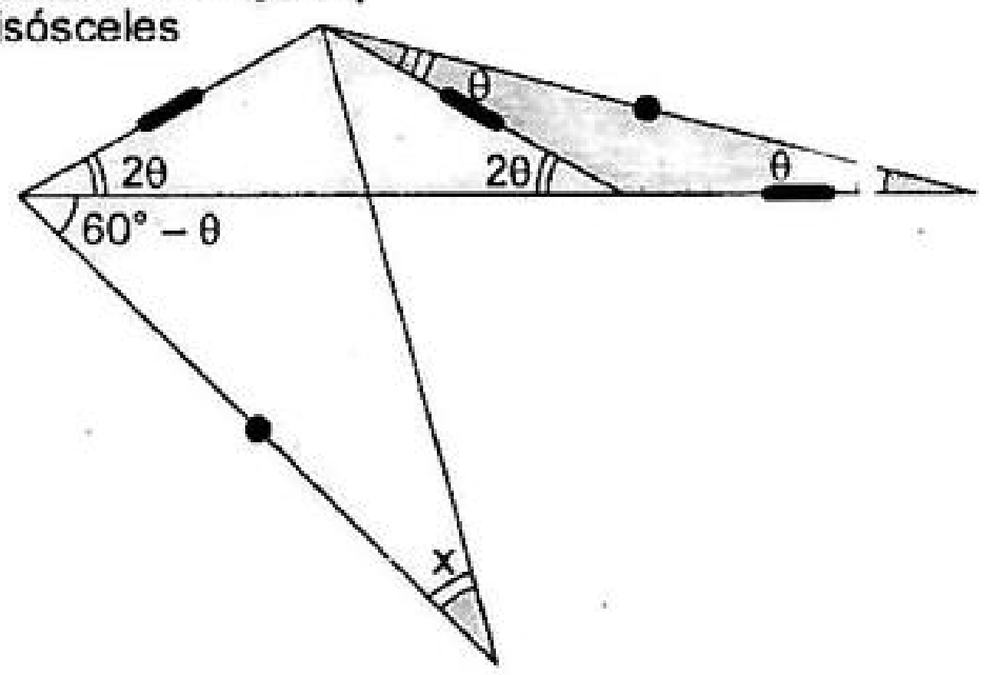
Resolución:

Paso N° 1. Observamos la figura:

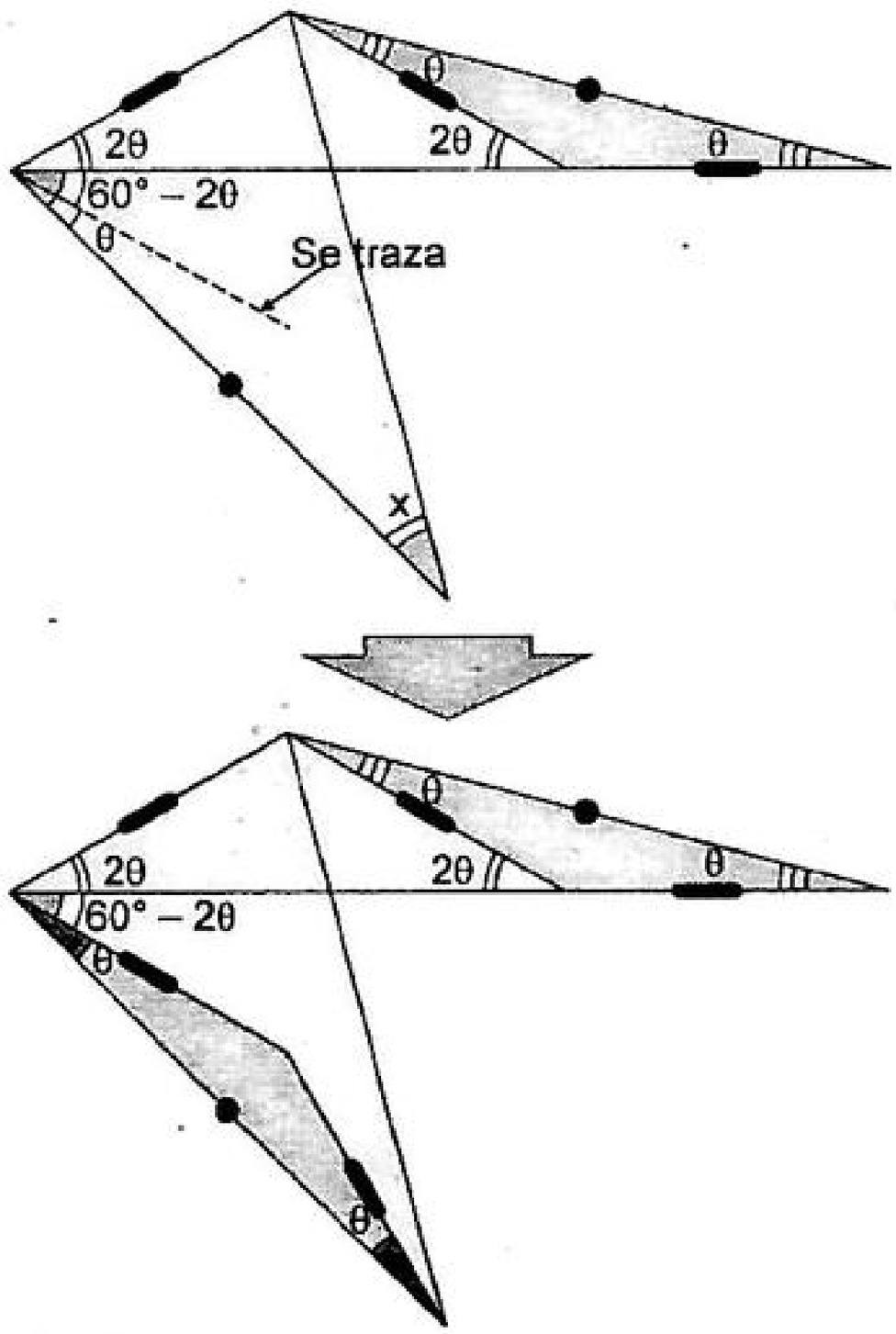




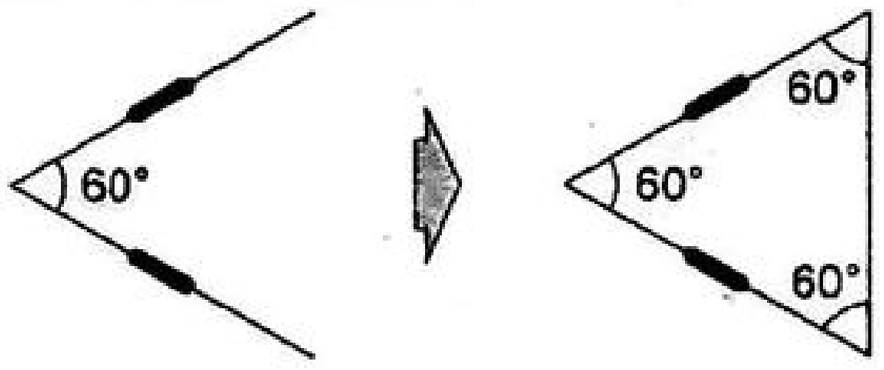
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles



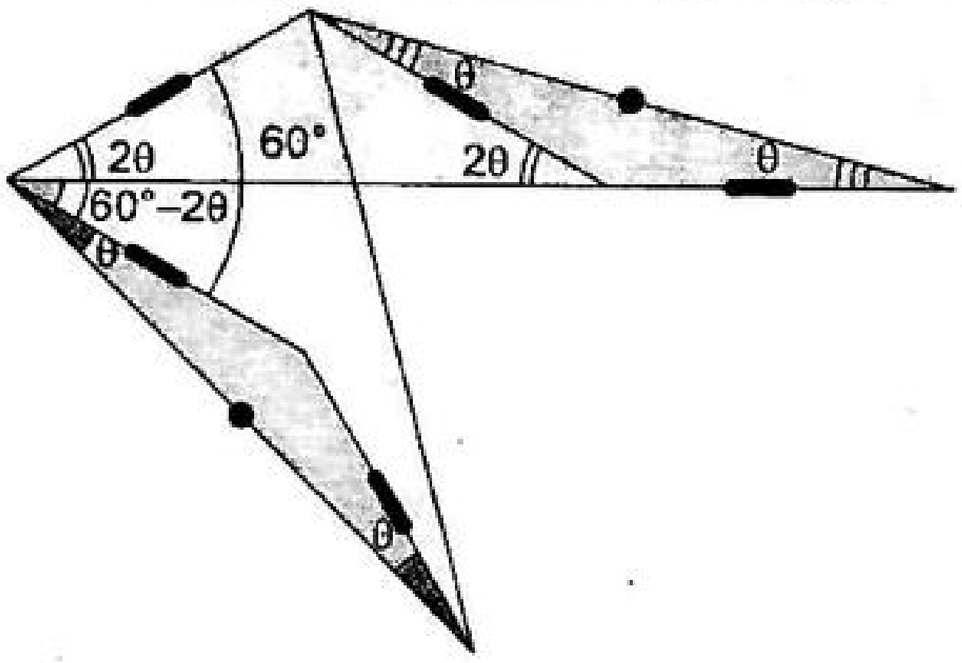
Paso N° 2. Ahora, buscamos triángulos congruentes, así:

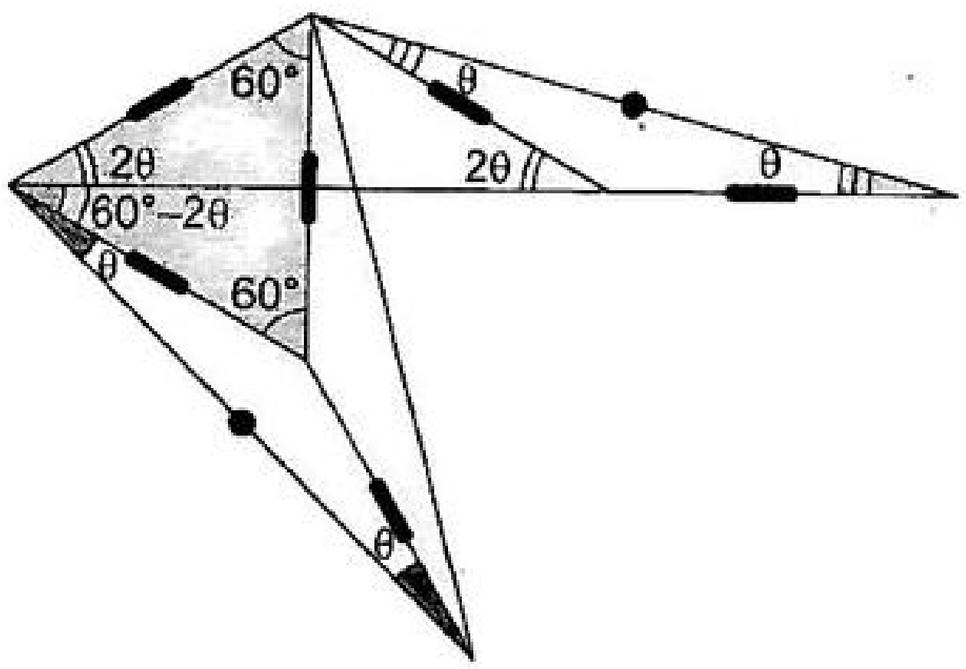


Paso N° 3. Ahora tenemos:

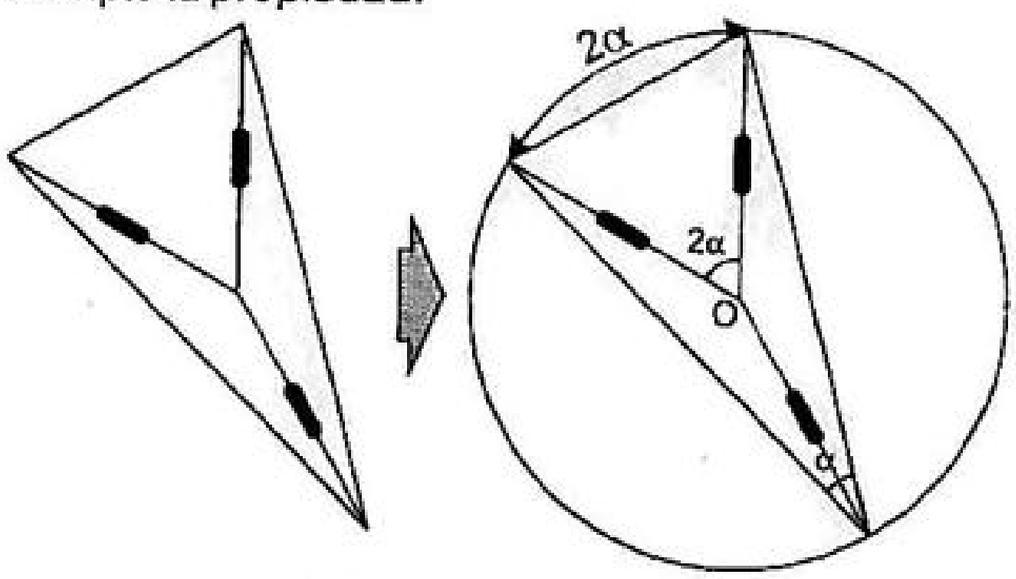


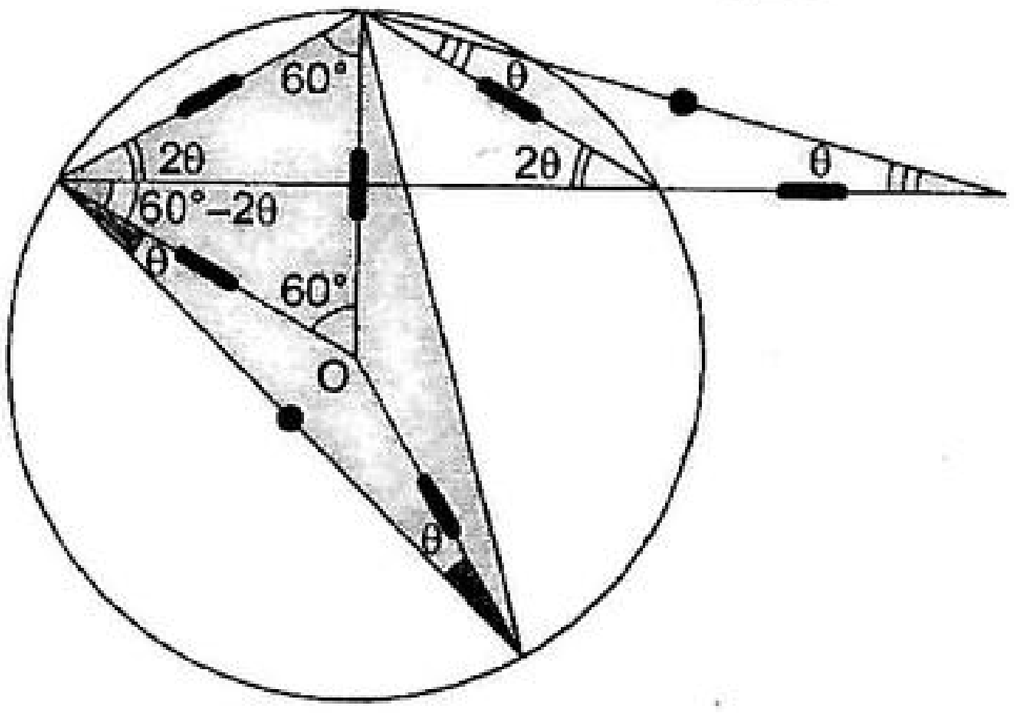
Scanned by CamScanner

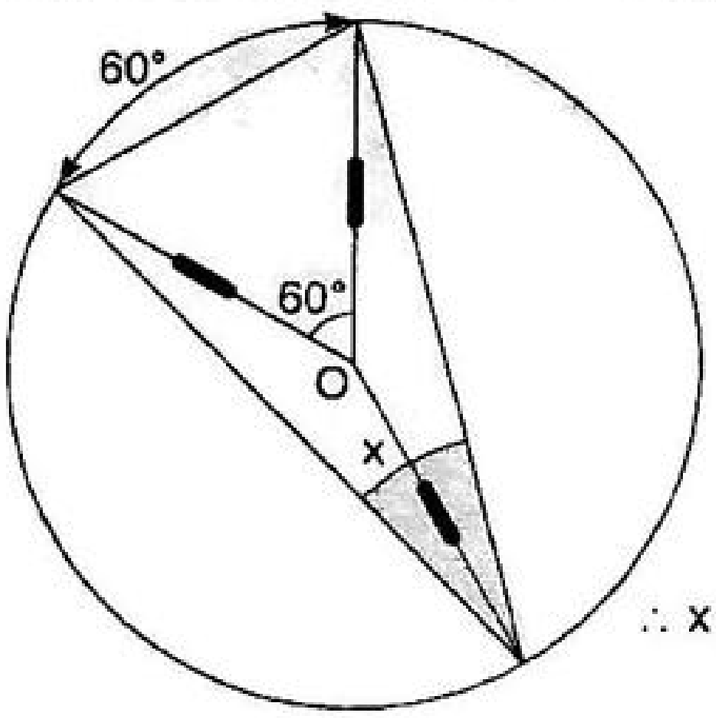




Paso N° 4. Observemos la siguiente figura donde cumple la propiedad:

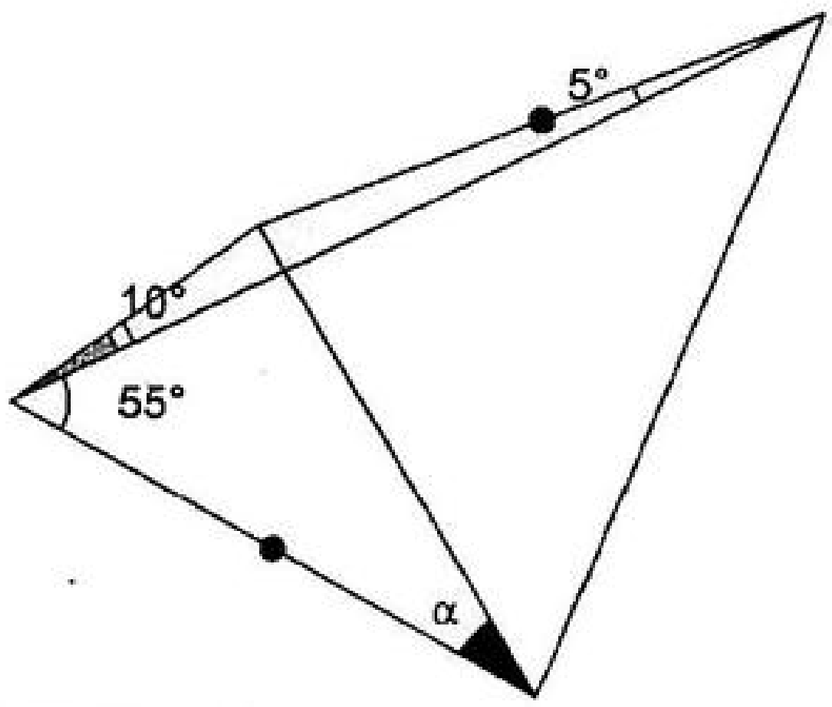






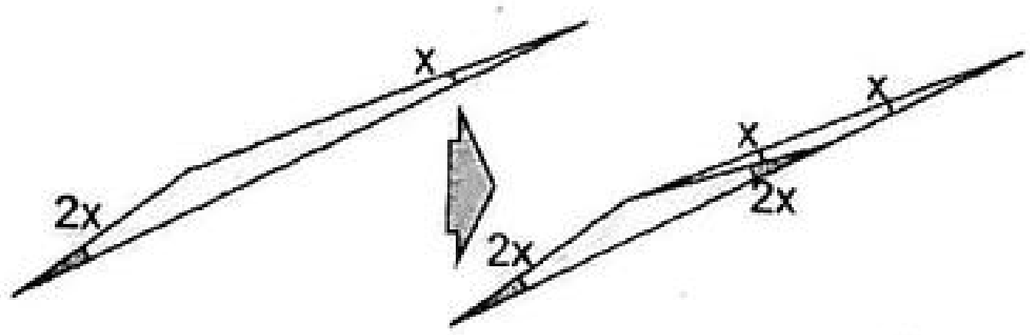
$\therefore x = 30°$

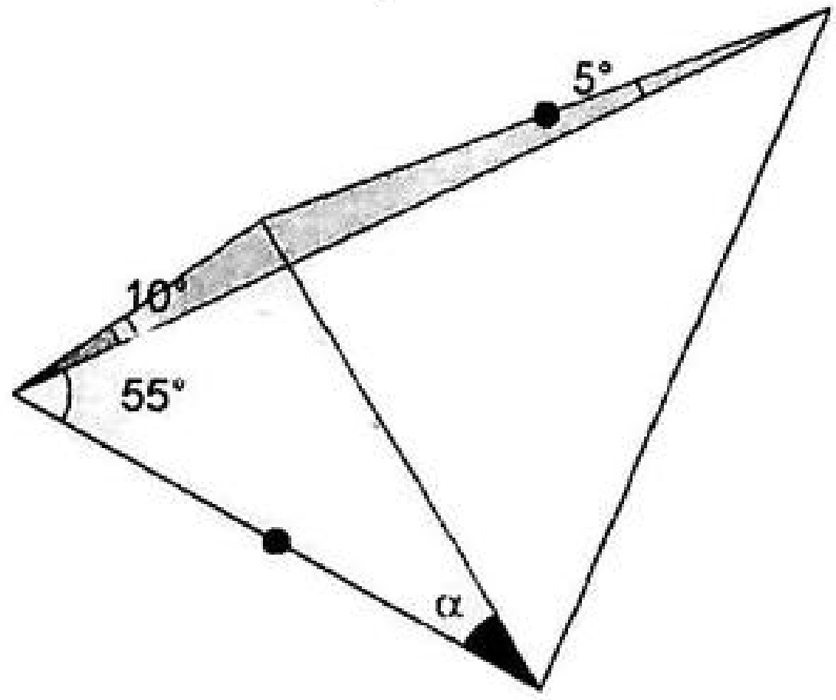
Problema 62. Calcular α.



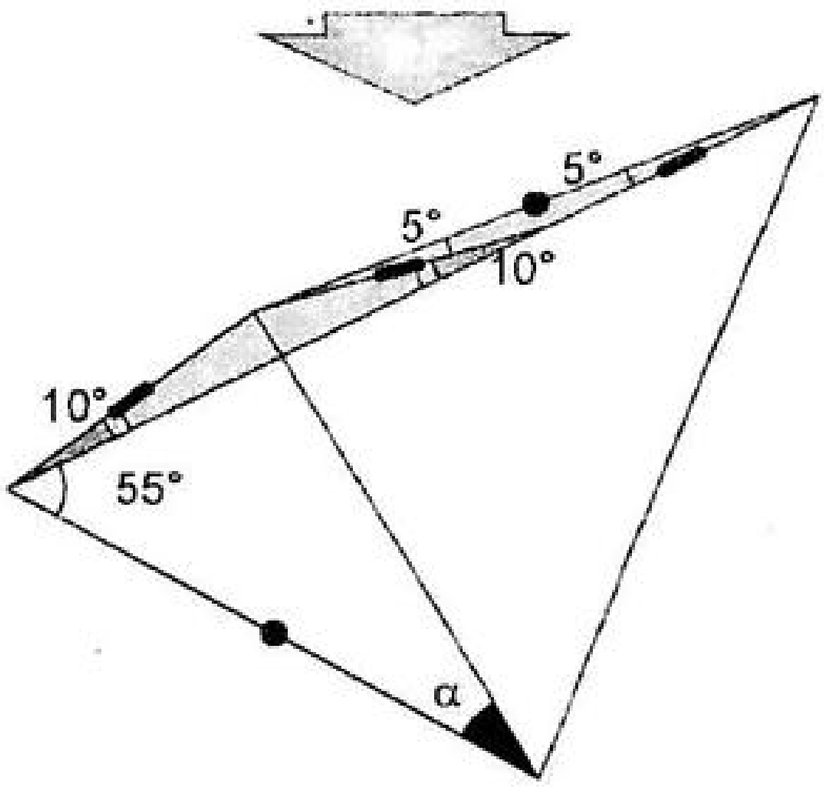
Resolución:

Paso N° 1. Observamos en la figura el primer criterio de construcción:

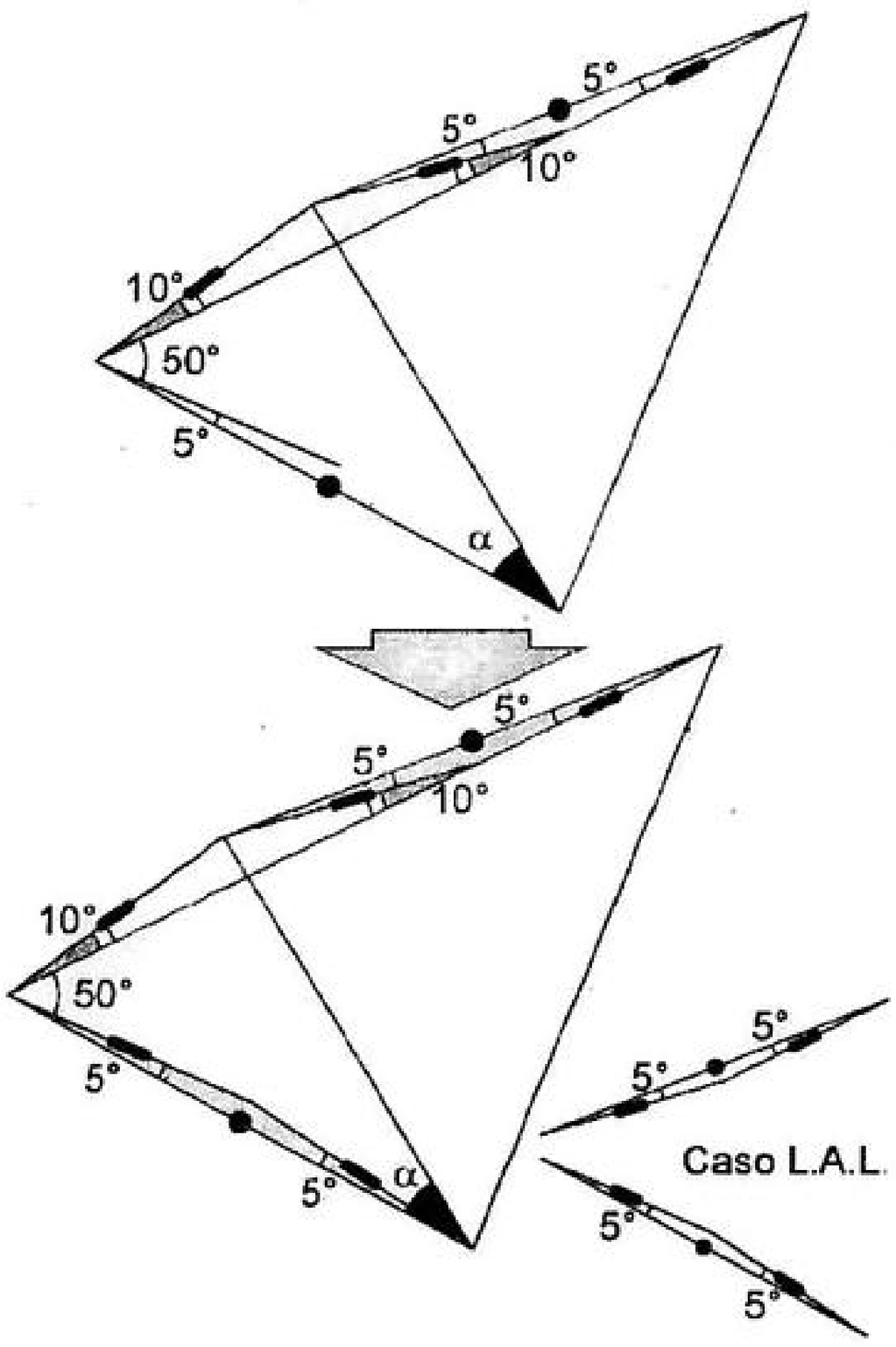




Scanned by CamScanner

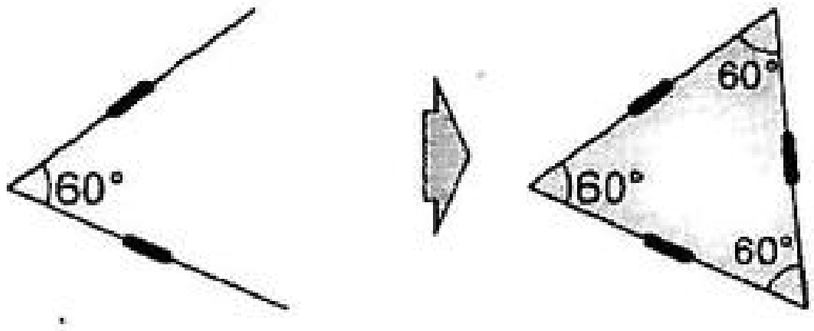


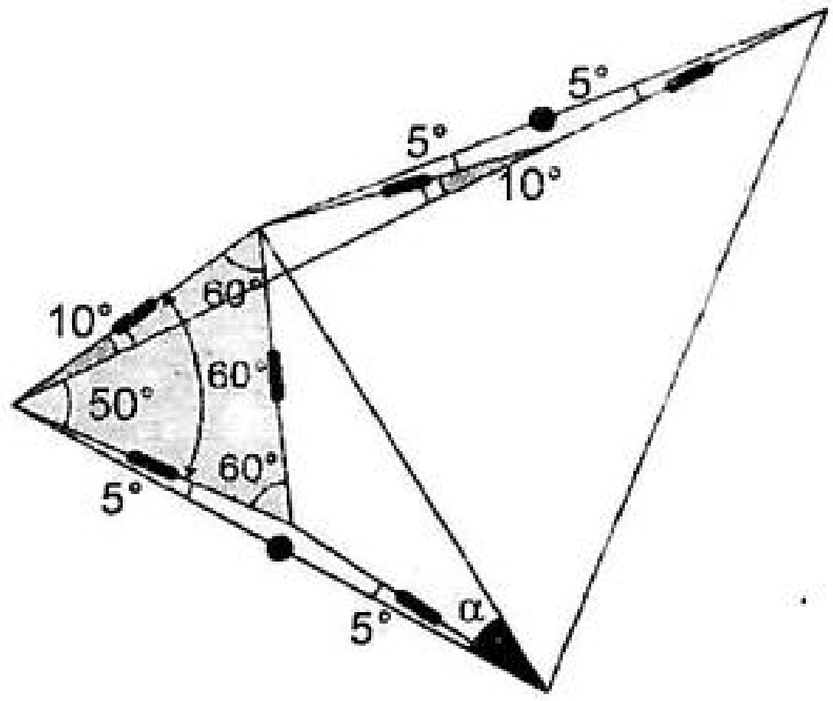
Paso N° 2. Ahora buscamos triángulos congruentes, para ello, hacemos el siguiente trazo:



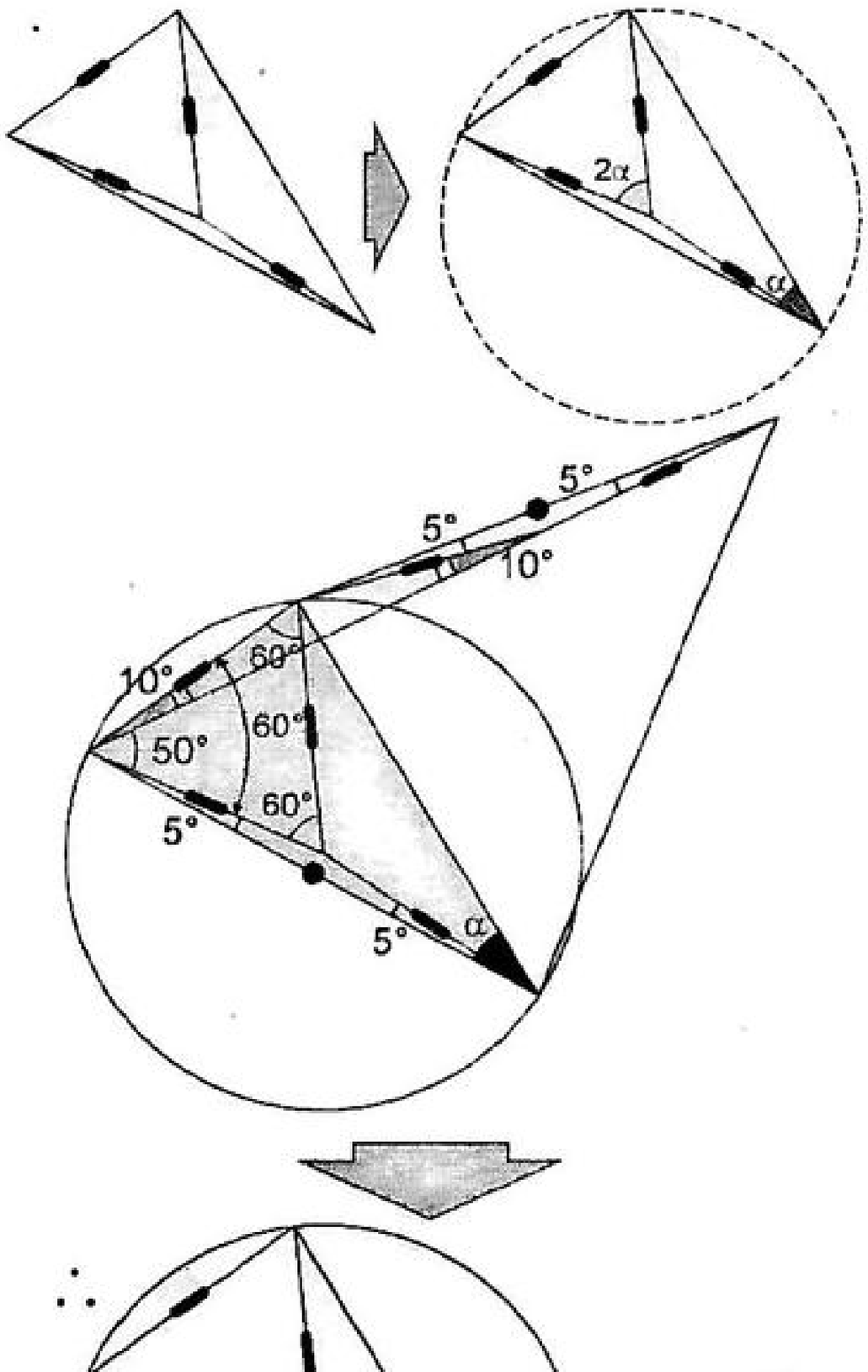
Caso L.A.L.

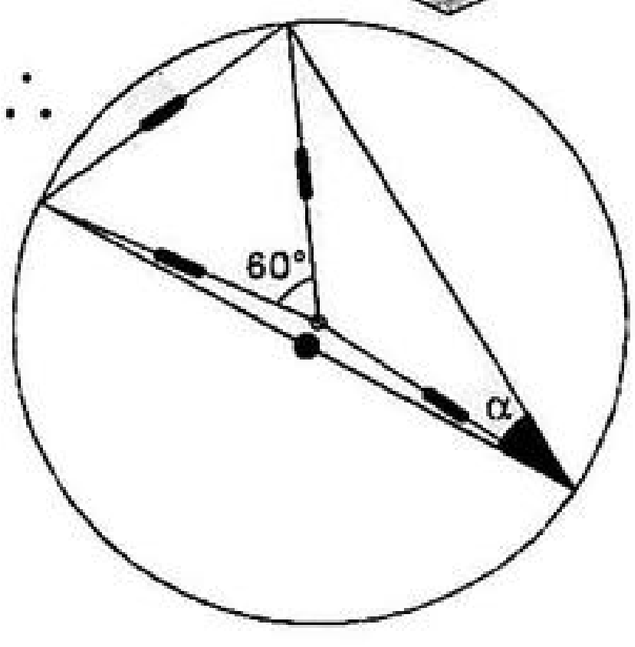
Paso N° 3. Ahora tenemos un triángulo equilátero:





Paso N°4. Se obtiene la figura donde cumple la propiedad:

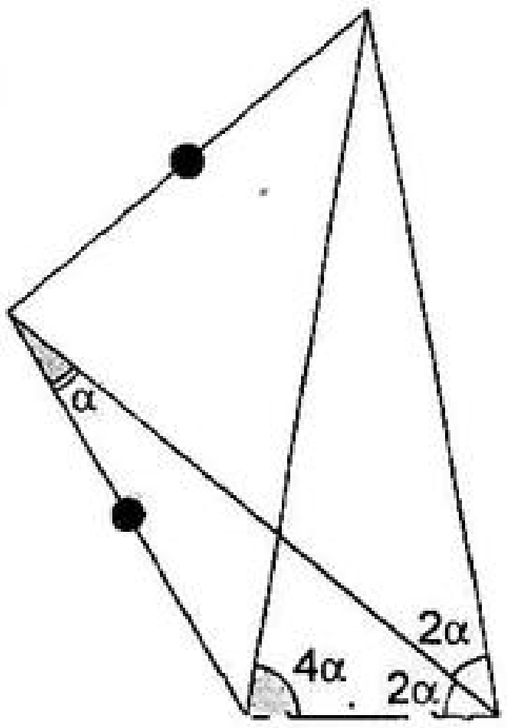




∴ x = 30°

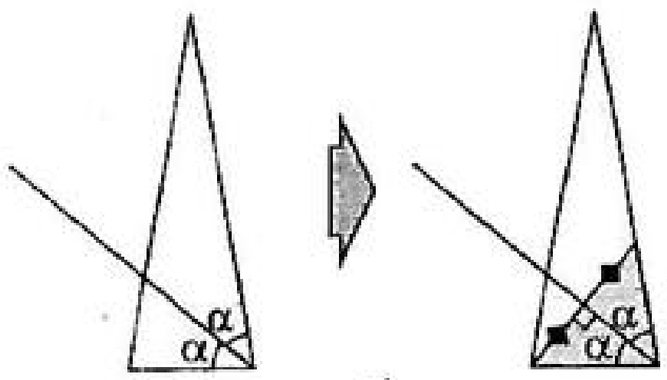
Scanned by CamScanner

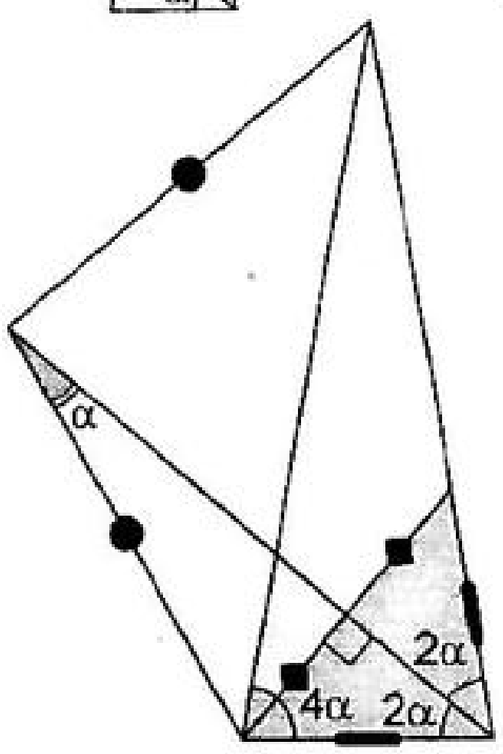
Problema 63. Calcular x.



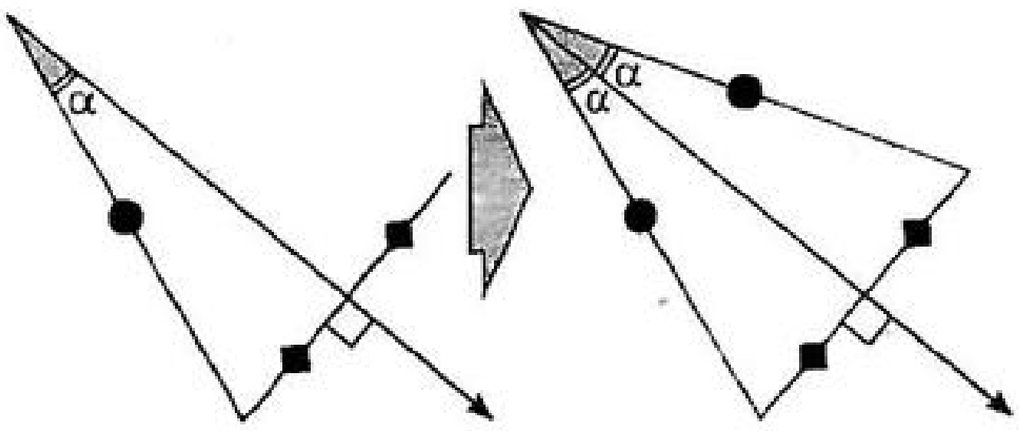
Resolución:

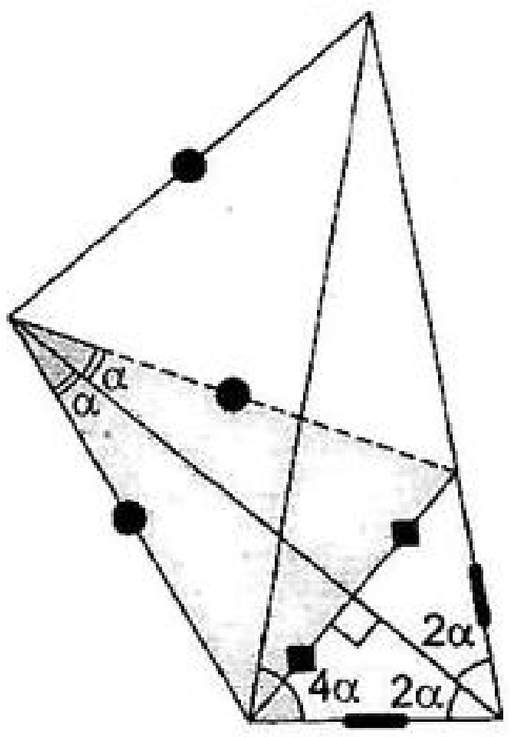
Paso N° 1 Como tenemos una bisectriz entonces formamos un triángulo isósceles:



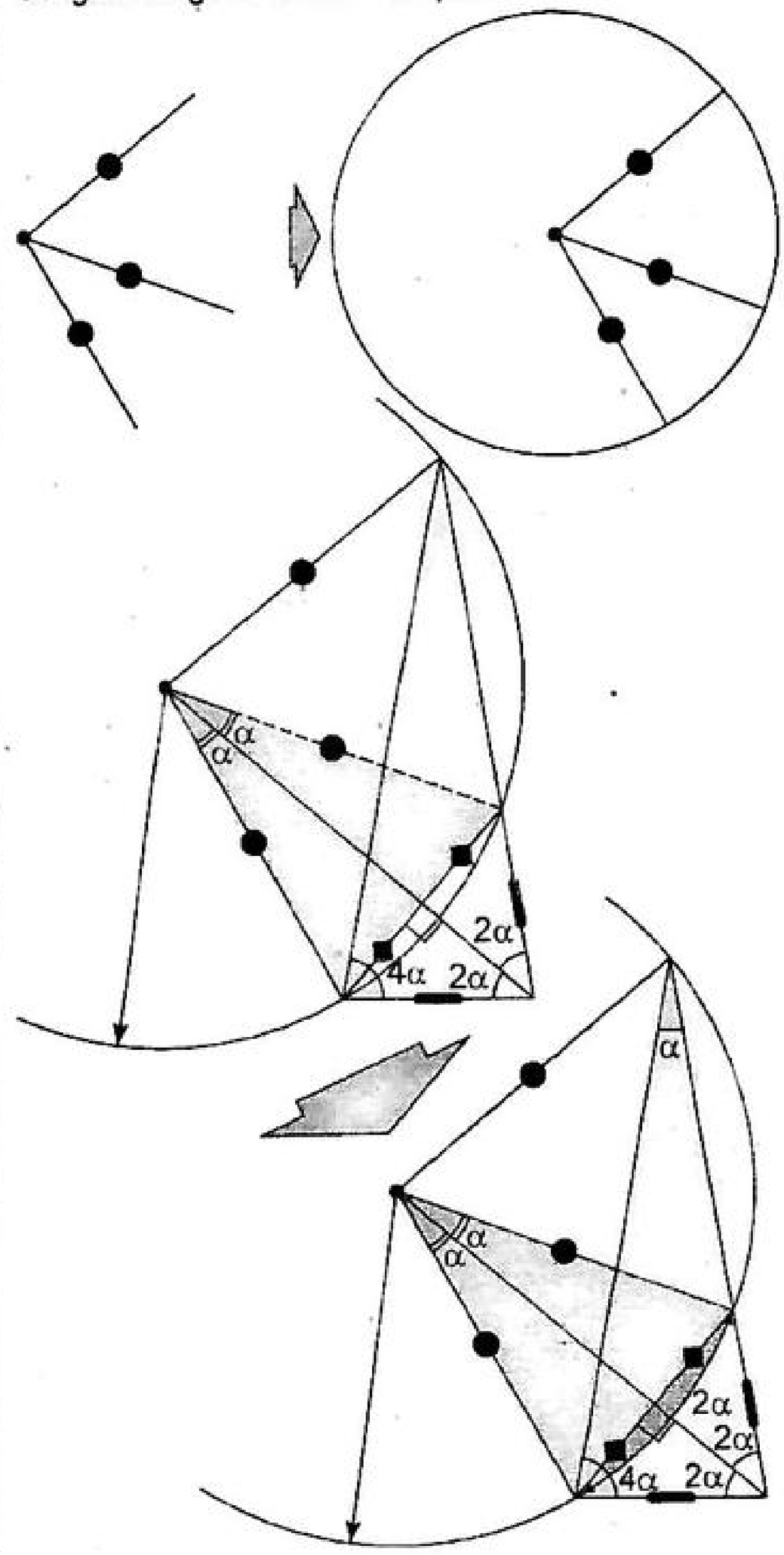


Paso N° 2. También observamos un nuevo triángulo isósceles que es generado por la recta mediatriz:



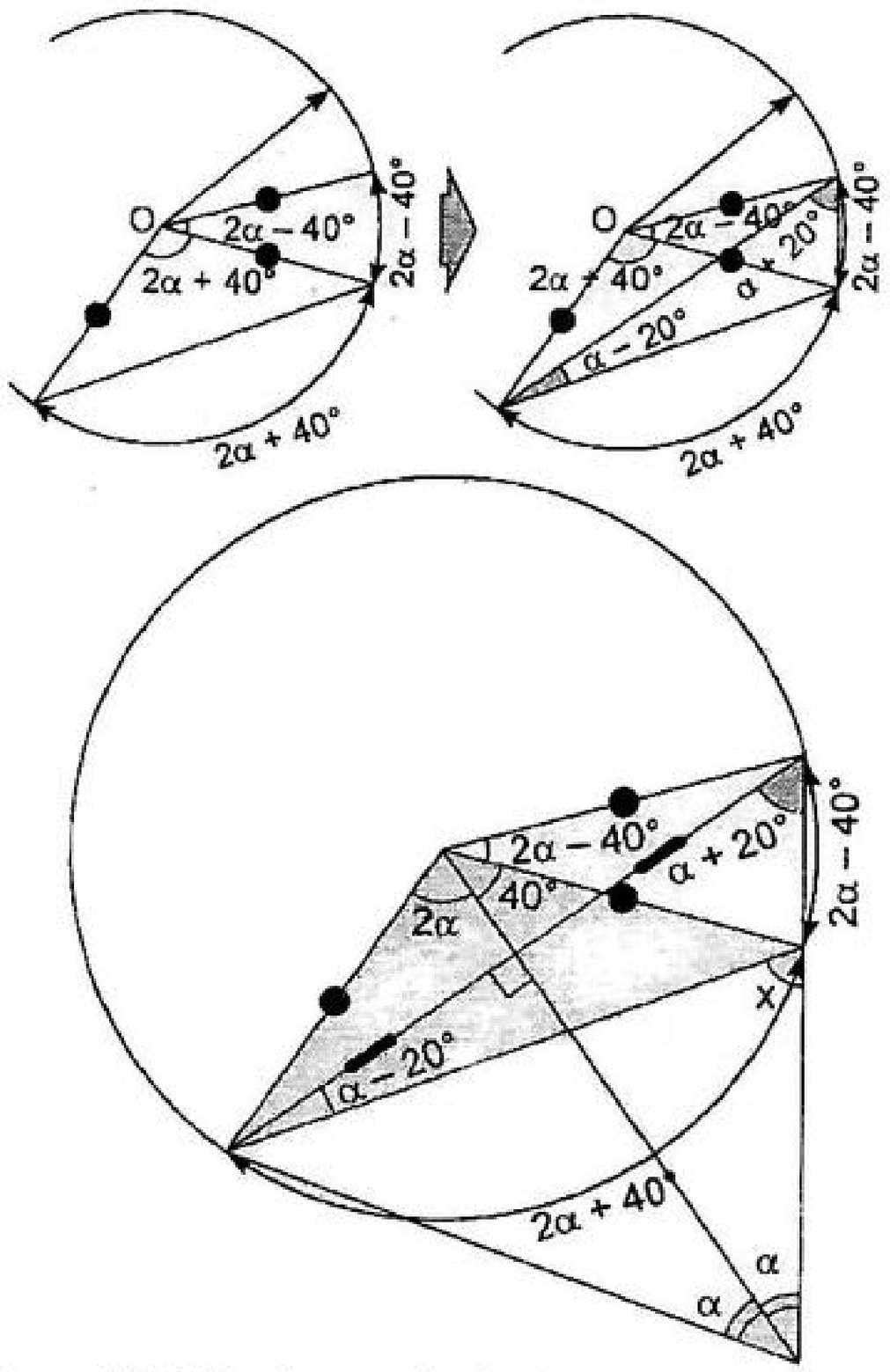


Paso N° 3. Se obtiene en la figura tres segmentos de igual longitud donde cumple:

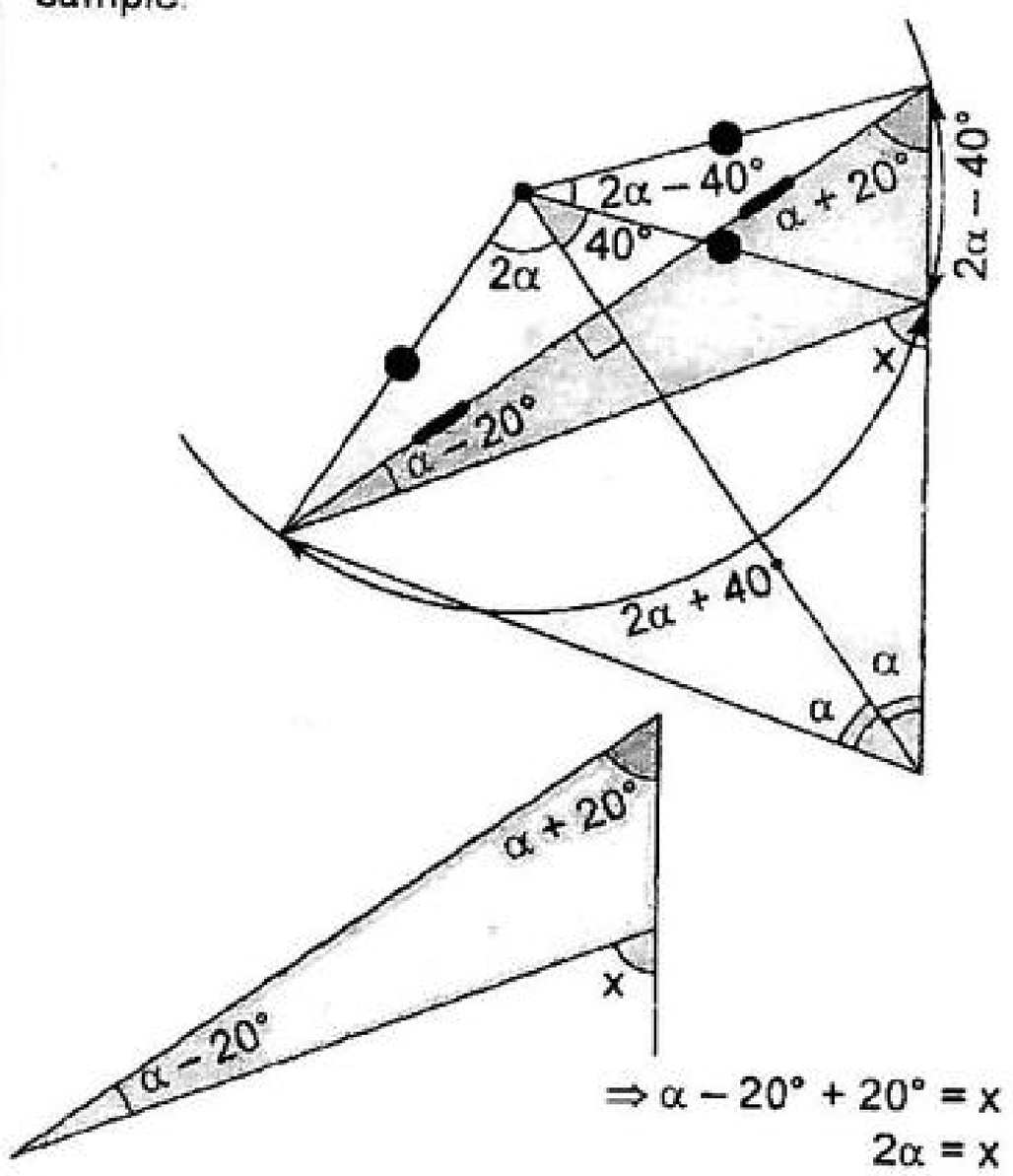


Scanned by CamScanner

Paso N° 4. Aquí se cumple la siguiente propiedad:



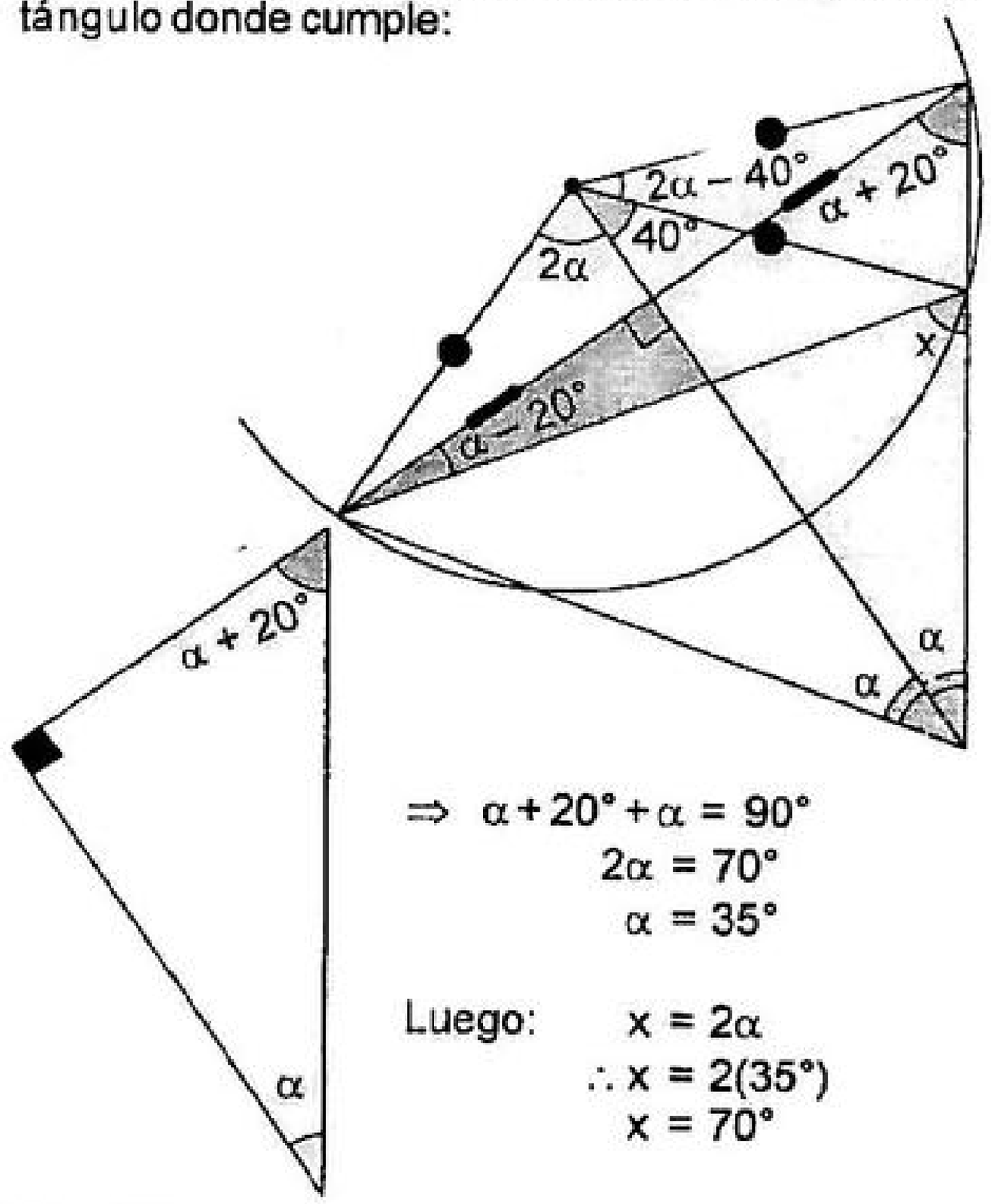
Paso N° 5. Se observa la siguiente figura, donde cumple:



$\Rightarrow \alpha - 20° + 20° = x$

$2\alpha = x$

Paso N° 6. También observamos un triángulo rectángulo donde cumple:



$\Rightarrow \alpha + 20° + \alpha = 90°$

$2\alpha = 70°$

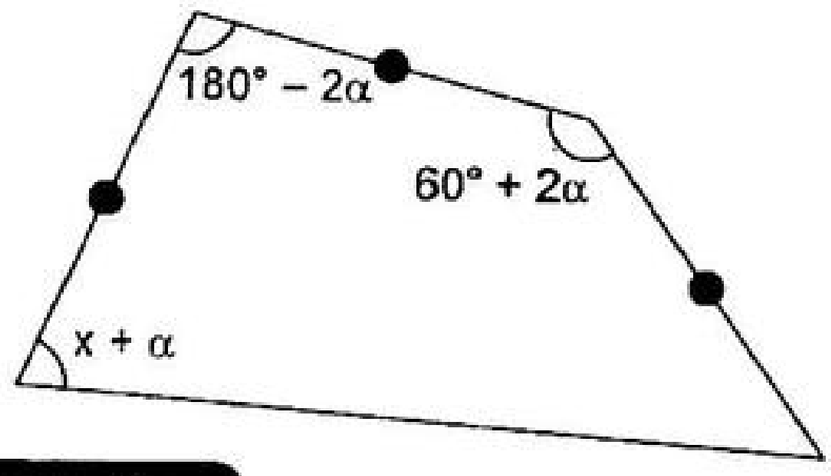
$\alpha = 35°$

Luego: $x = 2\alpha$

$\therefore x = 2(35°)$

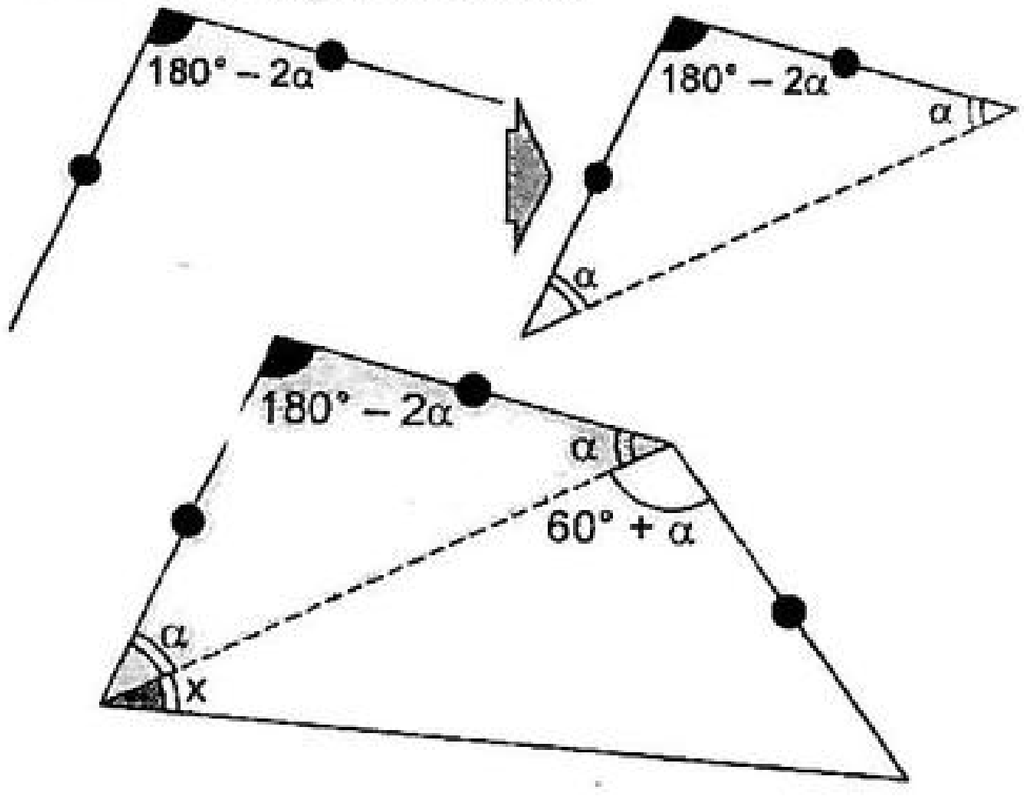
$x = 70°$

Problema 65. Calcular x.



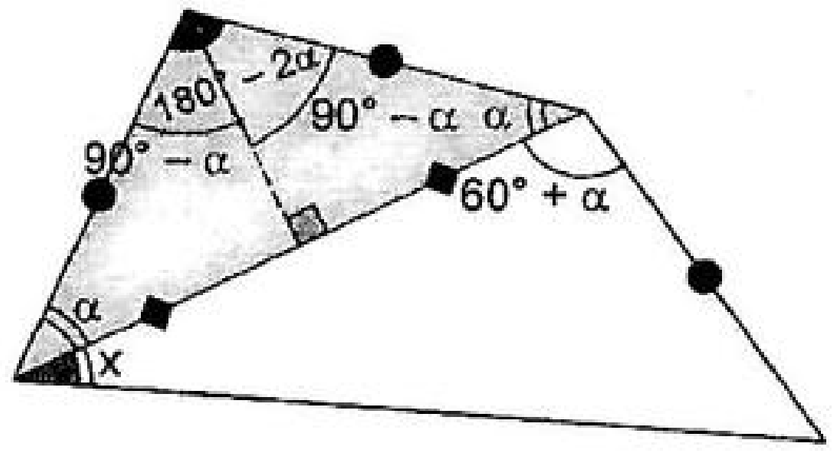
Resolución:

Paso N° 1. Se observa en la figura que podemos formar un triángulo isósceles:

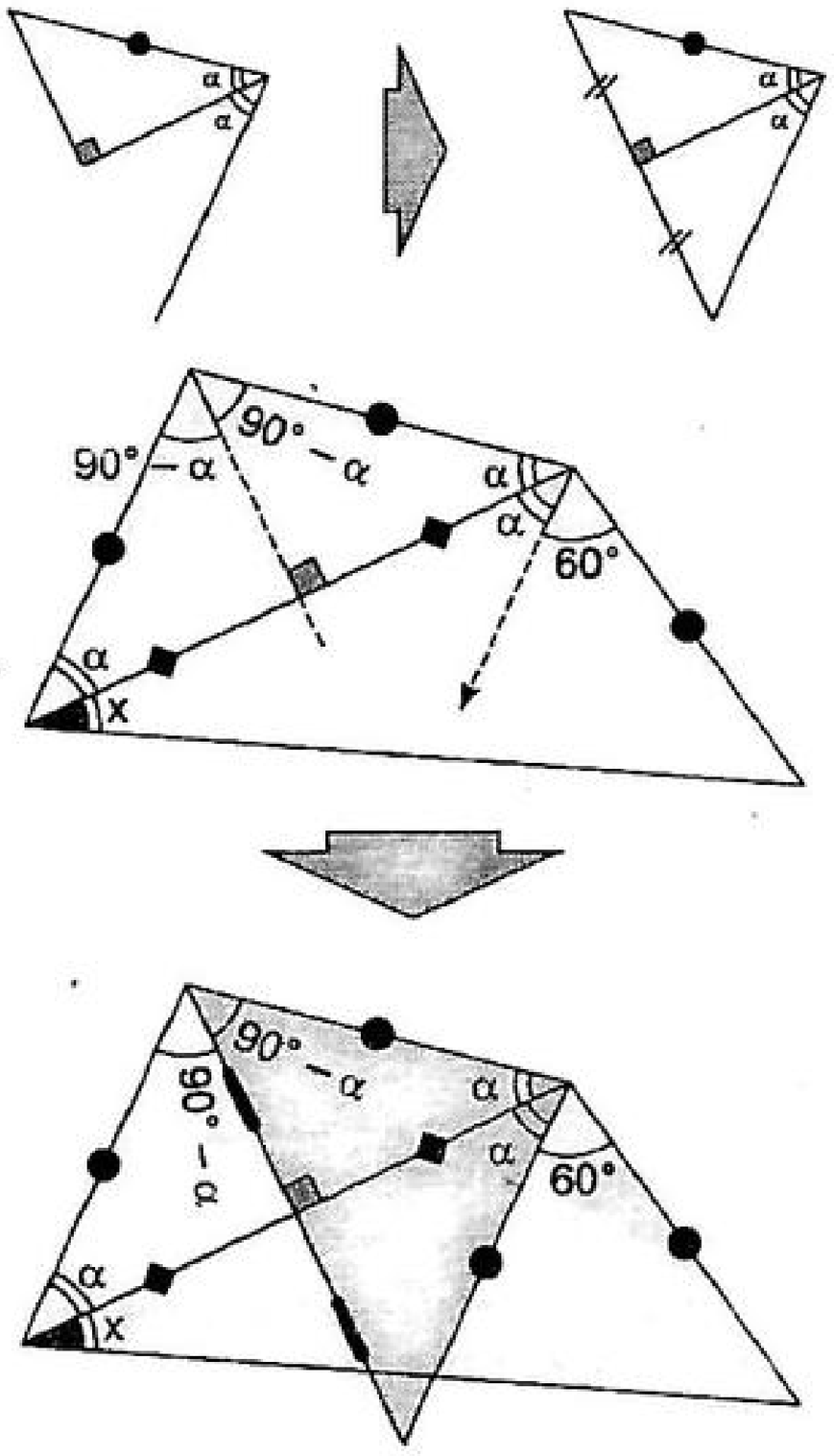


Scanned by CamScanner

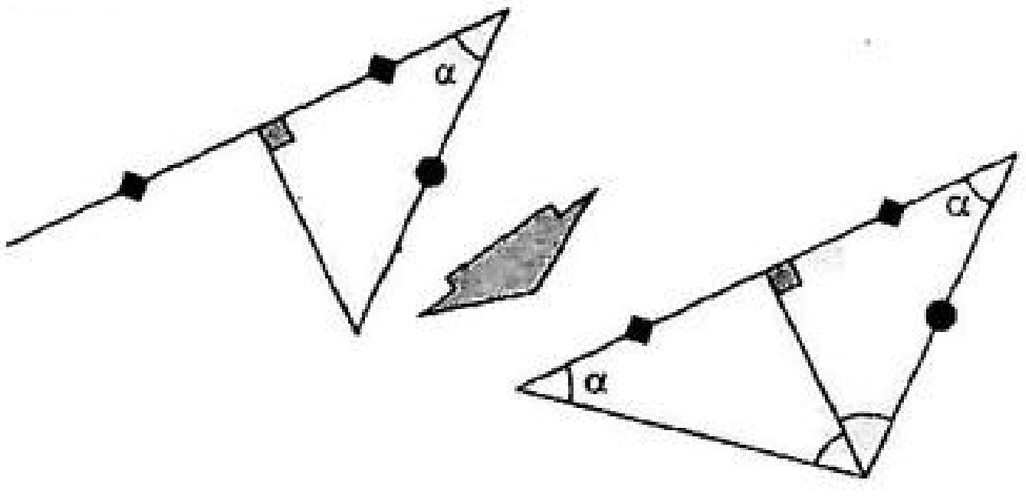
Paso N° 2. Empleamos las propiedades que se cumplen en el triángulo isósceles:

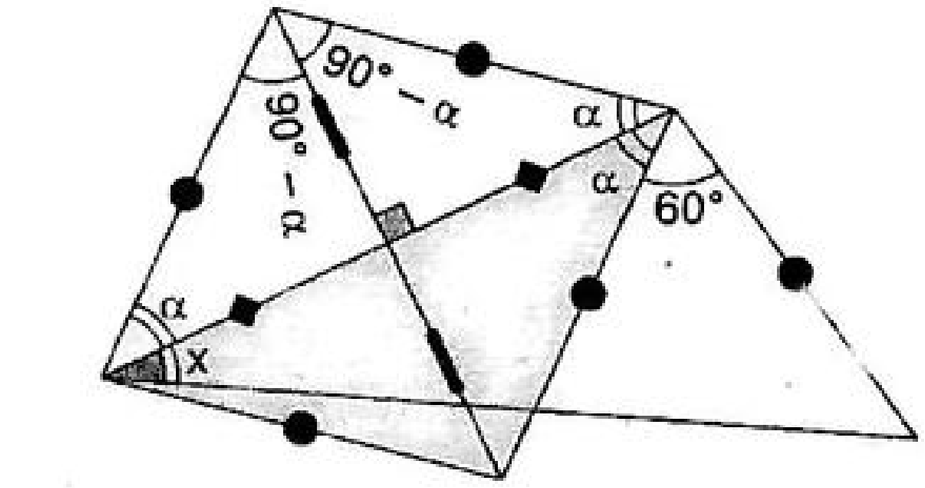


Paso N° 3. Ahora, hacemos:

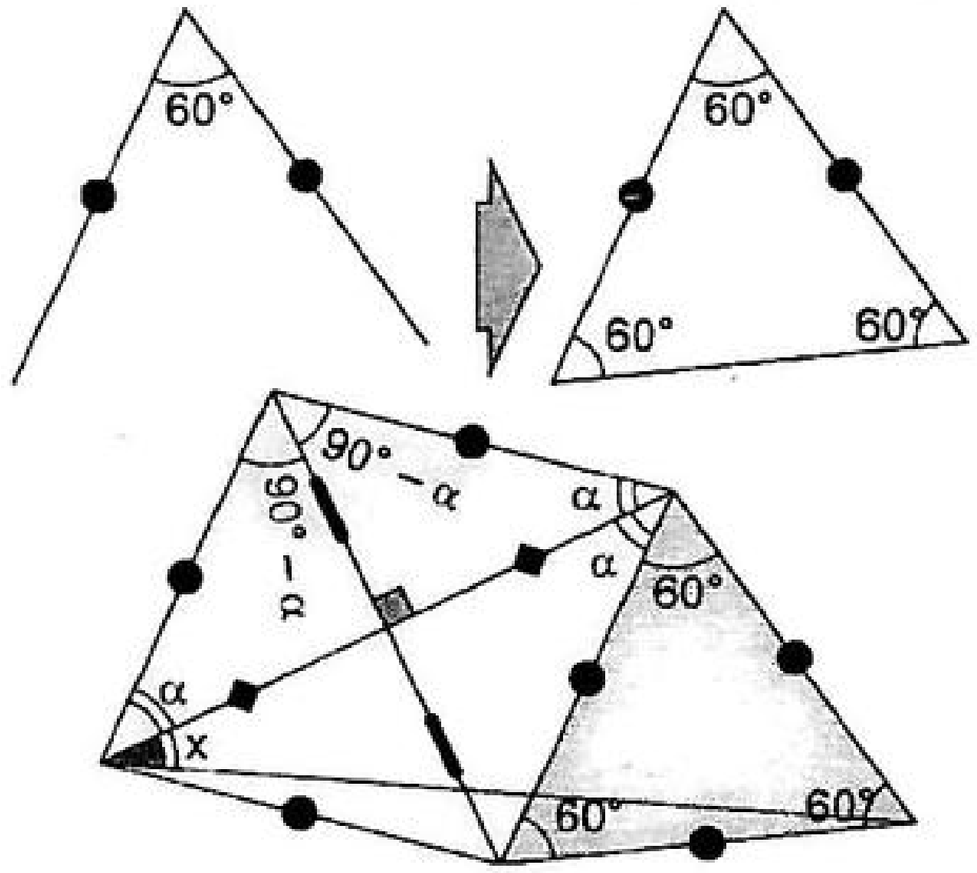


Paso N° 4. Observamos un nuevo triángulo isósceles:

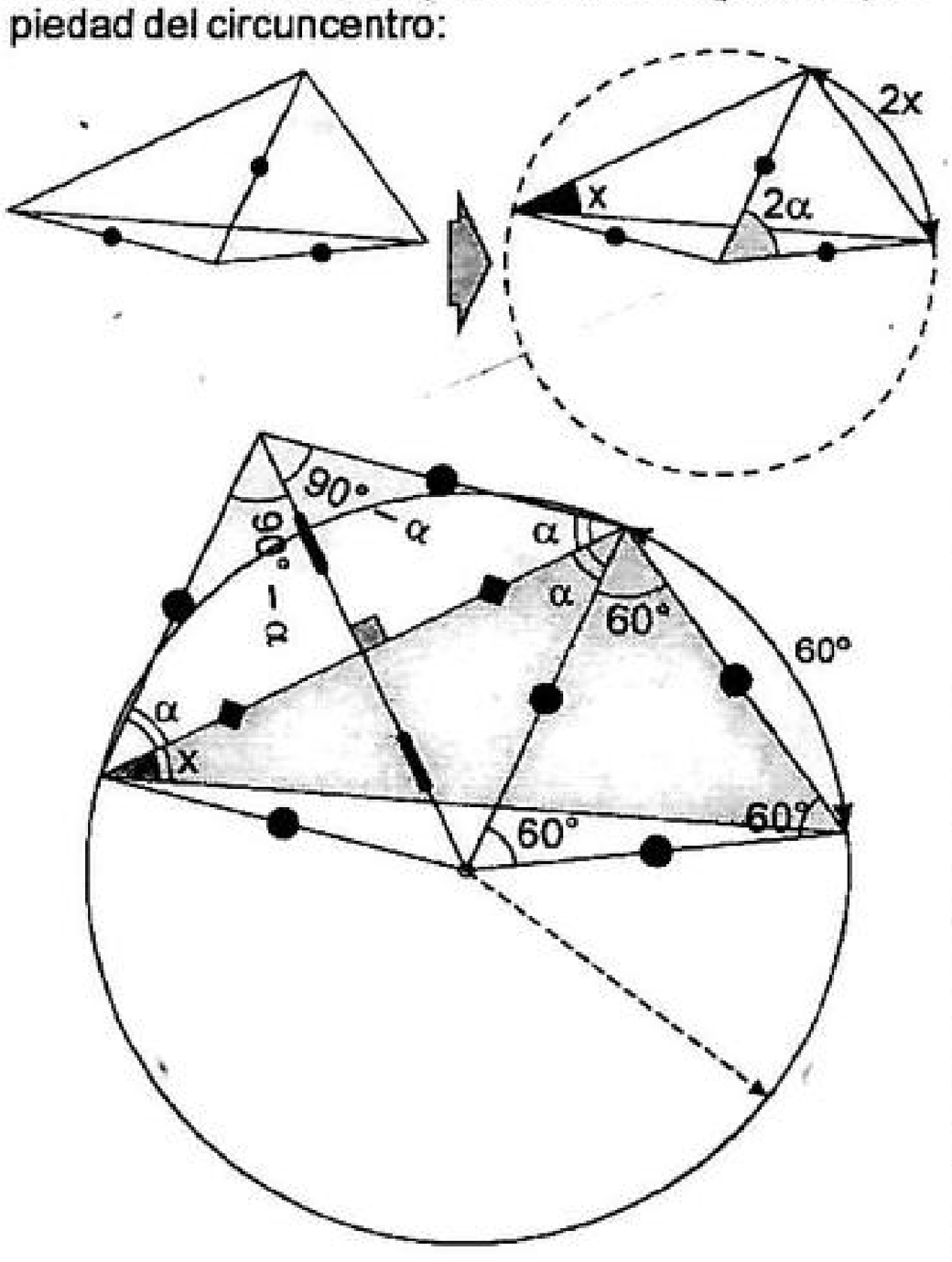




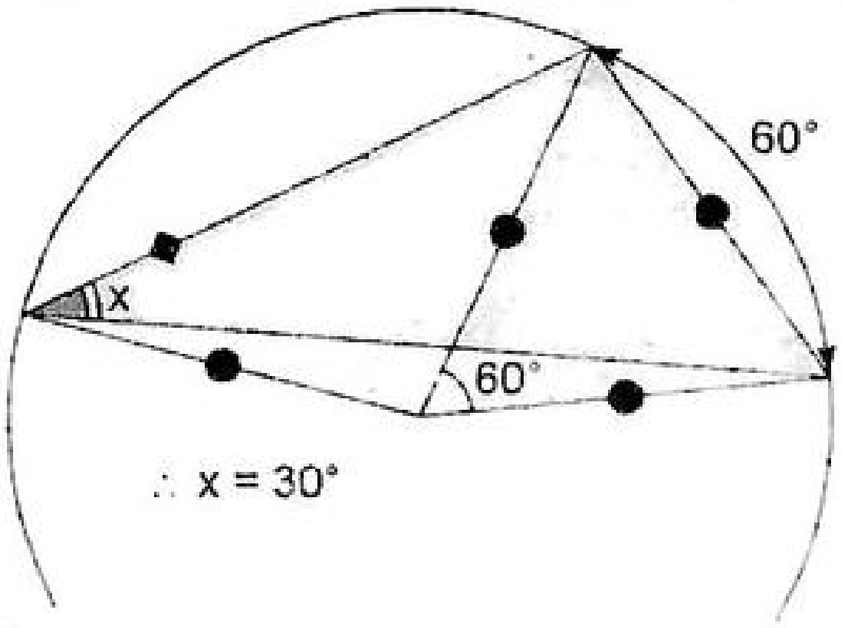
Paso N° 5. Se observa un triángulo equilátero, así:



Paso N° 6. Ahora, emplearemos la siguiente propiedad del circuncentro:

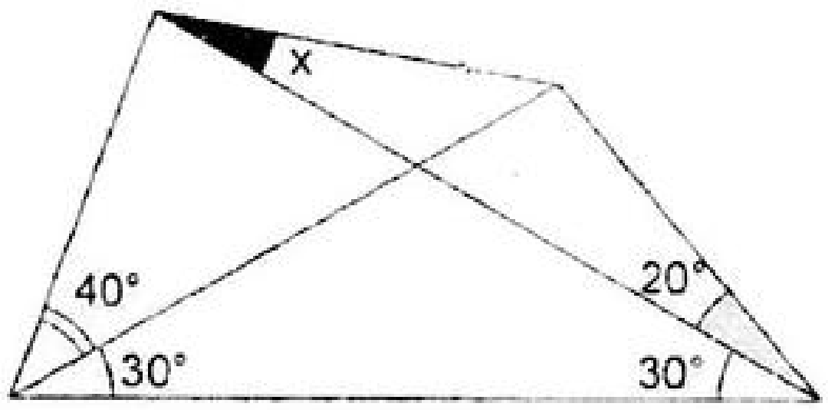


Scanned by CamScanner



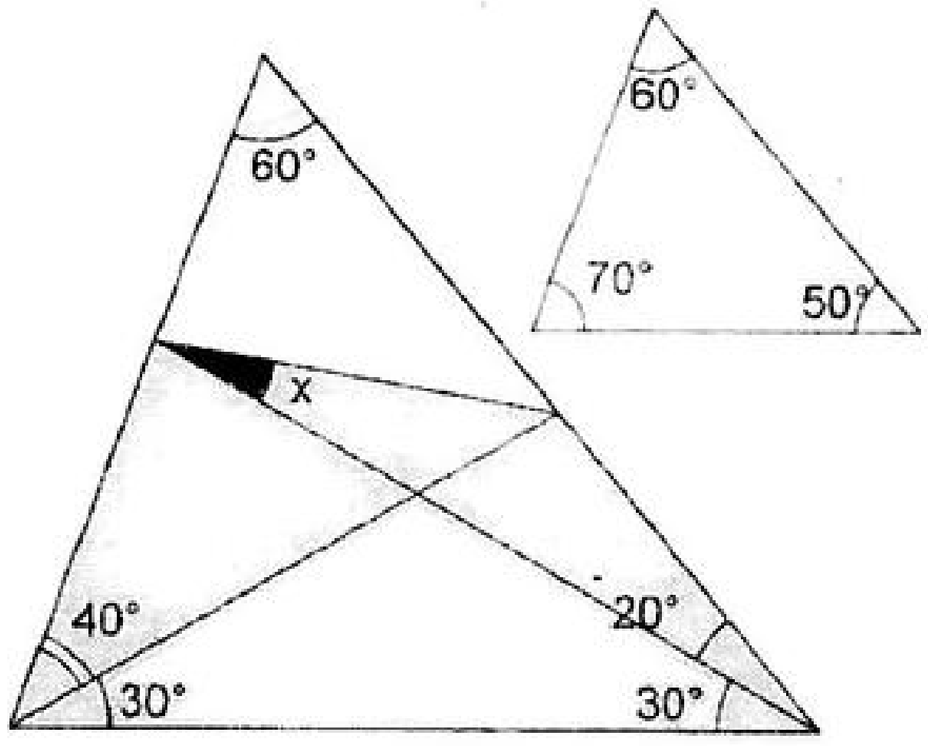
$\therefore x = 30°$

Problema 66. Caso general Calcular x

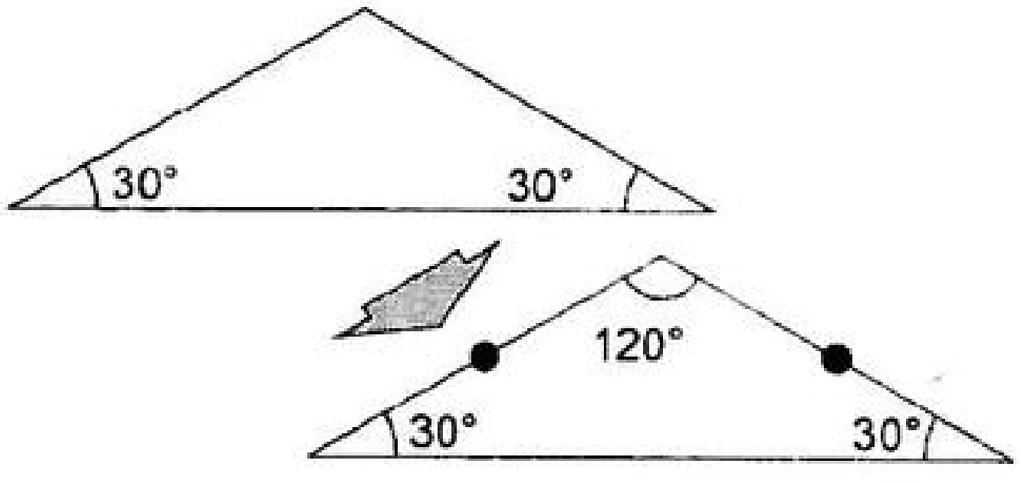


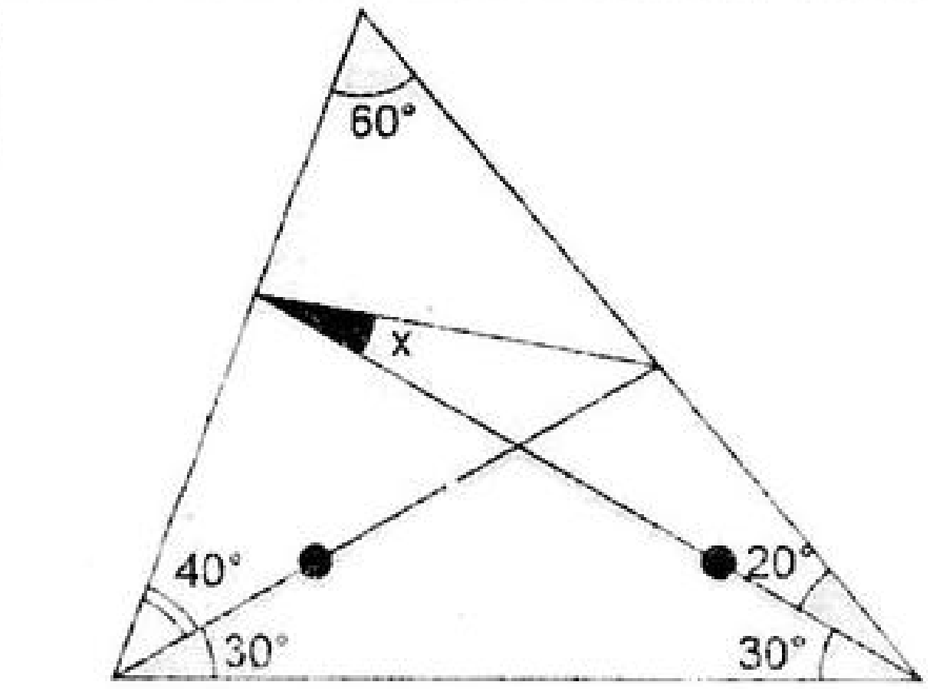
Resolución:

Paso N° 1. Completamos la figura a un triángulo:

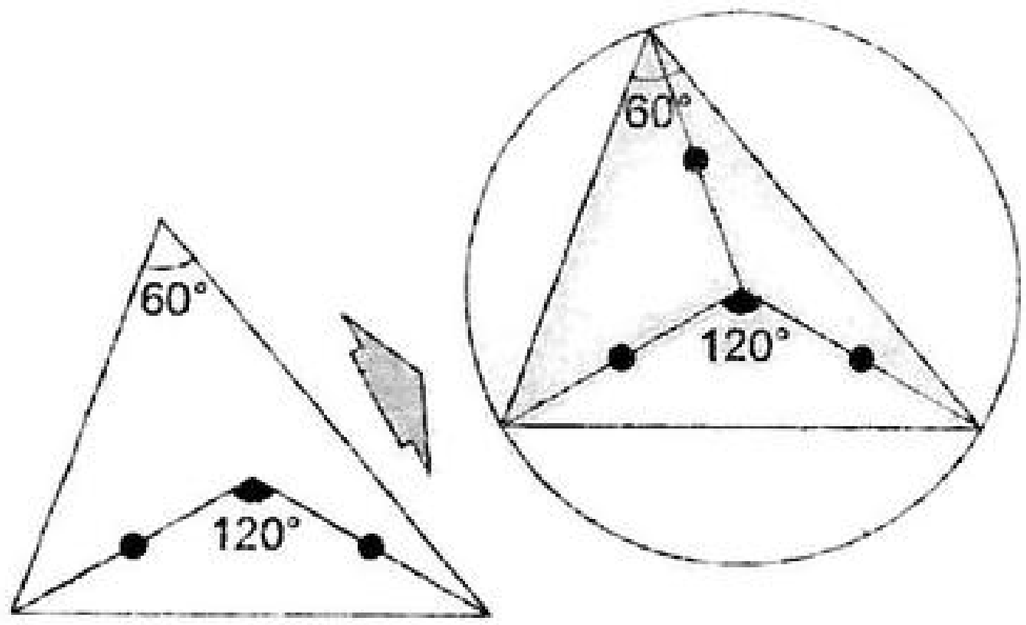


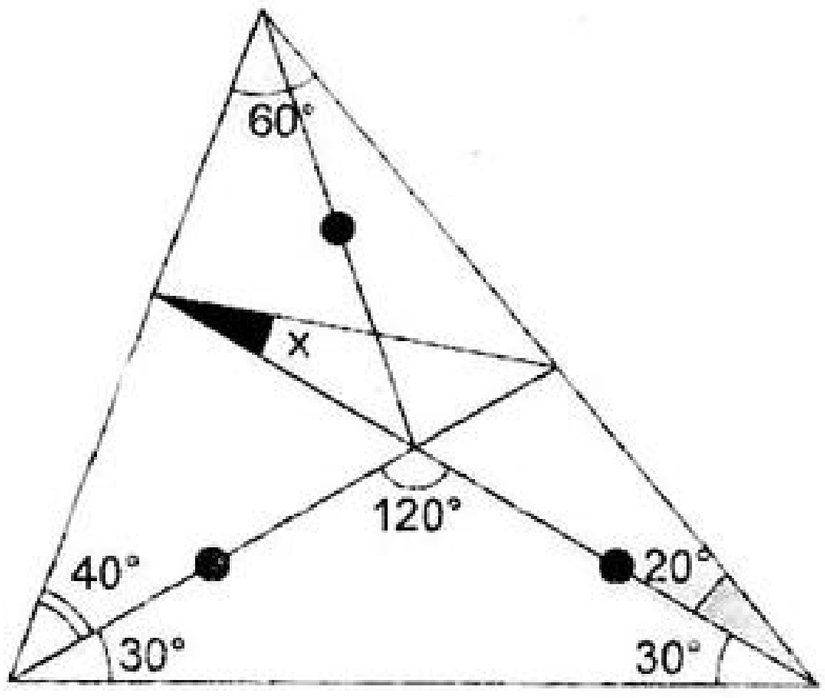
Paso N° 2. También se observa:



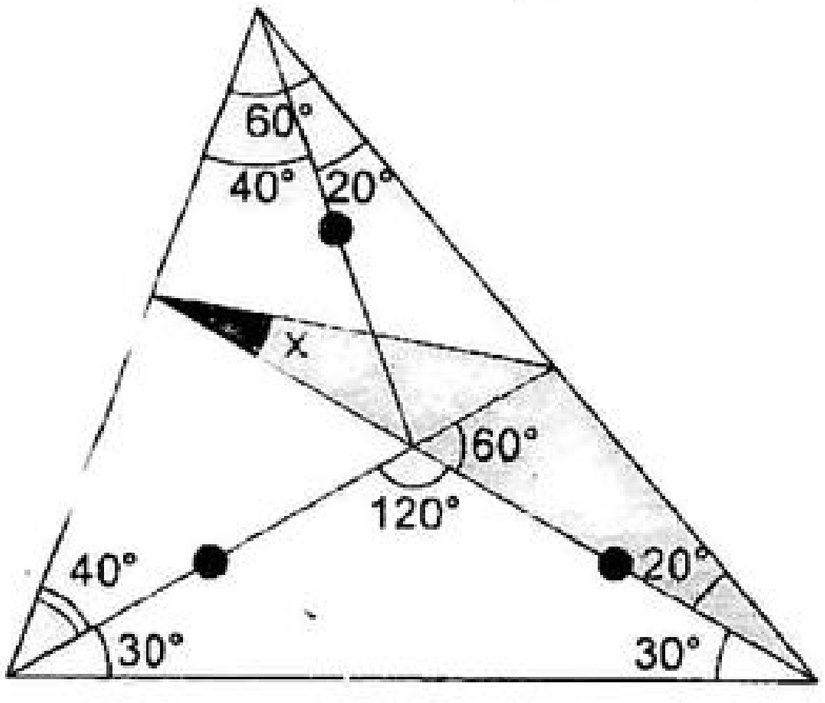


Paso N° 3 Observamos la siguiente propiedad:



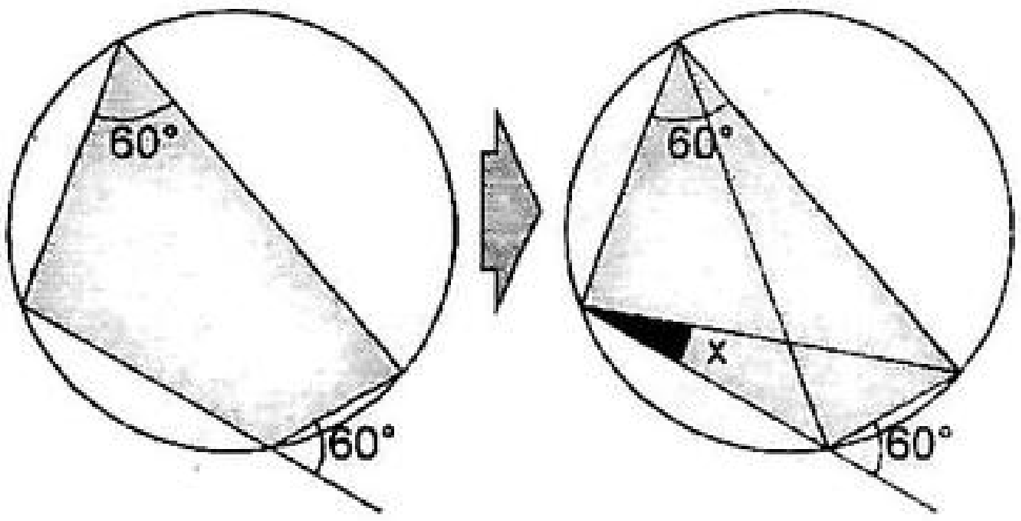


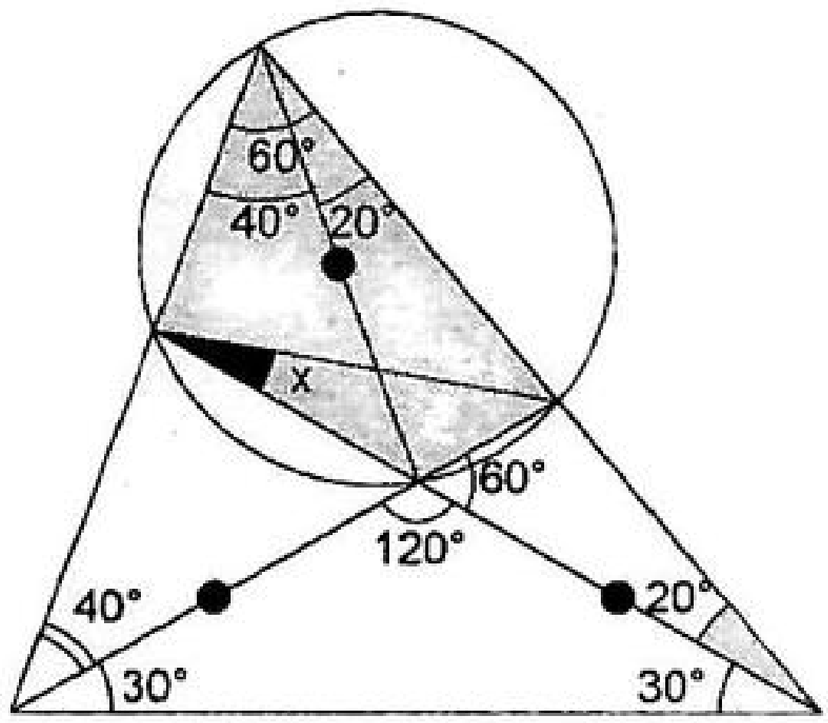
Paso N° 4. Formamos un triángulo isósceles.



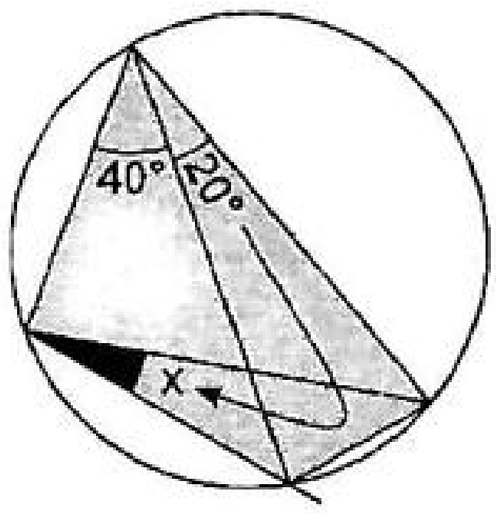
Scanned by CamScanner

Paso N° 5. Ahora observamos un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:



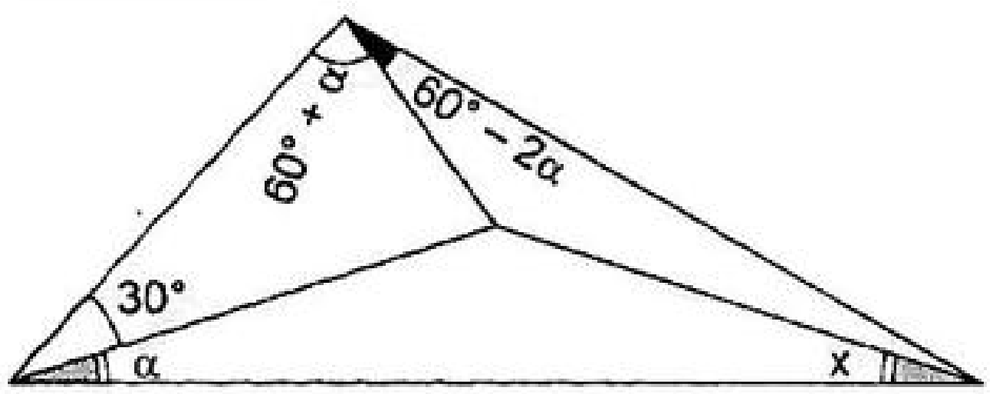


Aquí cumple:



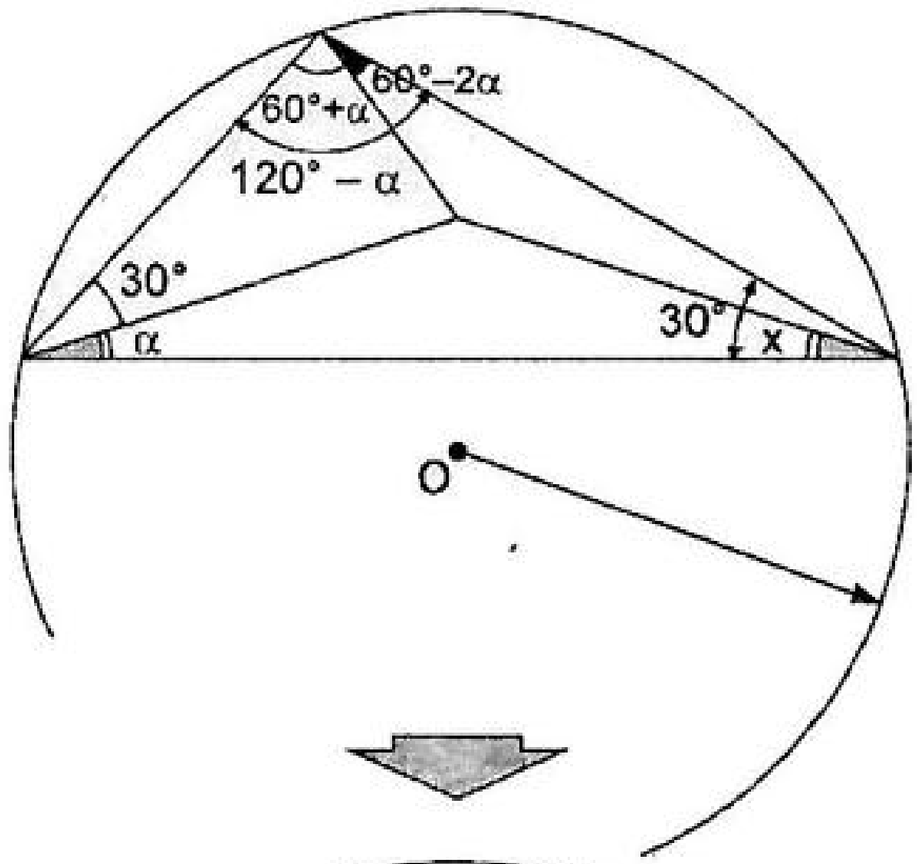
$\Rightarrow x = 20°$

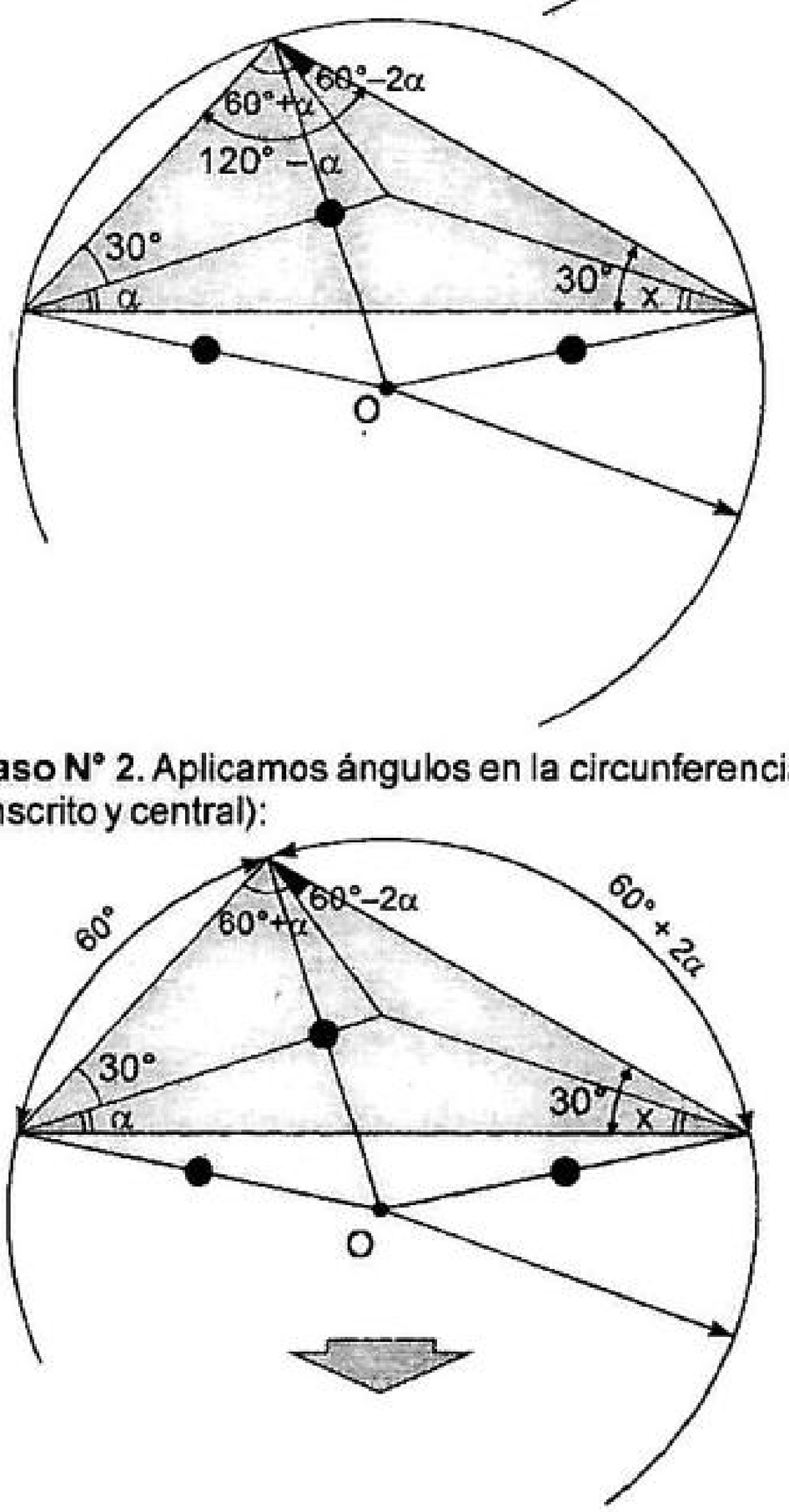
Problema 67. Calcular x.



Resolución:

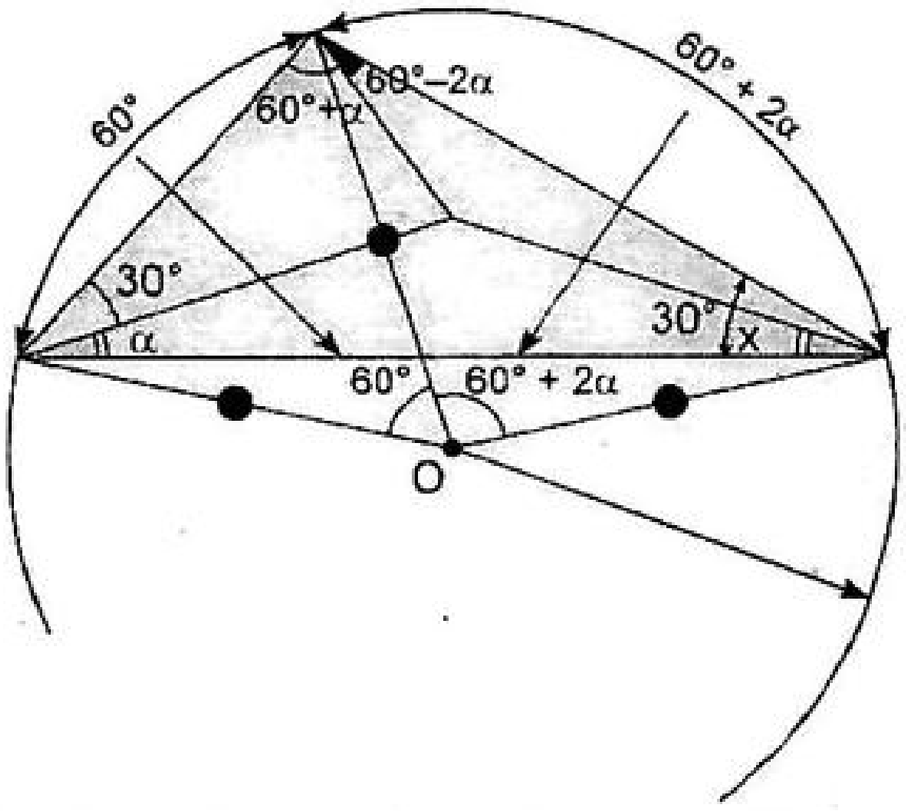
Paso N° 1. Colocamos el triángulo en una circunferencia, y ubicamos su circuncentro exterior a ella:



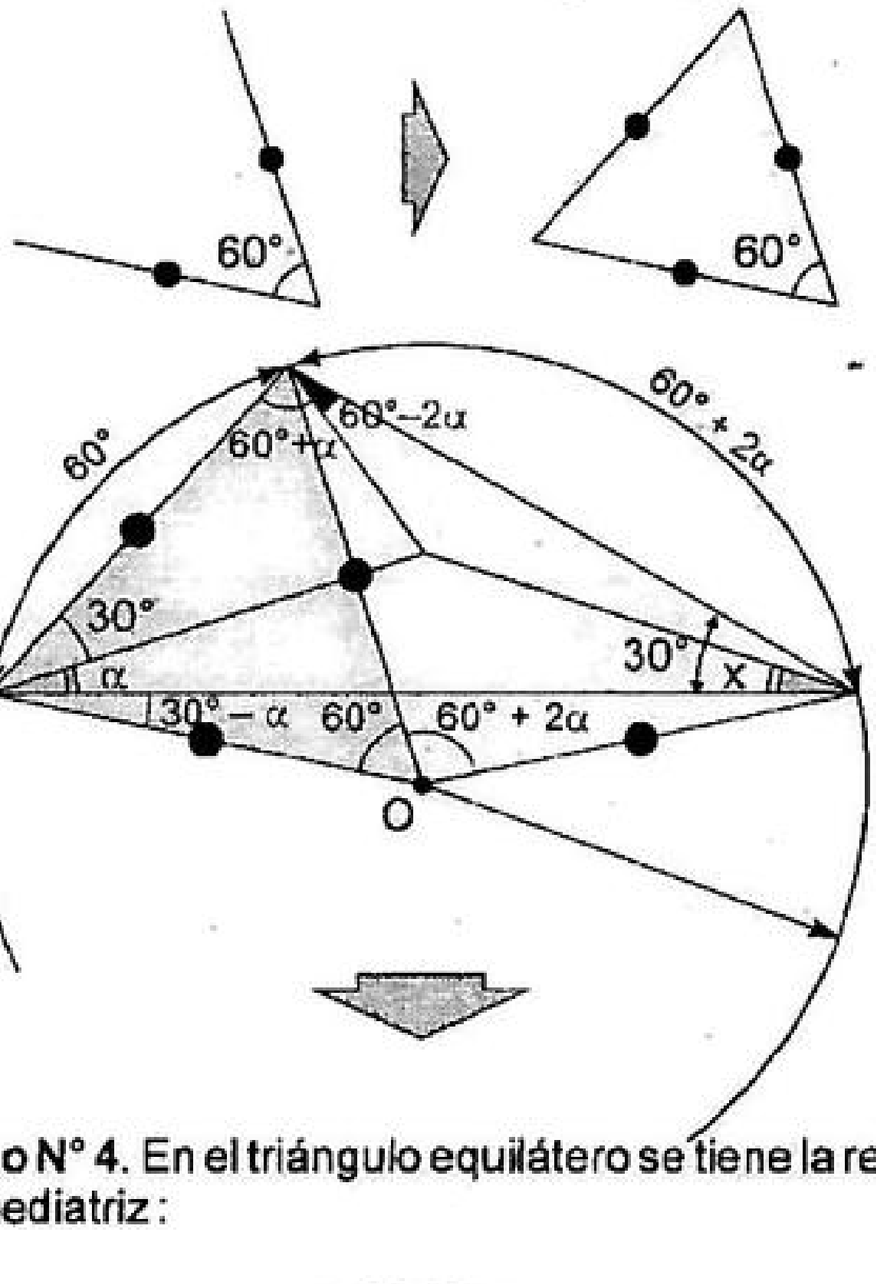


Paso N° 2. Aplicamos ángulos en la circunferencia (inscrito y central):

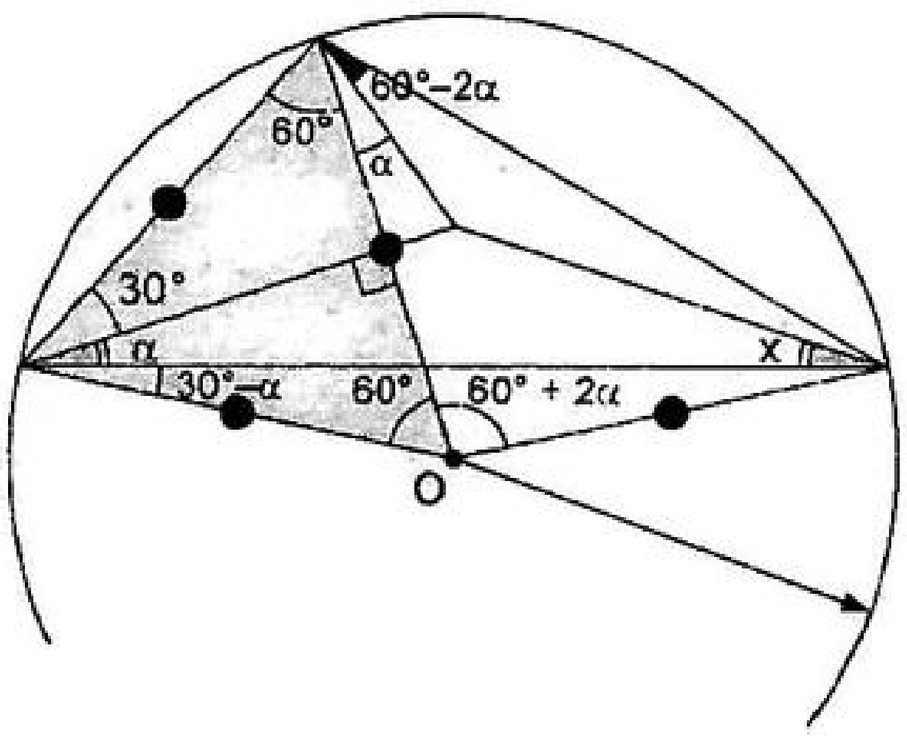
Scanned by CamScanner

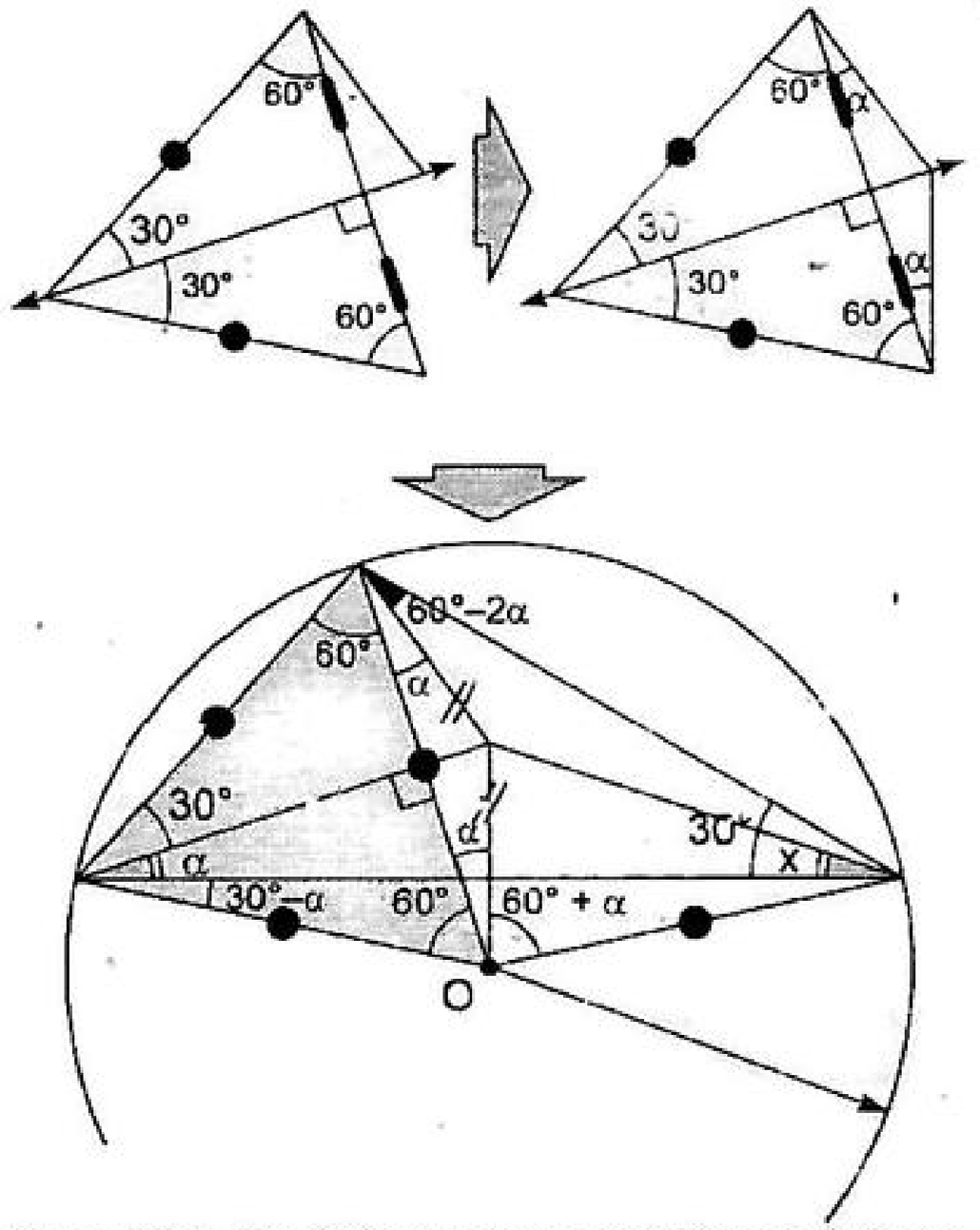


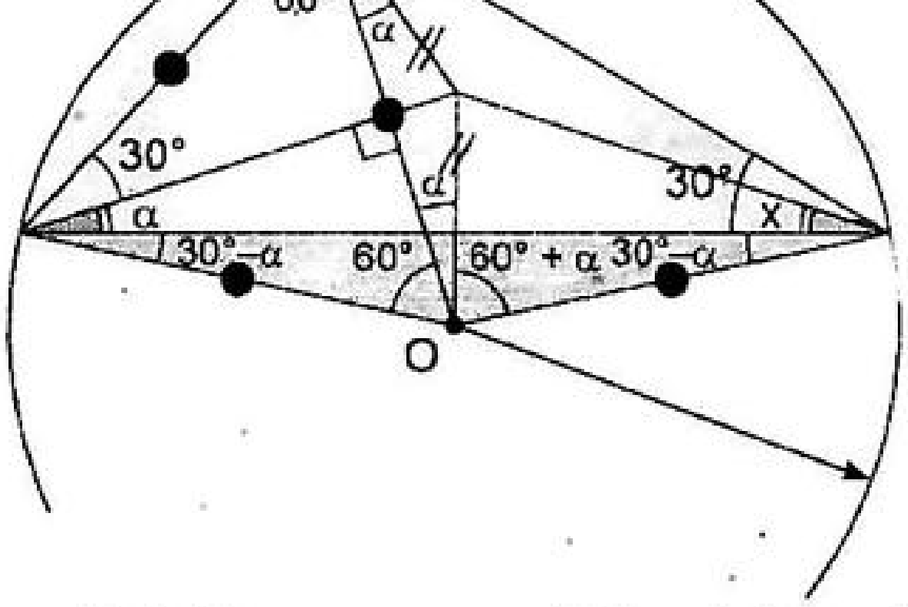
Paso N° 3. Observamos un triángulo equilátero:



Paso N° 4. En el triángulo equilátero se tiene la recta mediatriz:

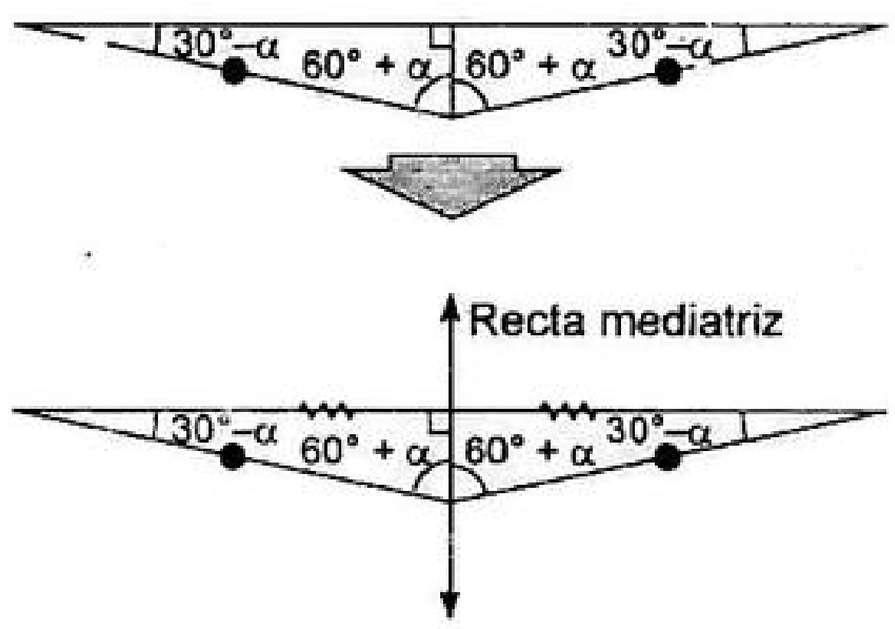




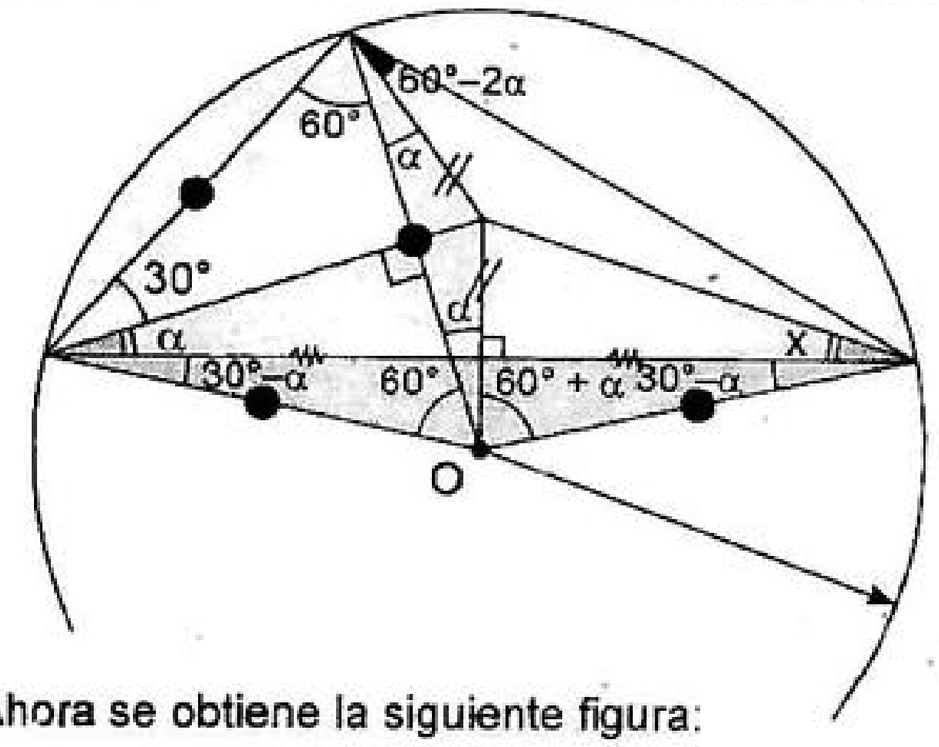


Paso N° 5. También tenemos un triángulo isósceles:

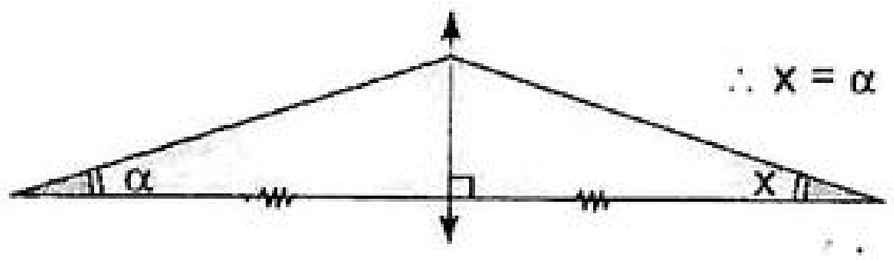
Paso N° 6. Observamos en el triángulo isósceles que se cumple:



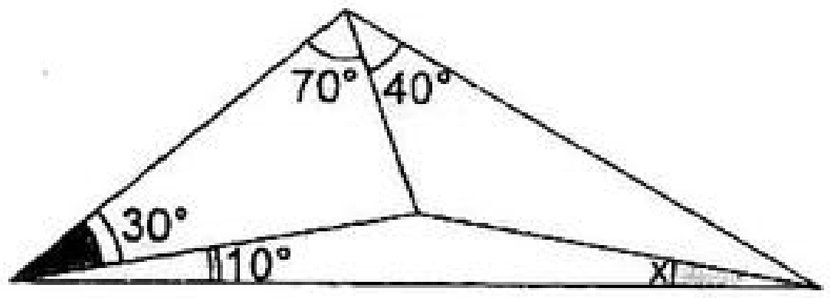
Scanned by CamScanner



Ahora se obtiene la siguiente figura:

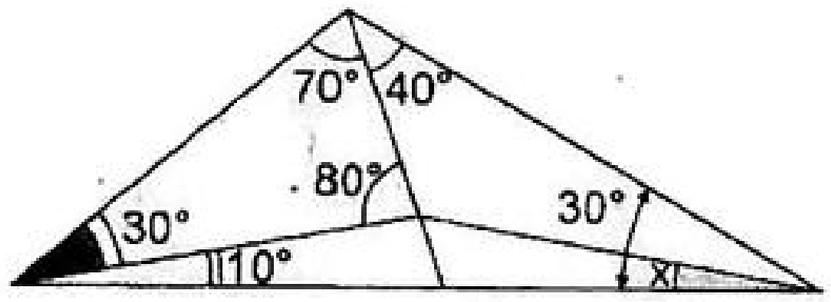


Problema 68. Caso general. Calcular x.

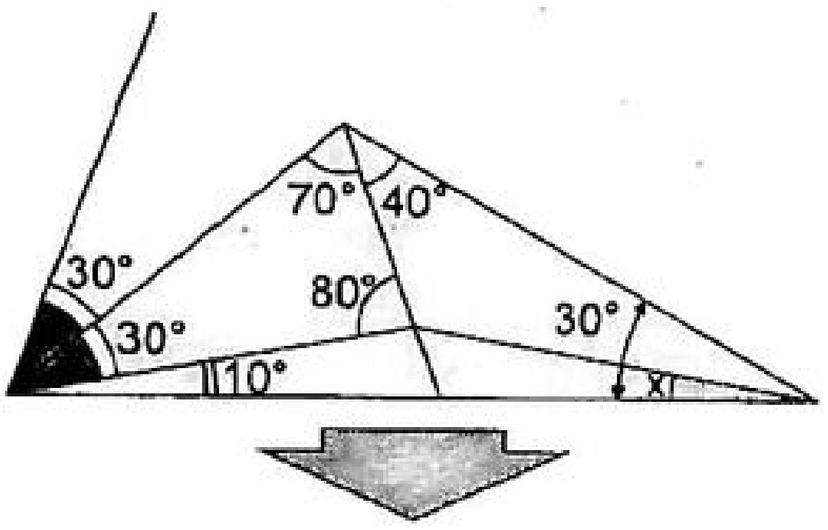


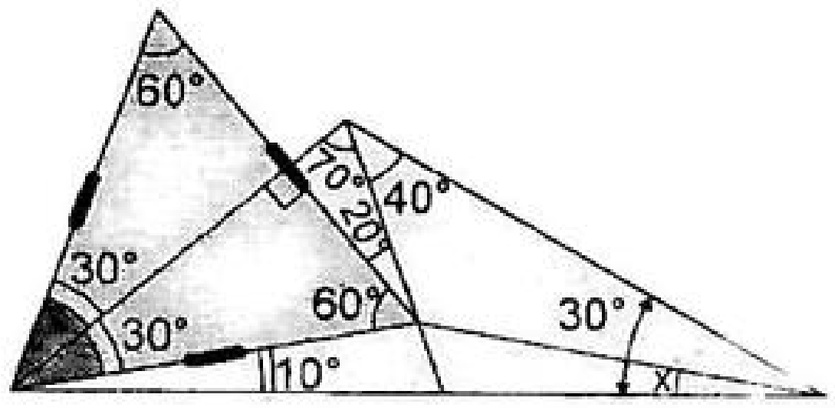
Resolución:

Paso N° 1. Completamos ángulos internos del triángulo:

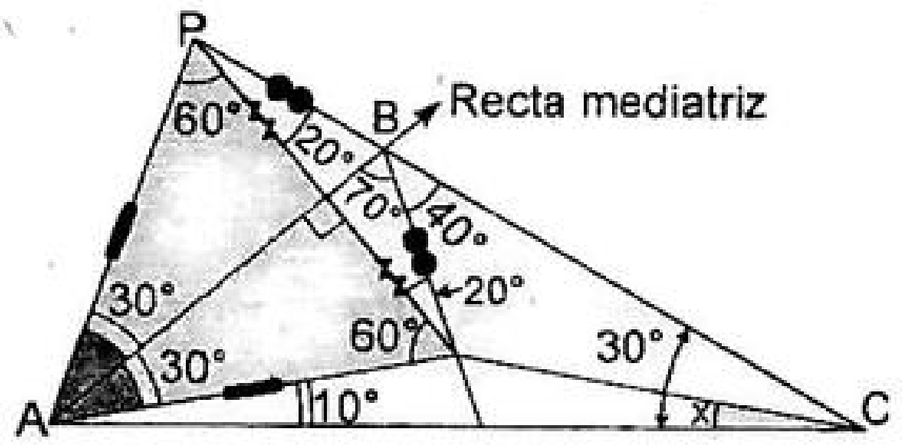


Paso N° 2. También tenemos un ángulo de 30°, donde a partir de él construimos un triángulo equilátero:

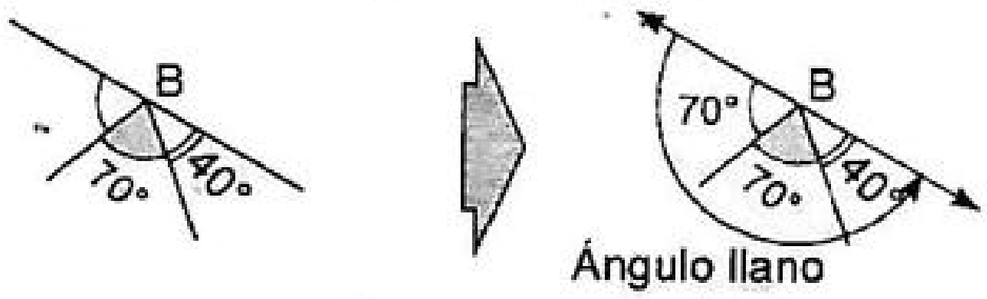


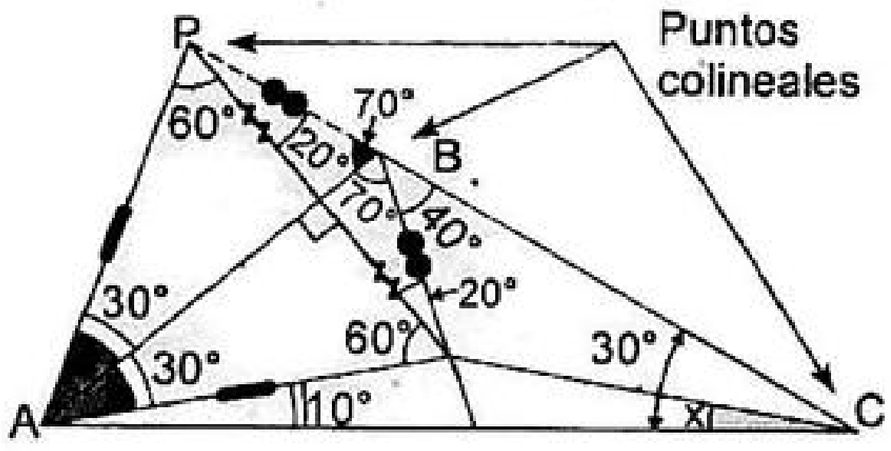


Paso N° 3. En el triángulo equilátero construido, se tiene la recta mediatriz, donde se cumple:

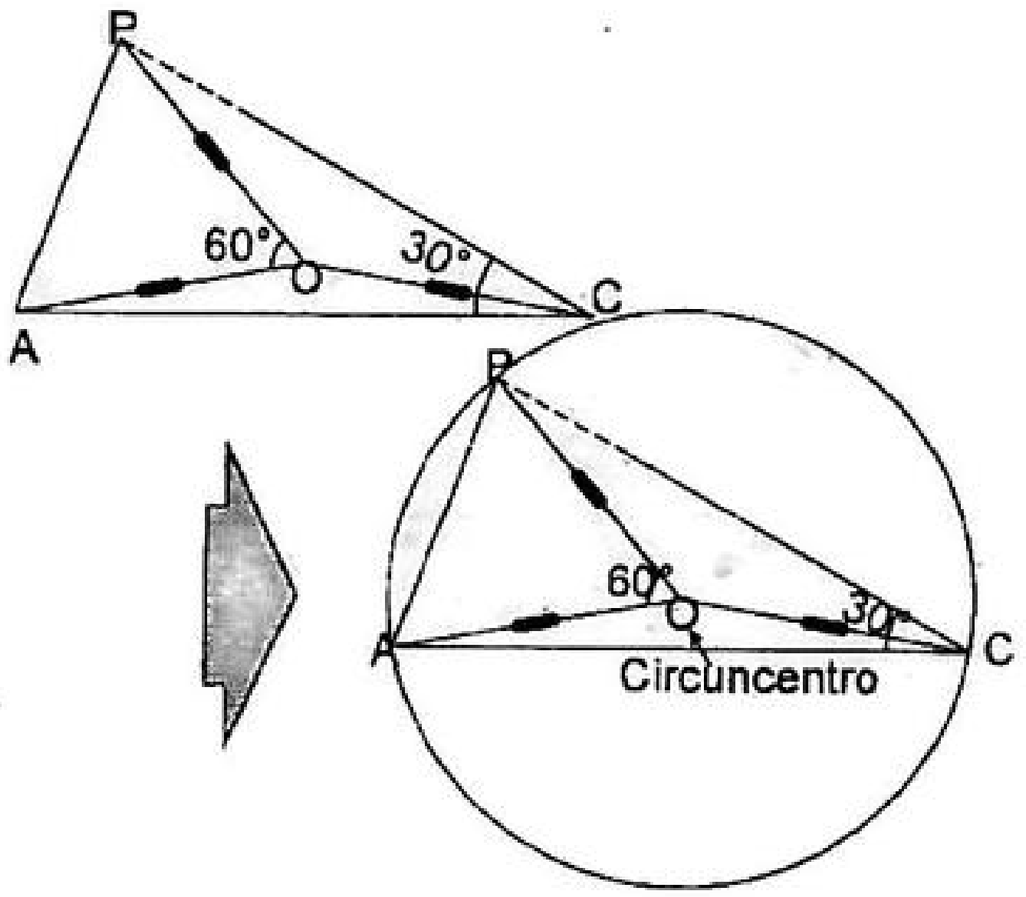


Paso N° 4. Ahora se observa que los puntos P, B y C son colineales, porque se tiene:



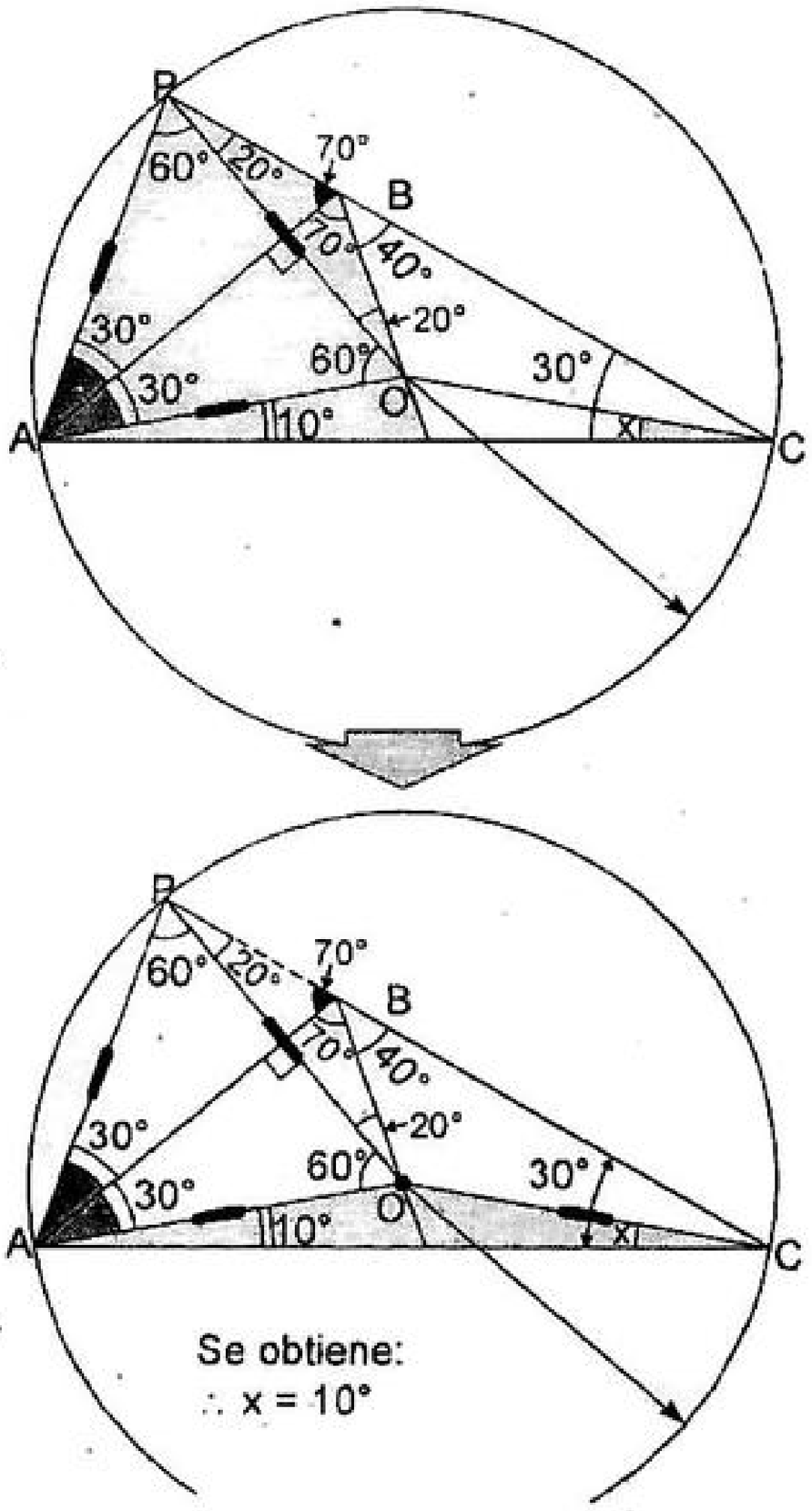


Paso N° 5. Se obtiene en la figura la siguiente propiedad del circuncentro:



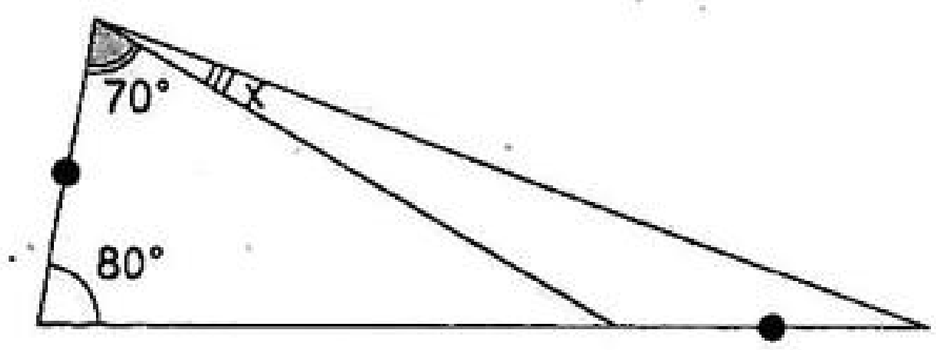
Scanned by CamScanner

Entonces en el problema:



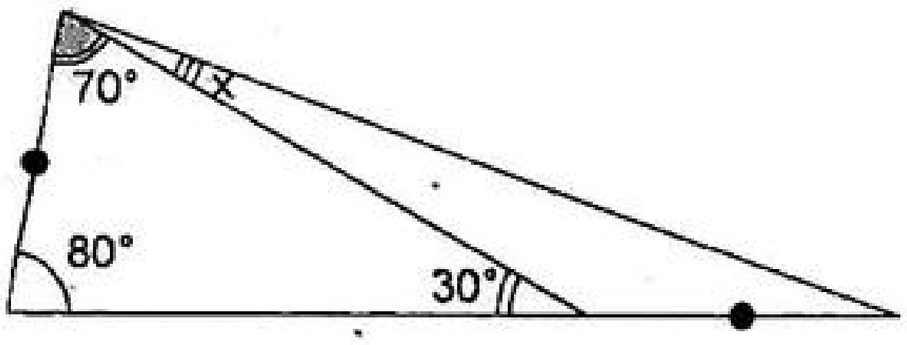
Se obtiene:
$\therefore x = 10°$

Problema 69. Calcular x.

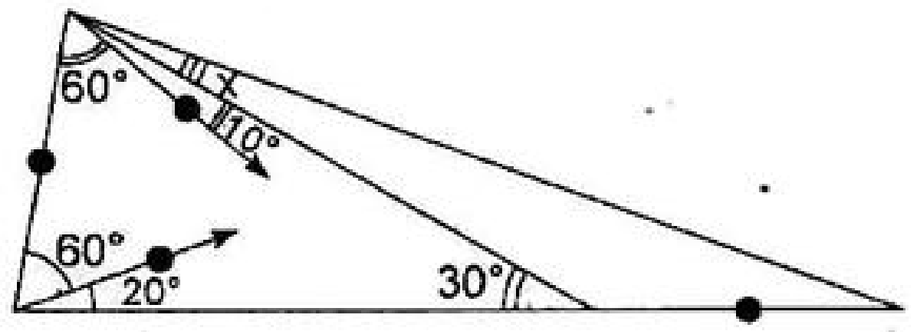


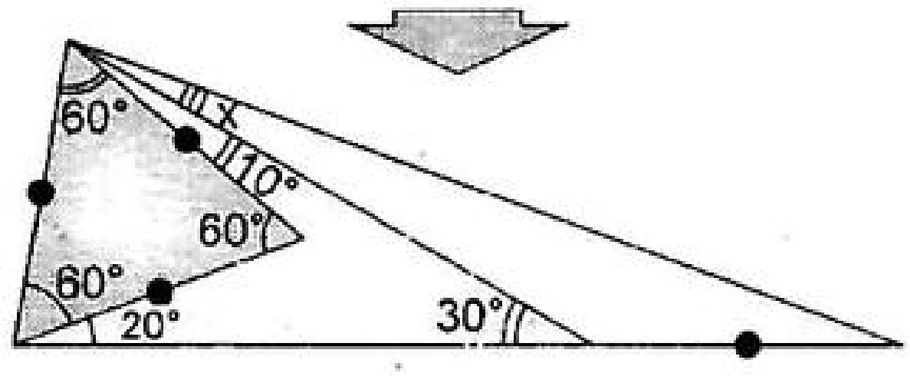
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos interiores del triángulo:

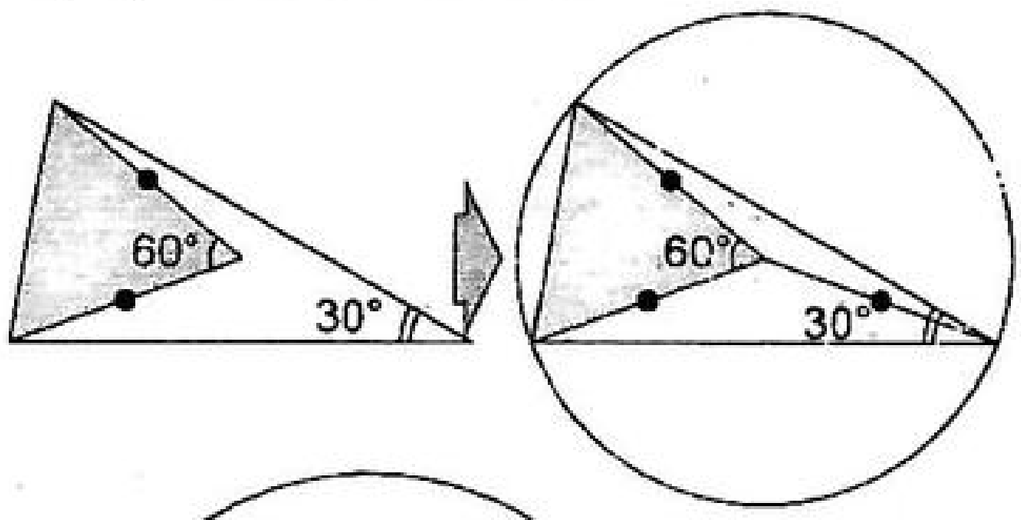


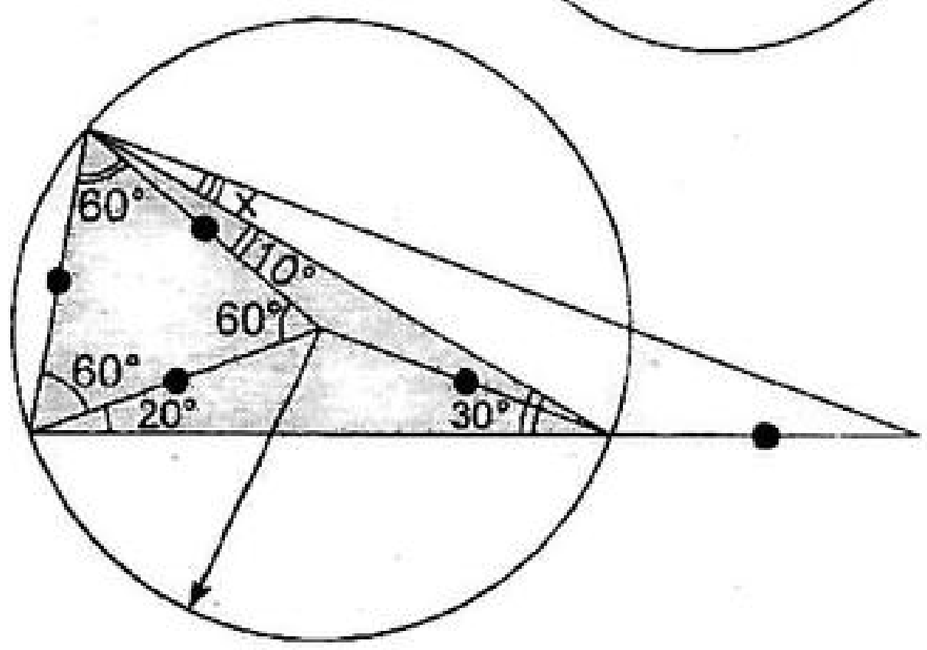
Paso N° 2. Construimos internamente al triángulo, un triángulo equilátero:

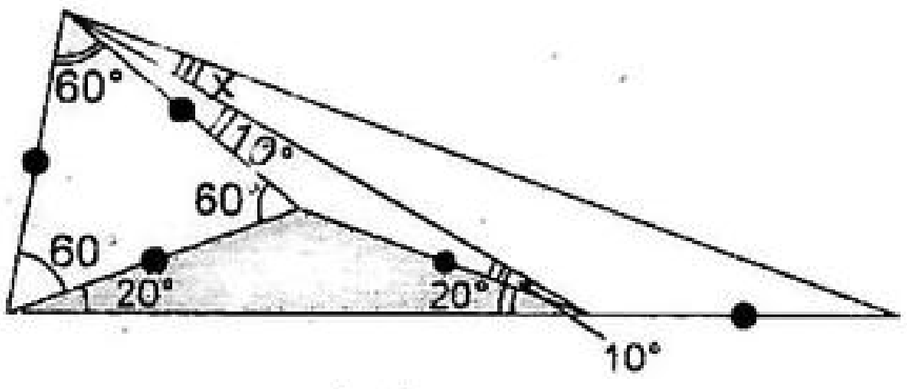




Paso N° 3. Observamos que se obtiene la siguiente propiedad del circuncentro:

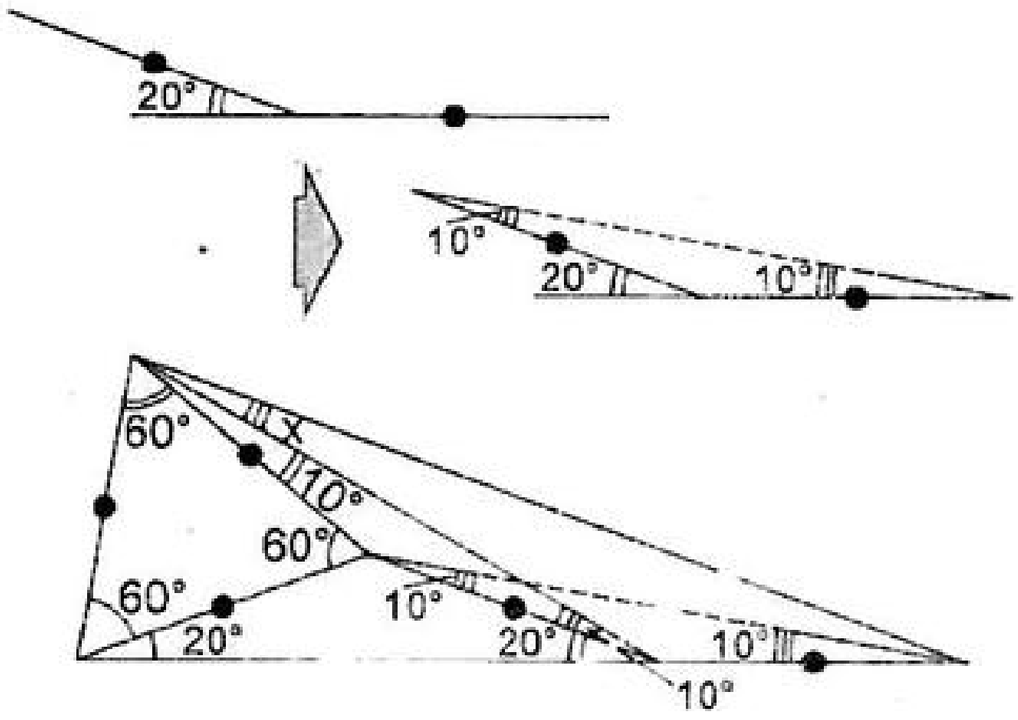




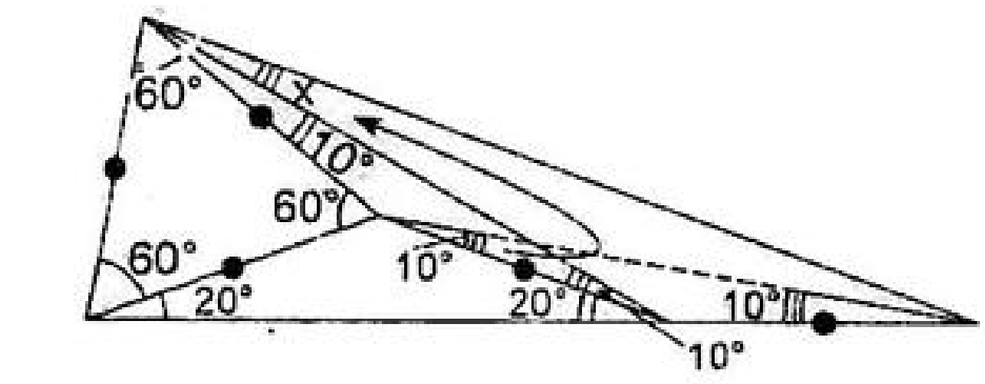


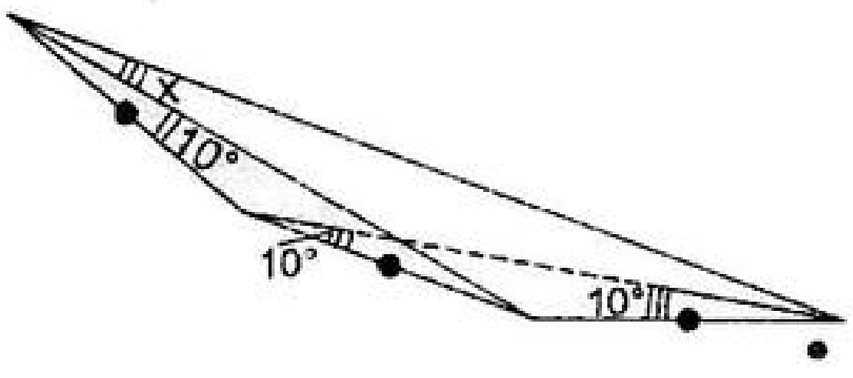
Scanned by CamScanner

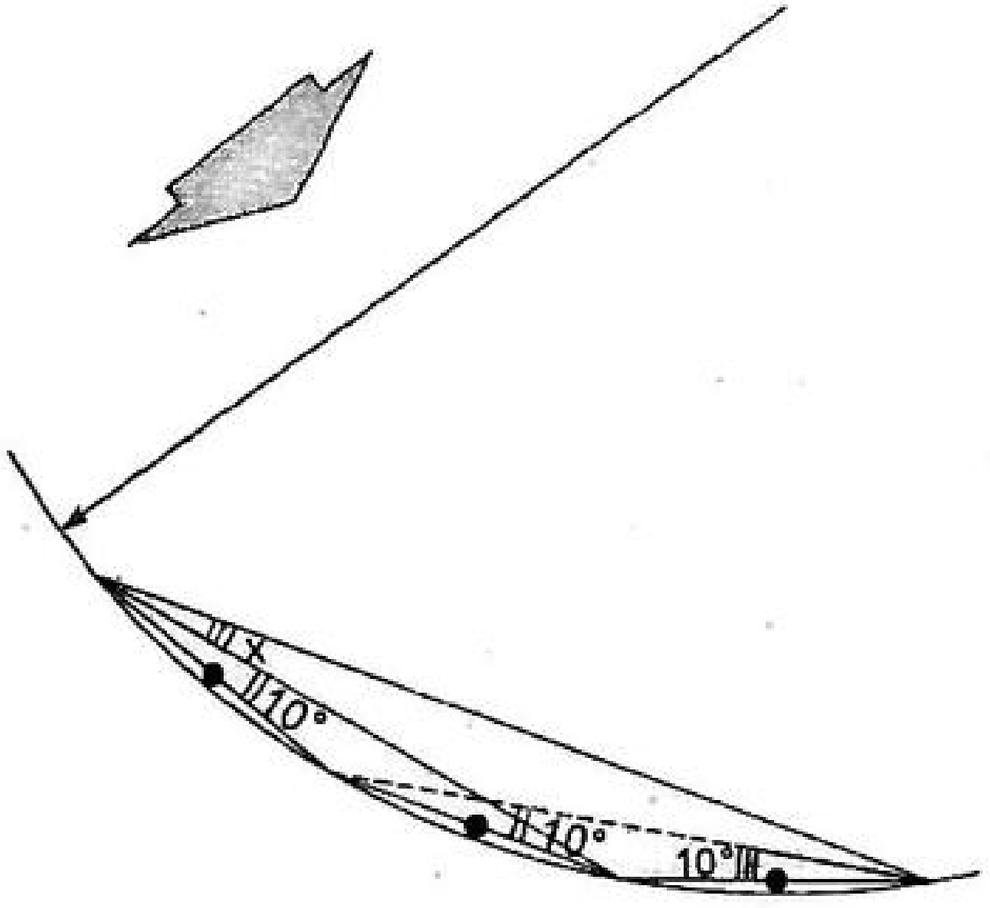
Paso N° 4. Ahora observamos un triángulo isósceles:



Paso N° 5. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote.

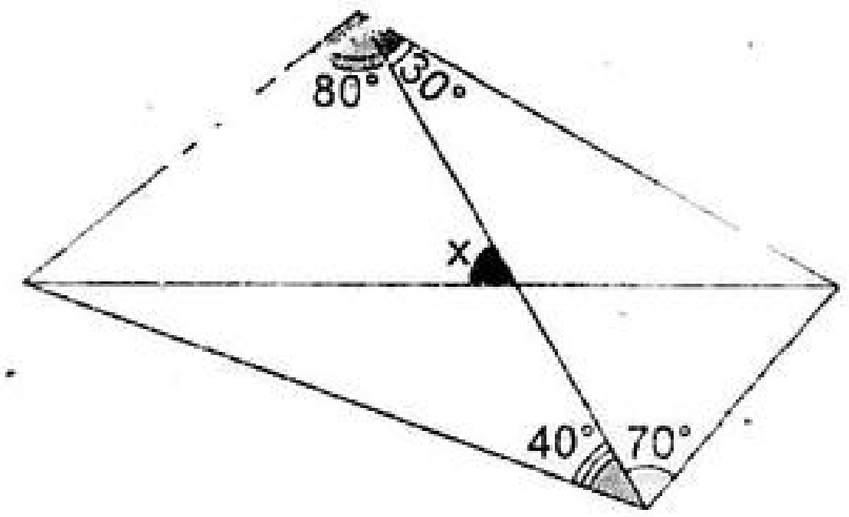






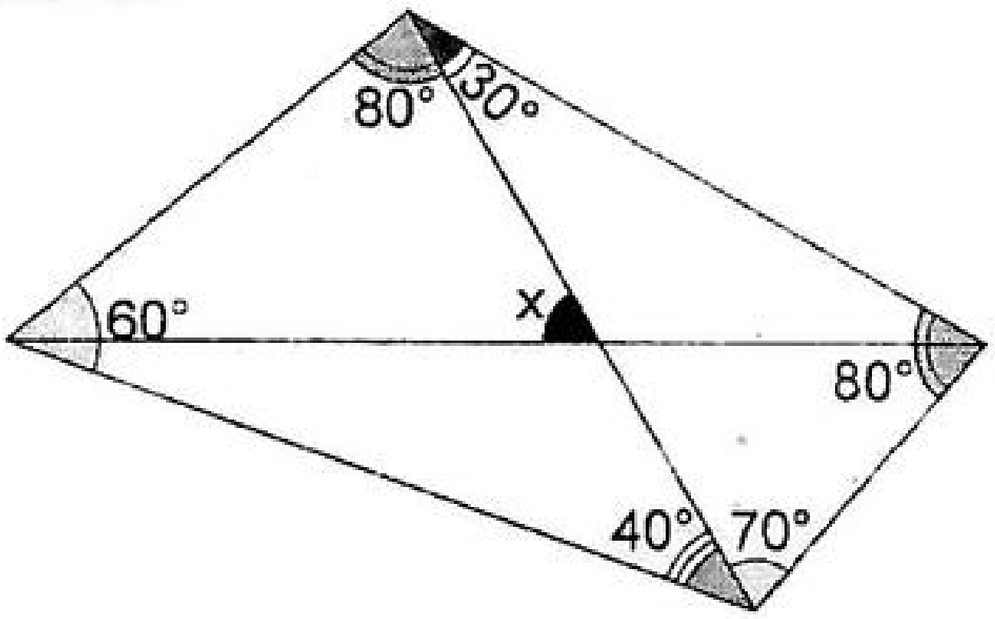
$\therefore x = 10°$

Problema 70. Calcular x.

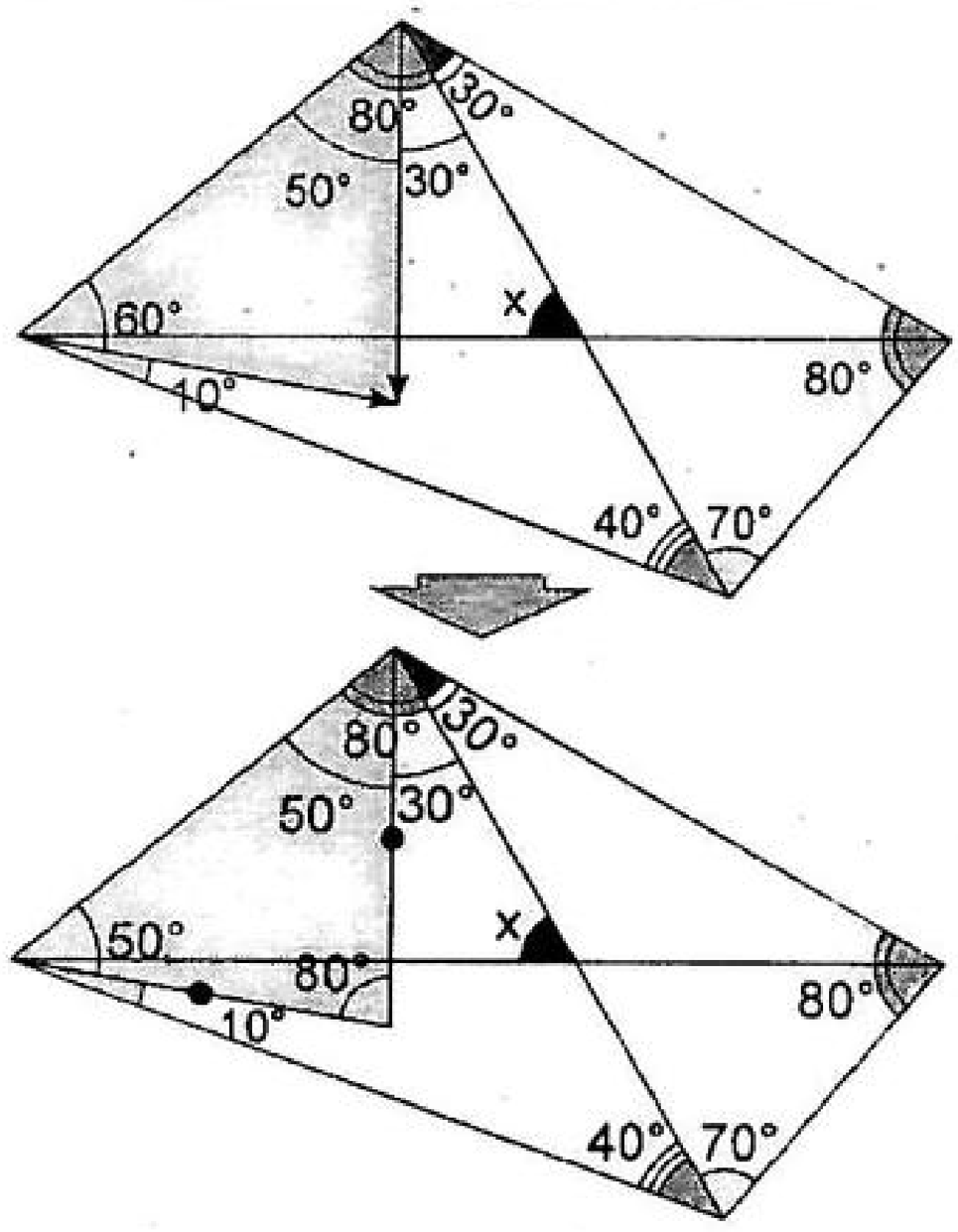


Resolución:

Paso N° 1. En la figura completamos sus ángulos internos:

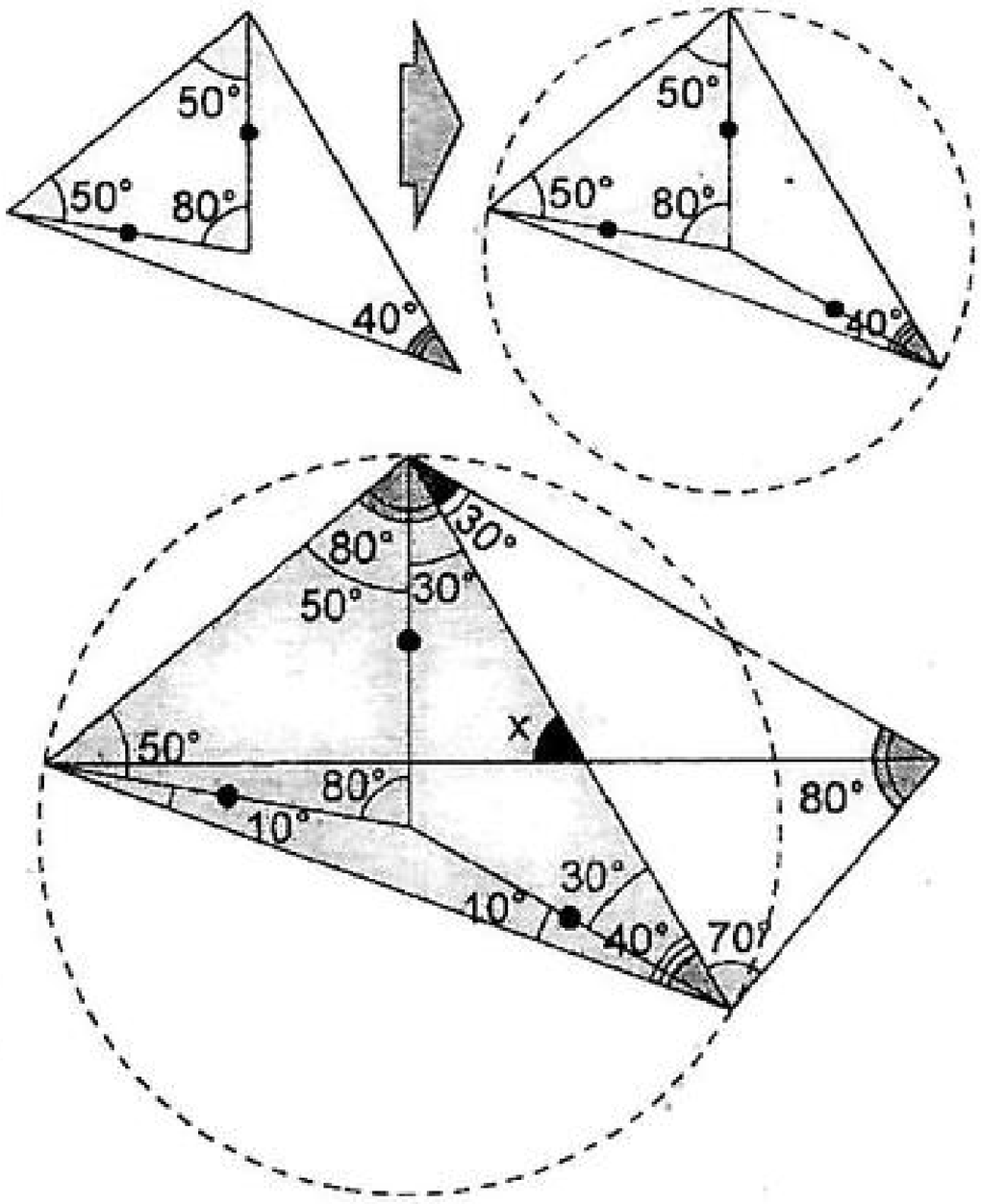


Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo, construimos internamente un triángulo isósceles; así:

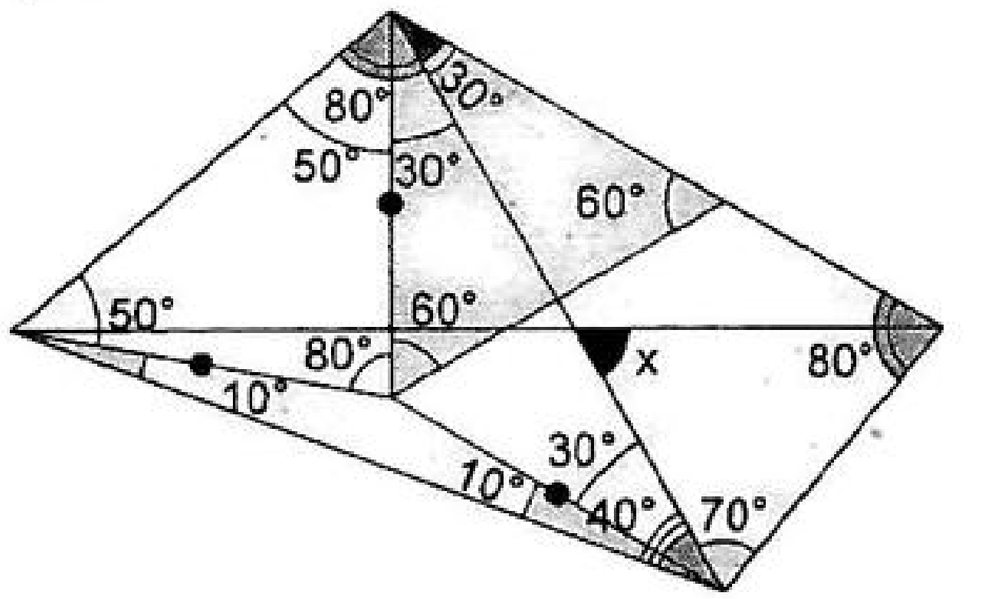


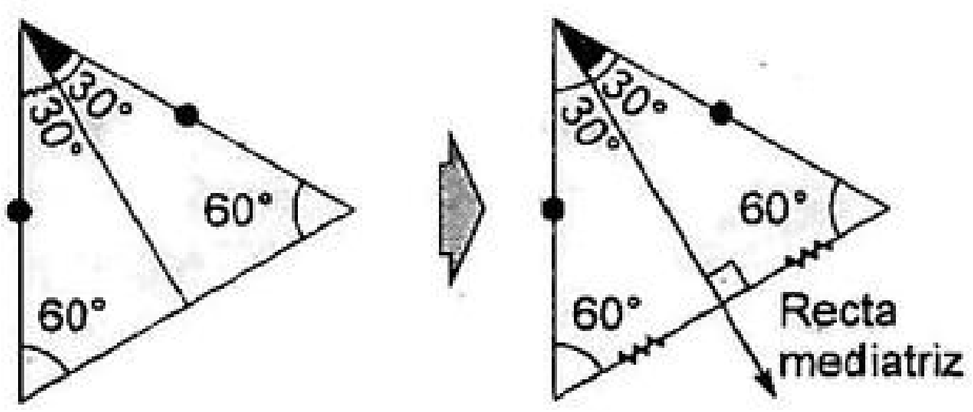
Scanned by CamScanner

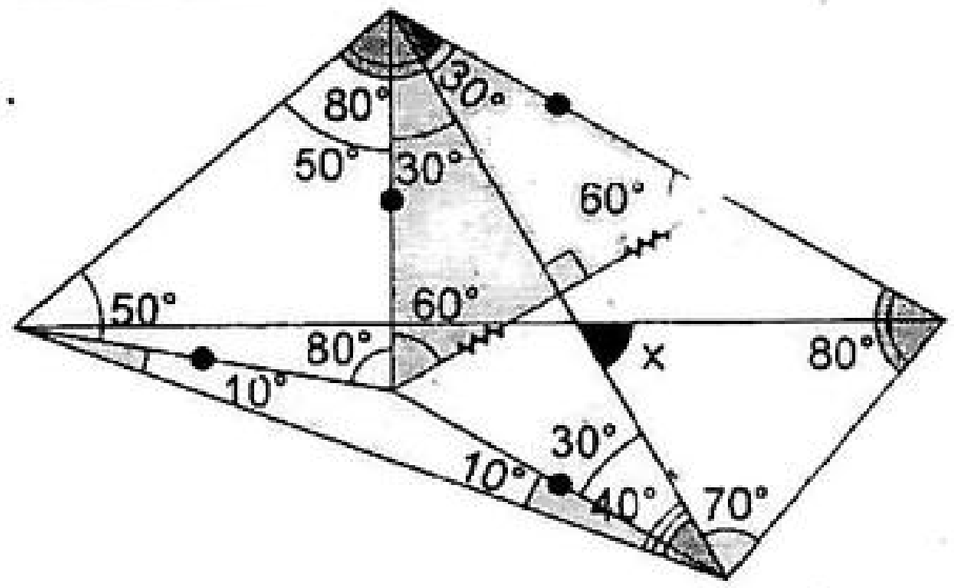
Paso N° 3. Se obtiene con el trazo realizado la siguiente propiedad del circuncentro:



Paso N° 4. Observamos ángulos de 60° (30° + 30°), entonces construimos un triángulo equilátero, así:

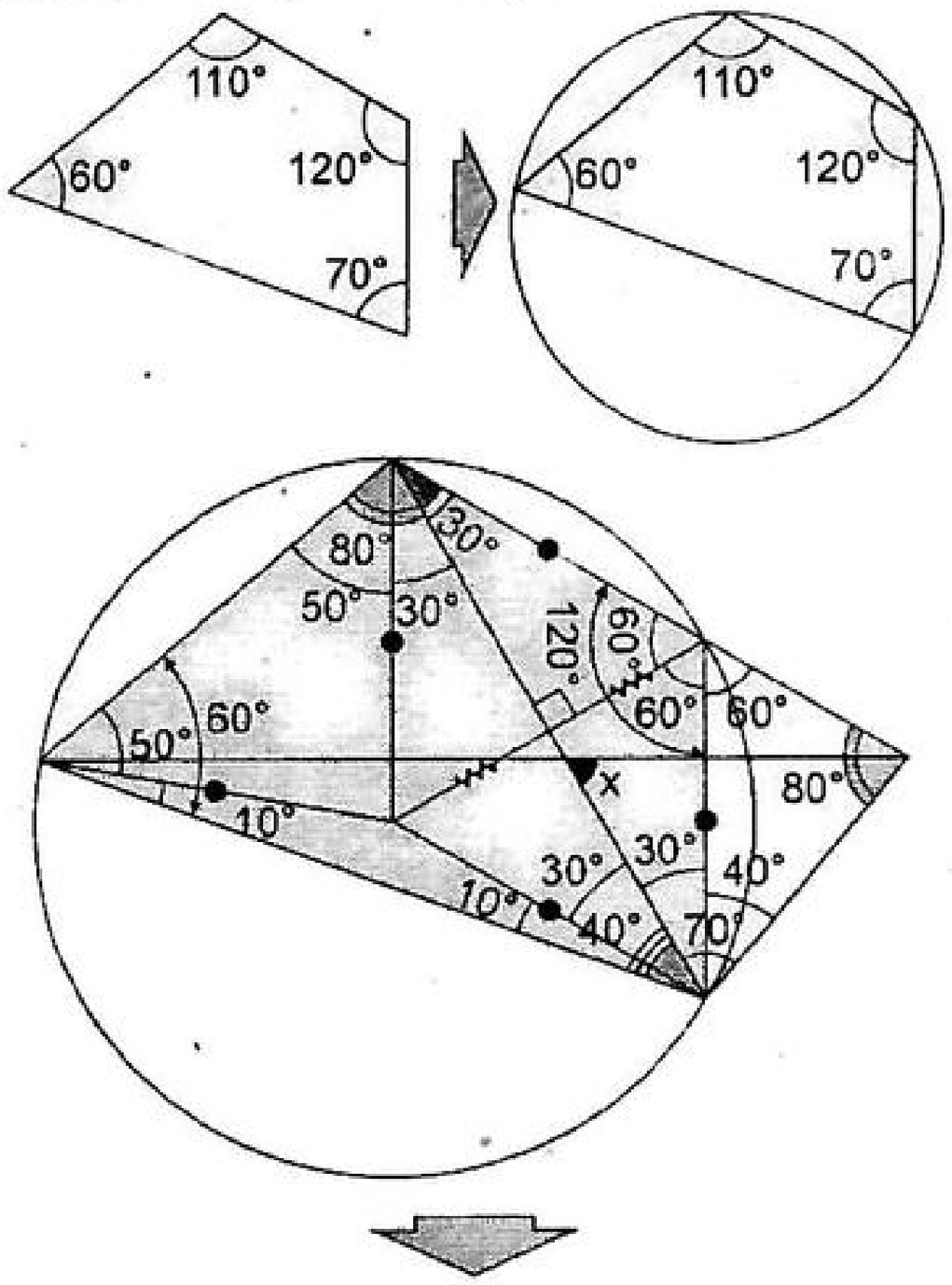






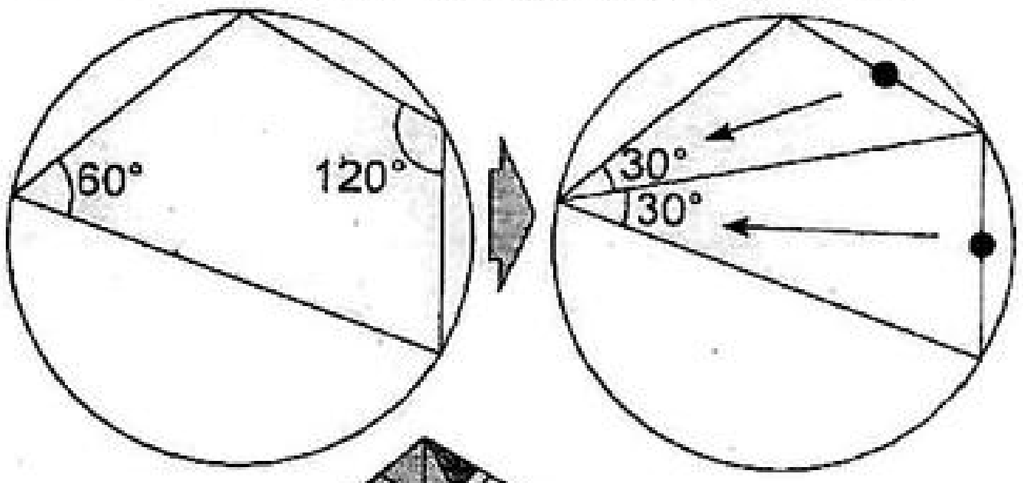
Obtenemos también otro triángulo equilátero

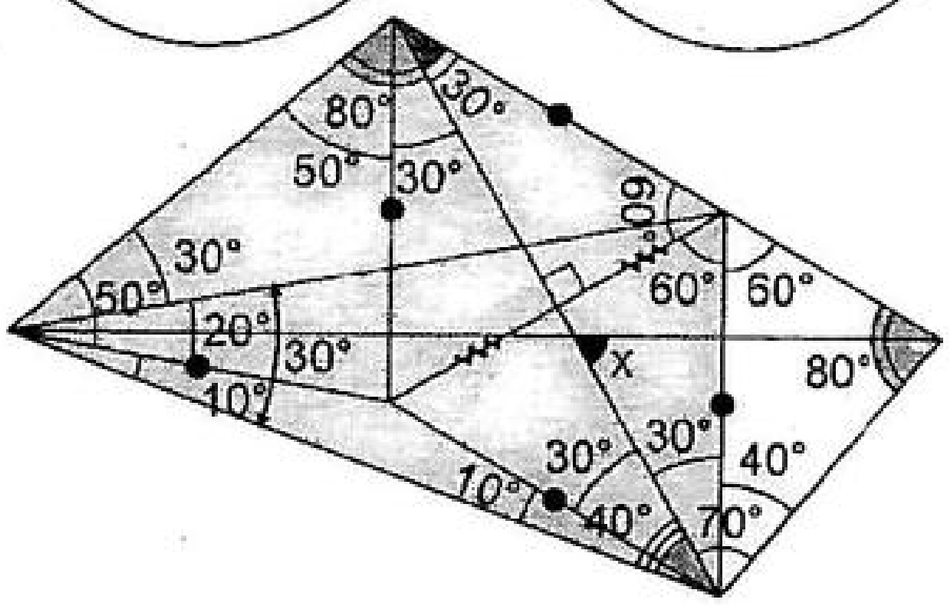
Paso N° 5. Ahora observamos, que se ha formado un cuadrilátero, donde cumple:



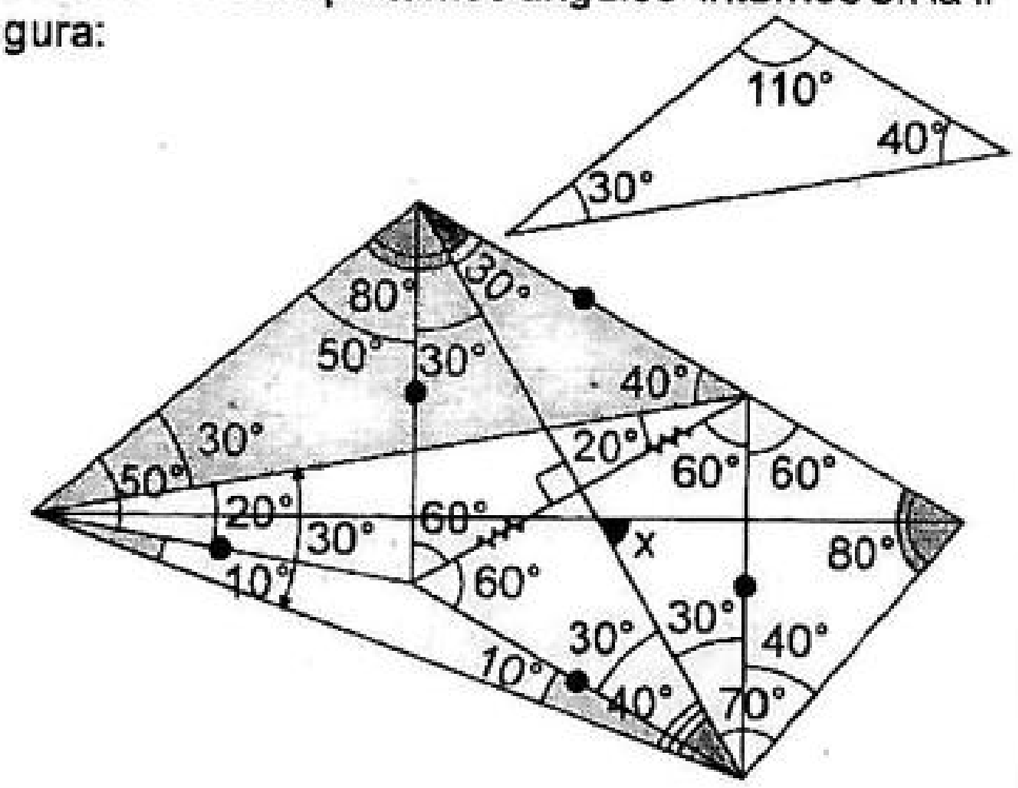
Scanned by CamScanner

También observamos la siguiente propiedad:

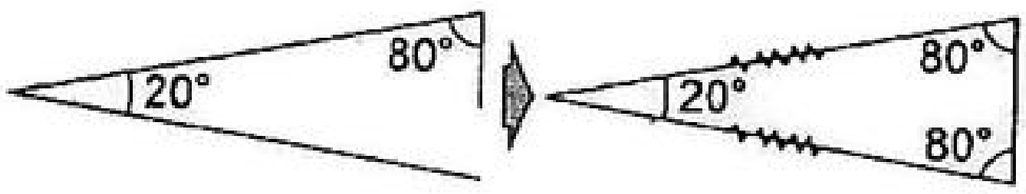




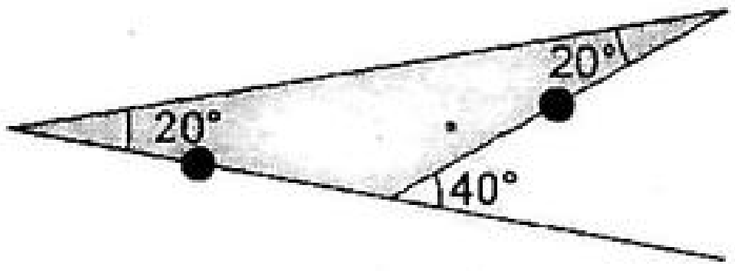
Paso N° 6. Completamos ángulos internos en la figura:

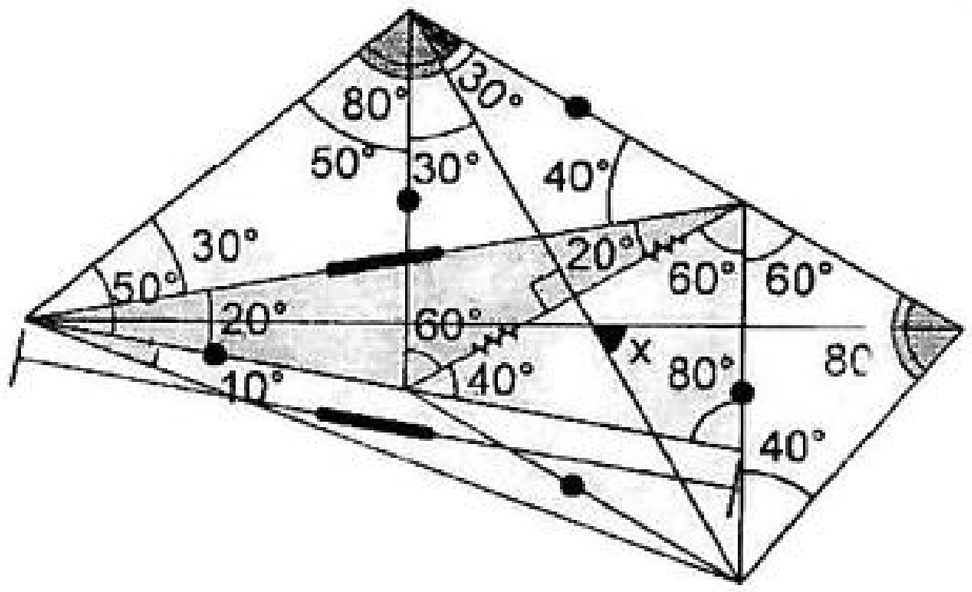


Paso N° 6. Observamos que se obtiene un triángulo isósceles de la forma:



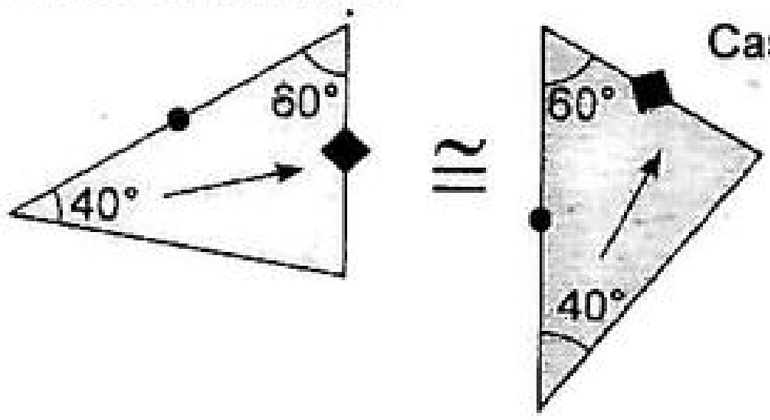
*También se observa:

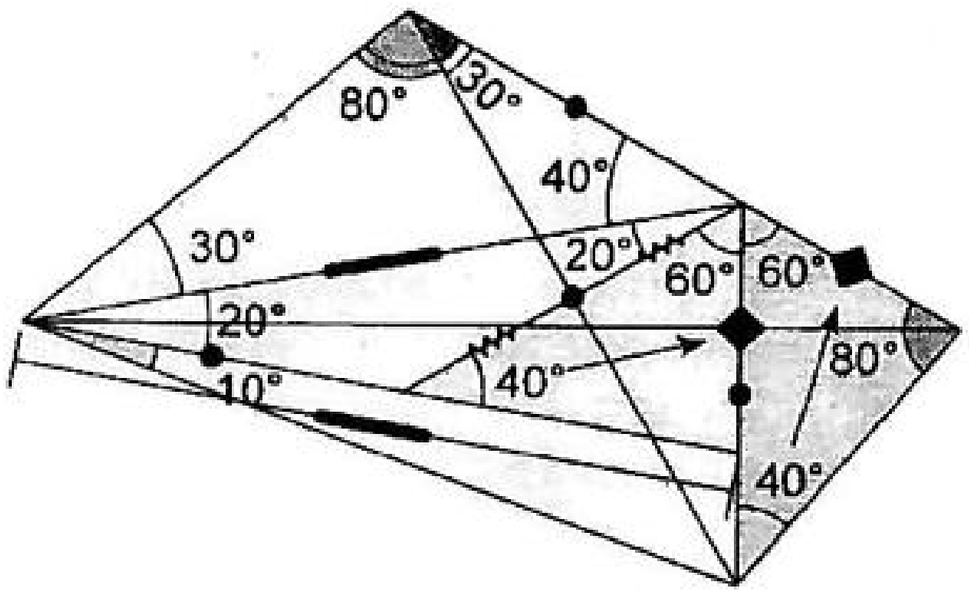




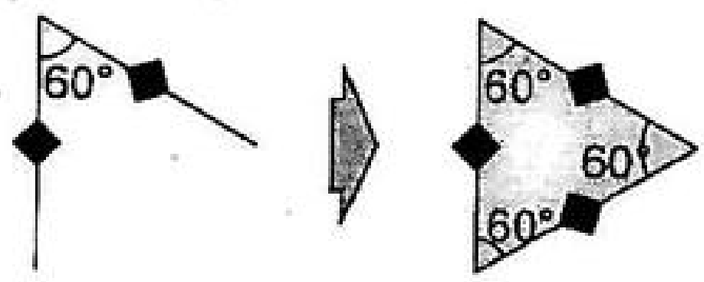
Paso N° 7. Ahora obtenemos dos triángulos congruentes de la forma:

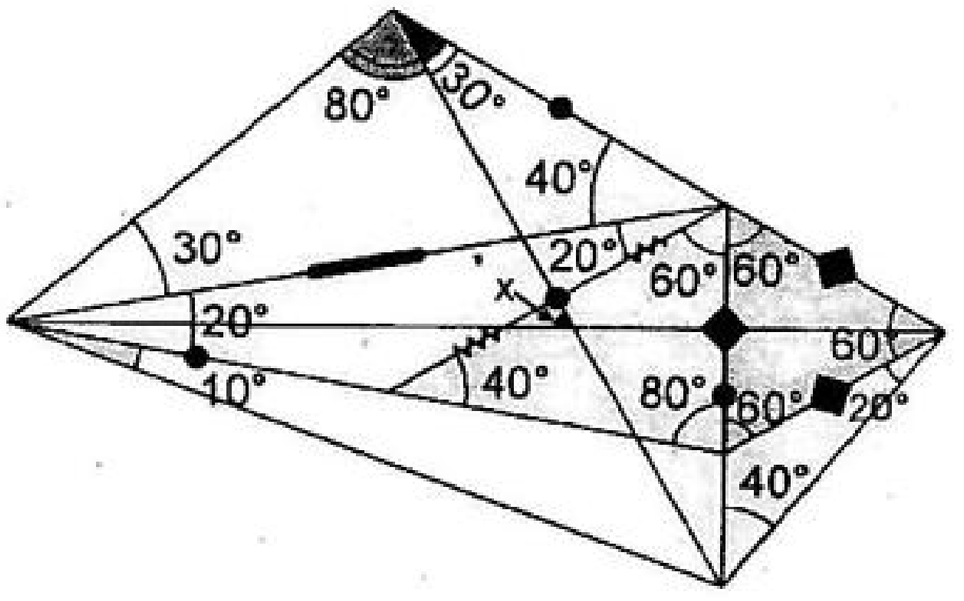
Caso:A.L.A.





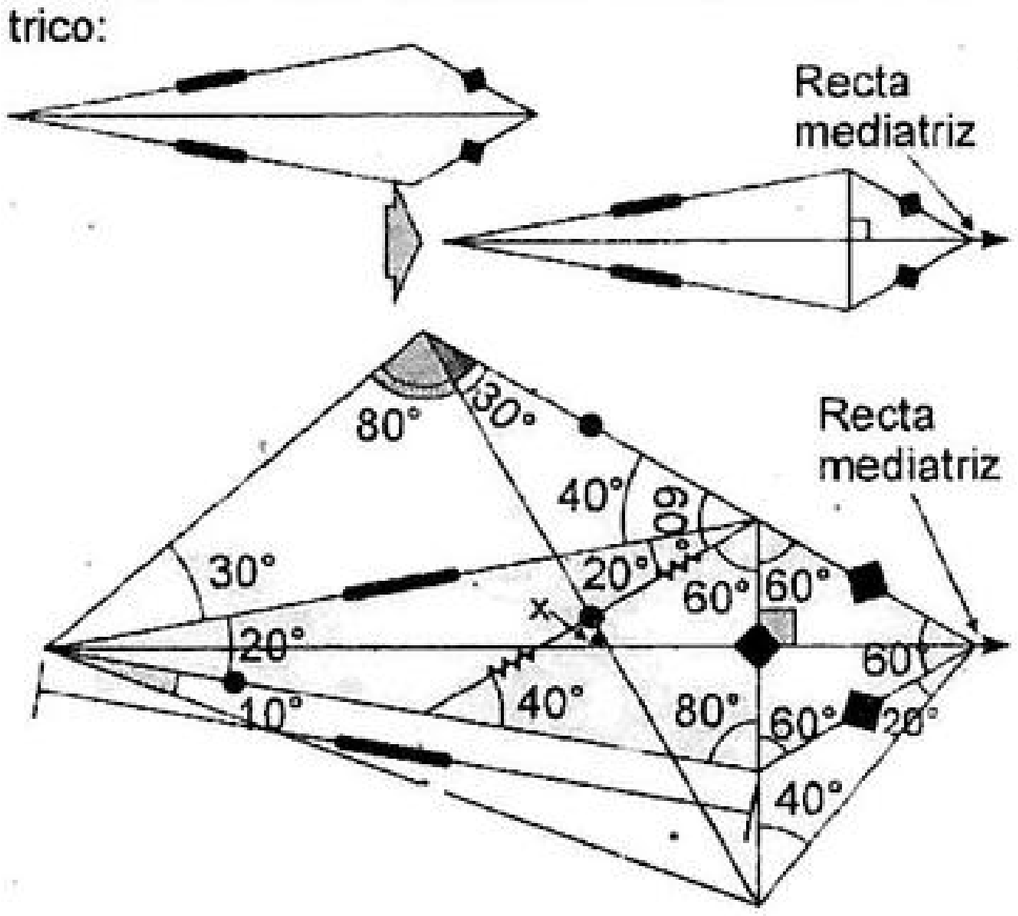
Paso N° 8. Se observa un triángulo equilátero:



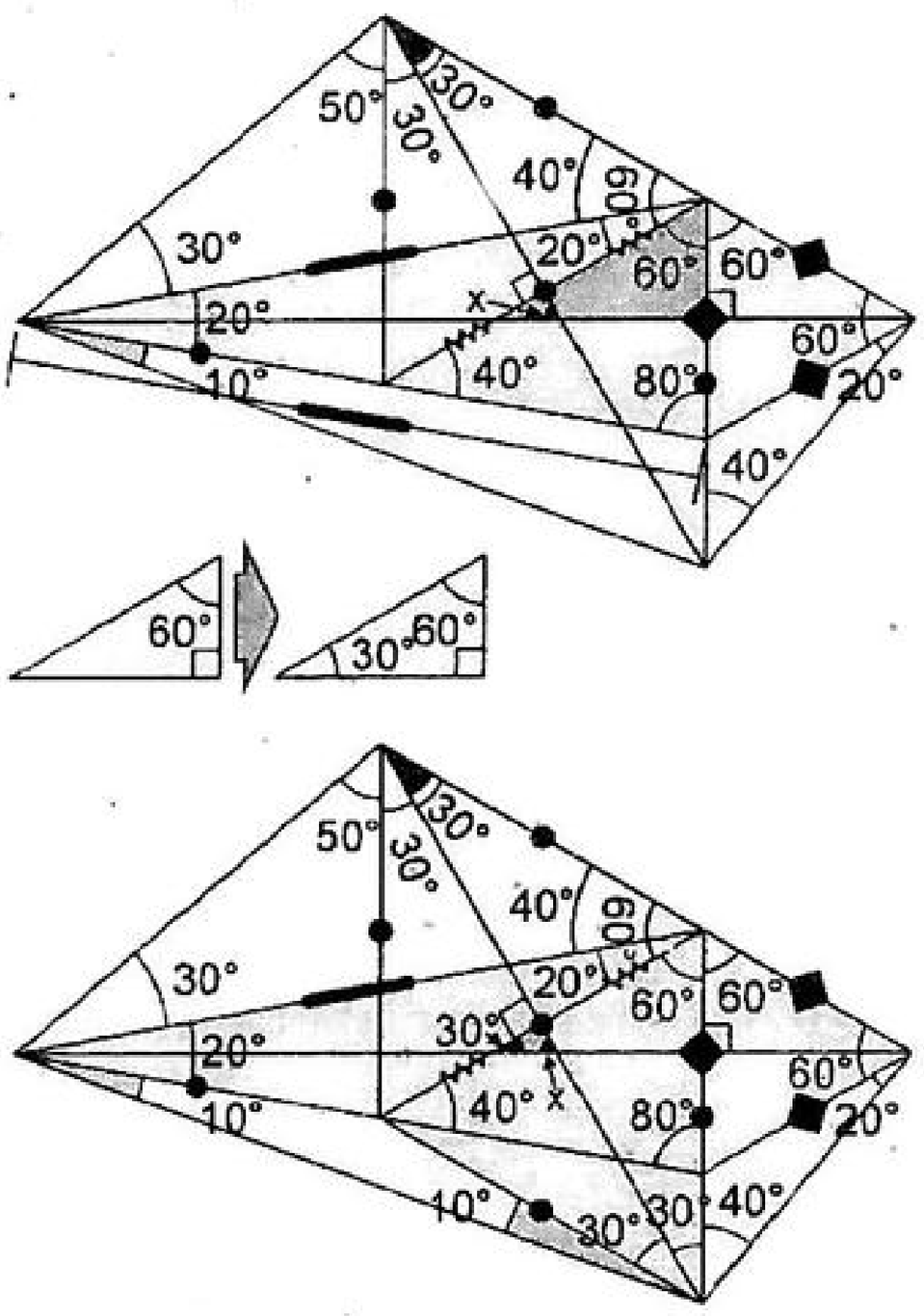


Scanned by CamScanner

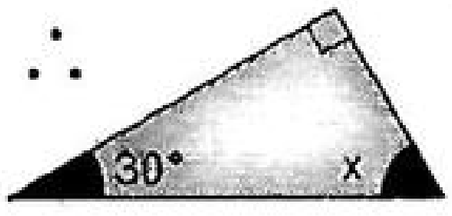
Paso N° 9. Ahora obtenemos un trapezoide simétrico:



Paso N° 10. Se observa un triángulo rectángulo:

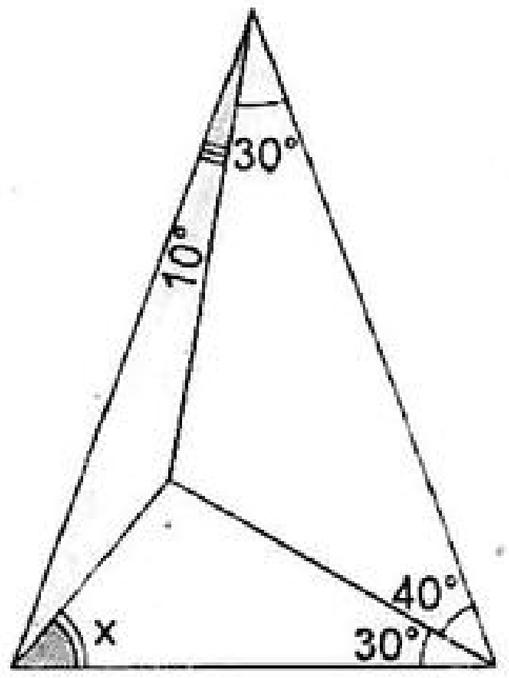


Tenemos, ampliando el triángulo pequeño:



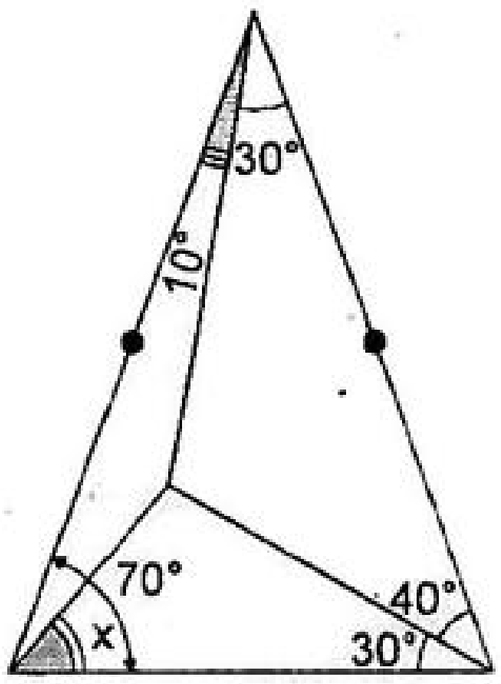
$\Rightarrow x = 60°$

Problema 71. Calcular x.

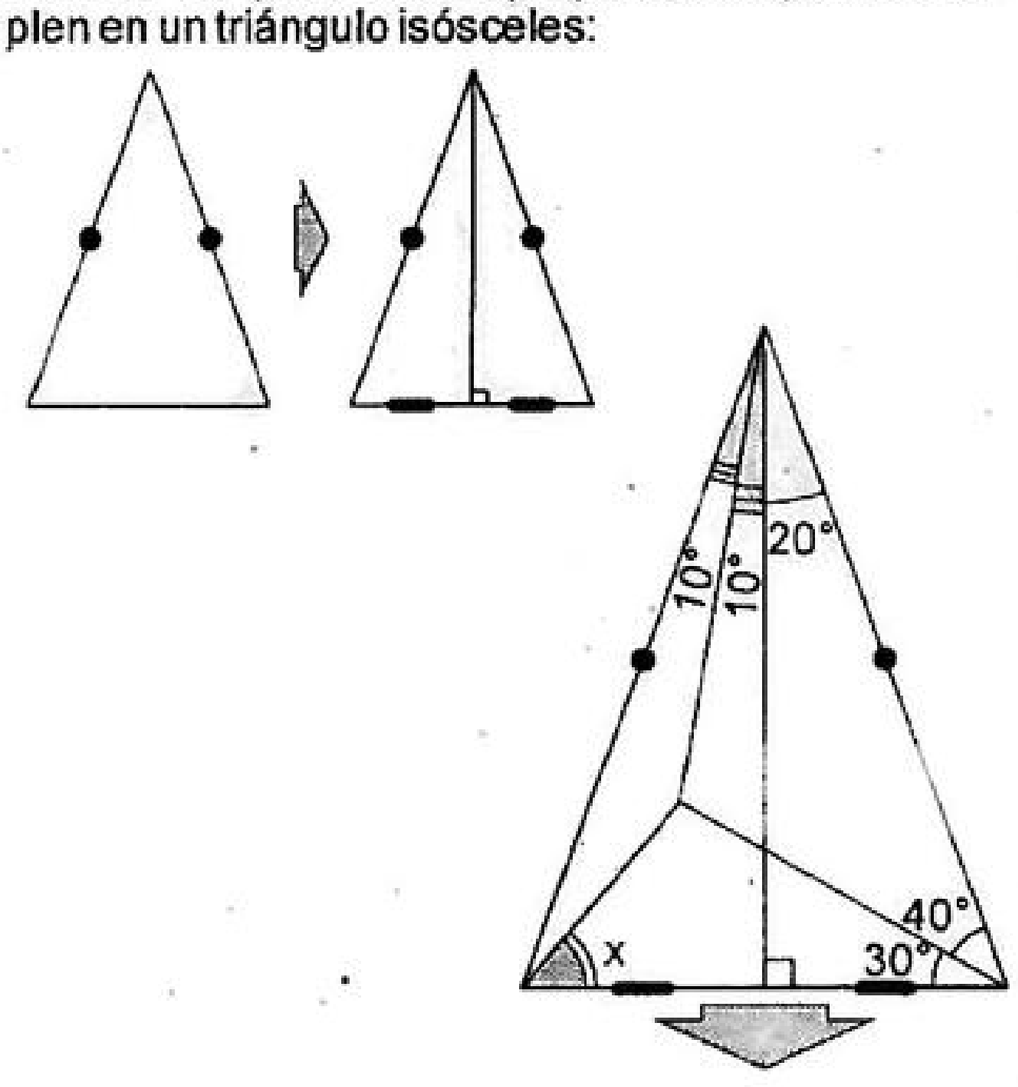


Resolución:

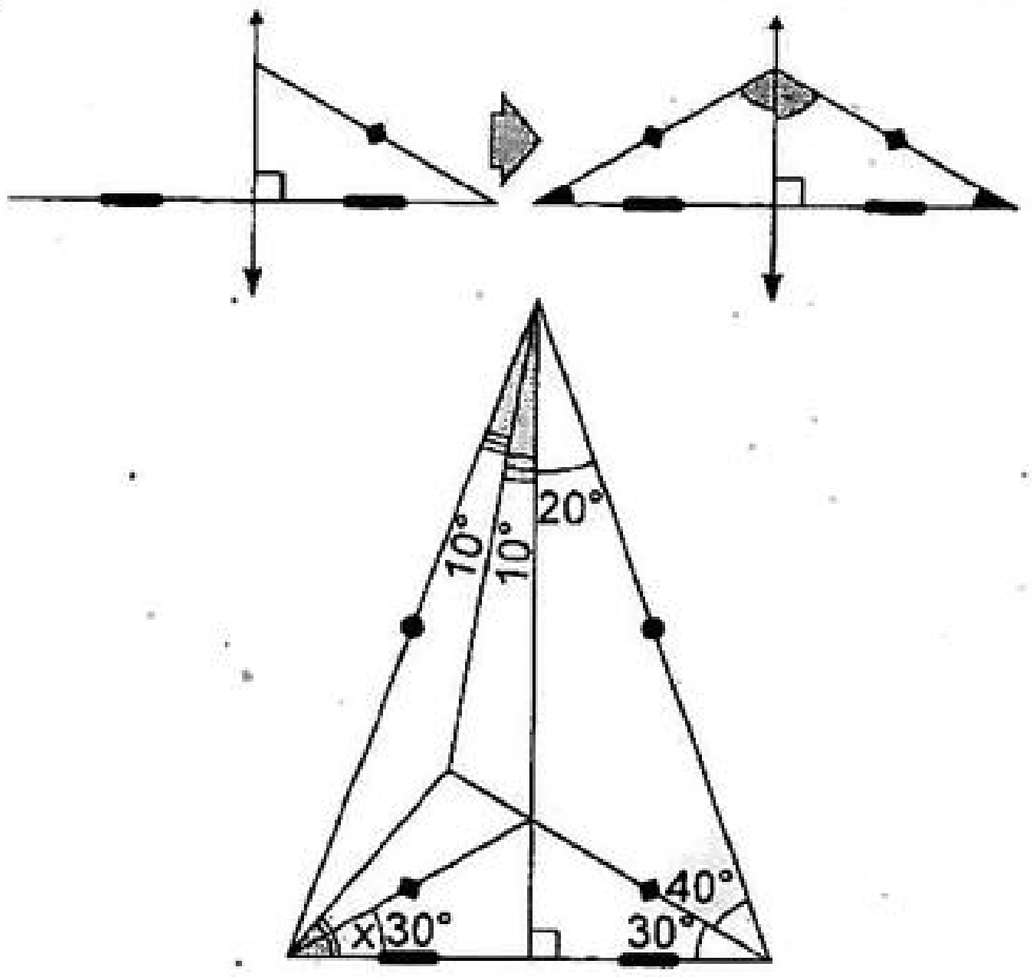
Paso N° 1. Completando ángulos internos y se observa que es un triángulo isósceles:



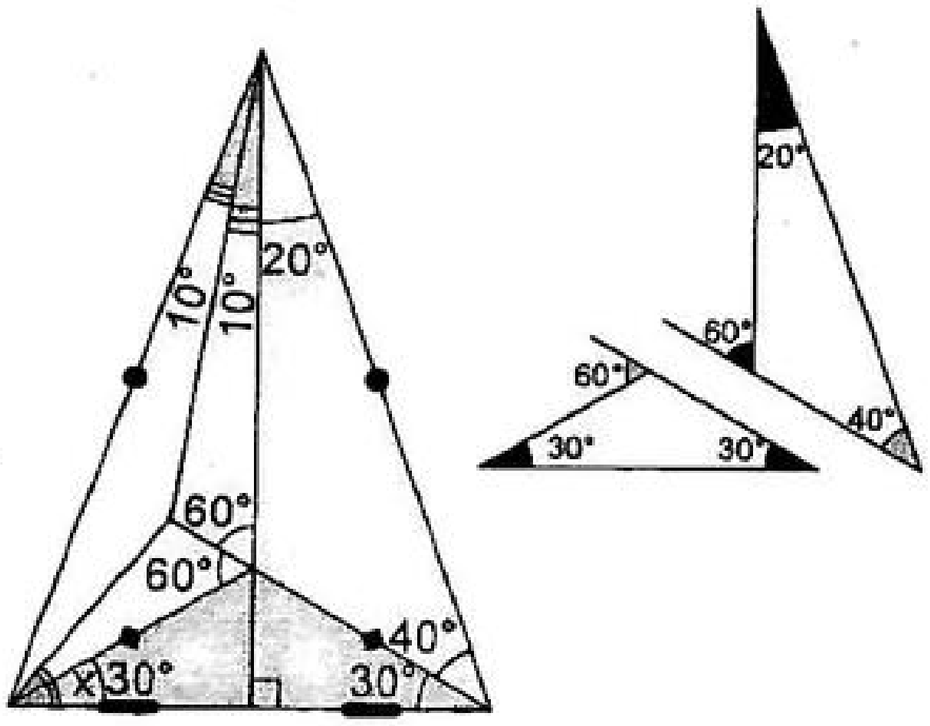
Paso N° 2. Aplicamos las propiedades que se cumplen en un triángulo isósceles:



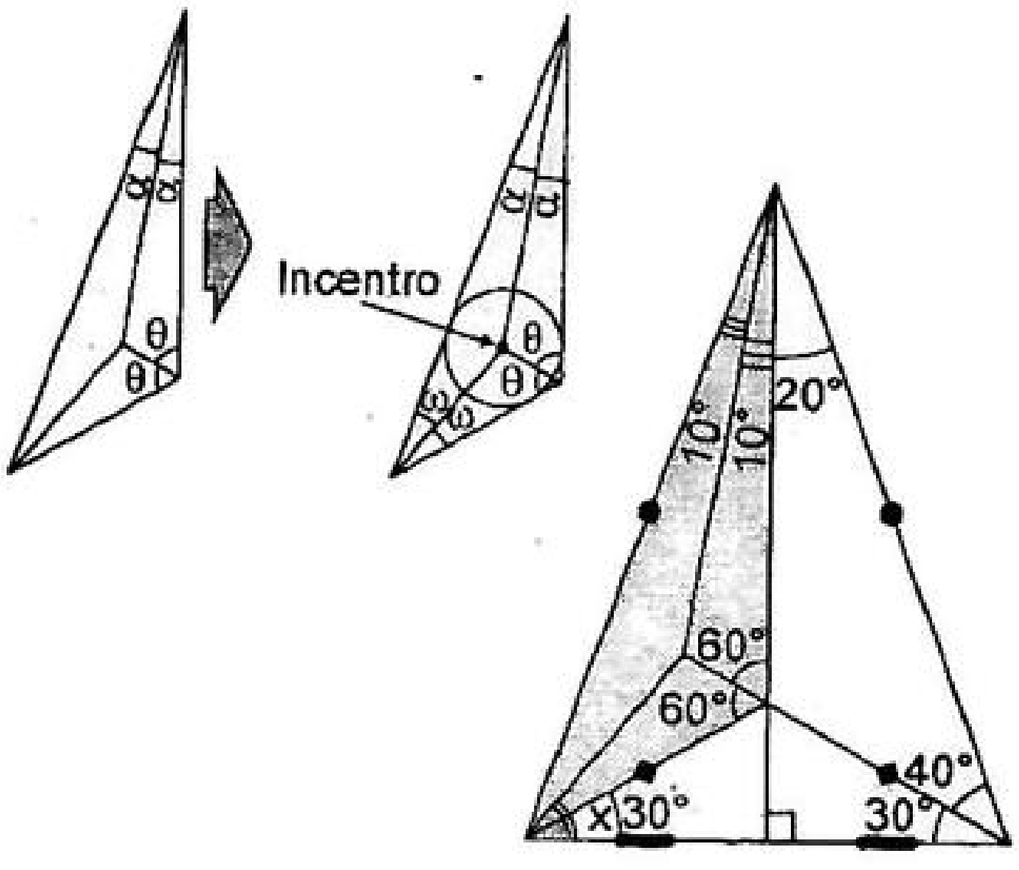
Scanned by CamScanner

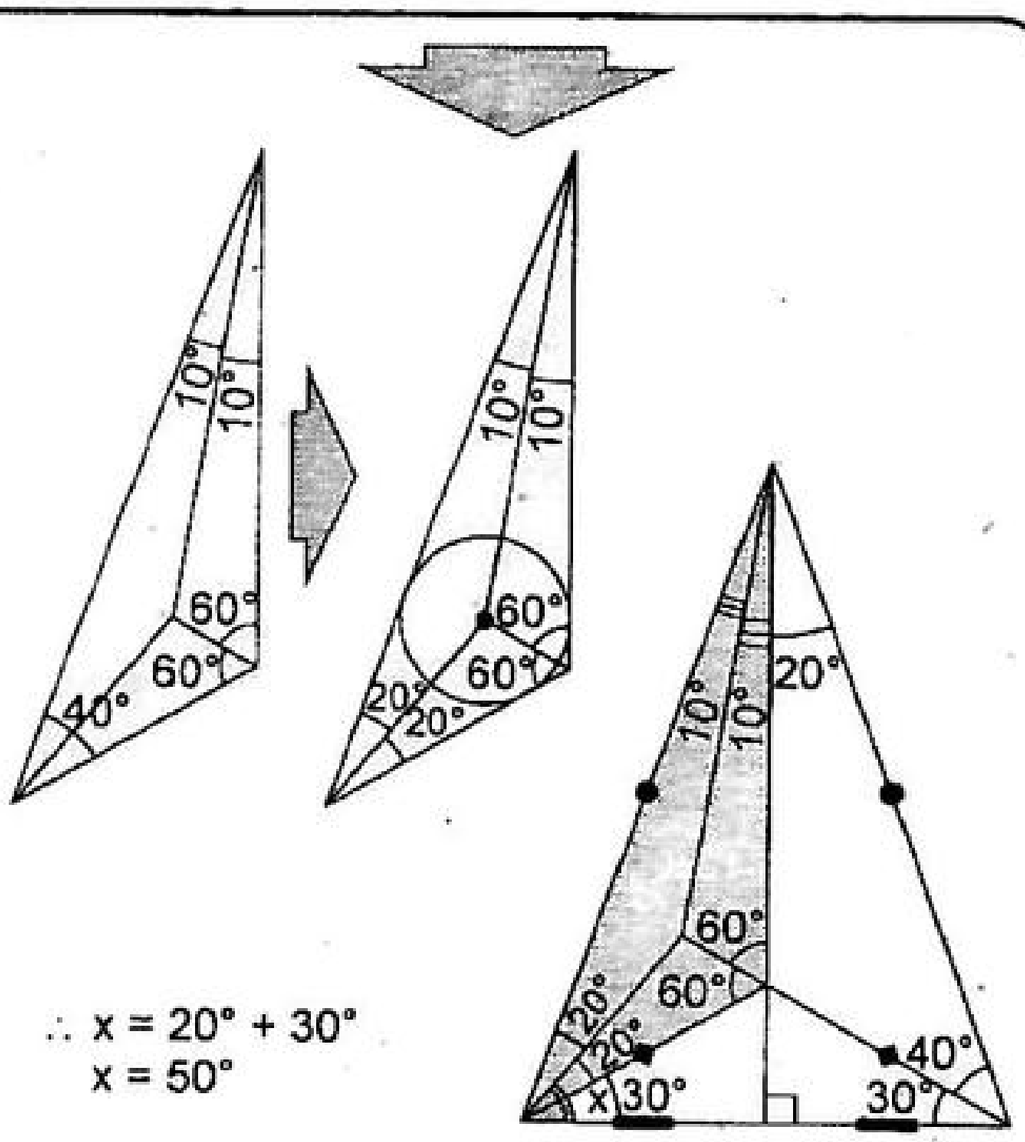


Paso N° 3. En la figura obtenida, completar los ángulos internos:



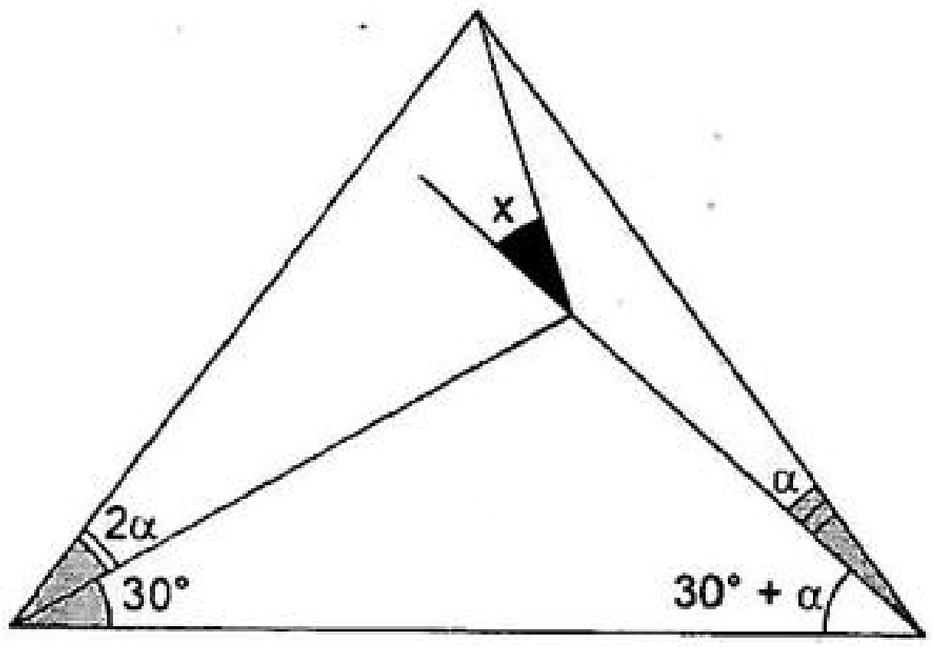
Paso N° 4. Se observa en la figura un triángulo donde cumple:





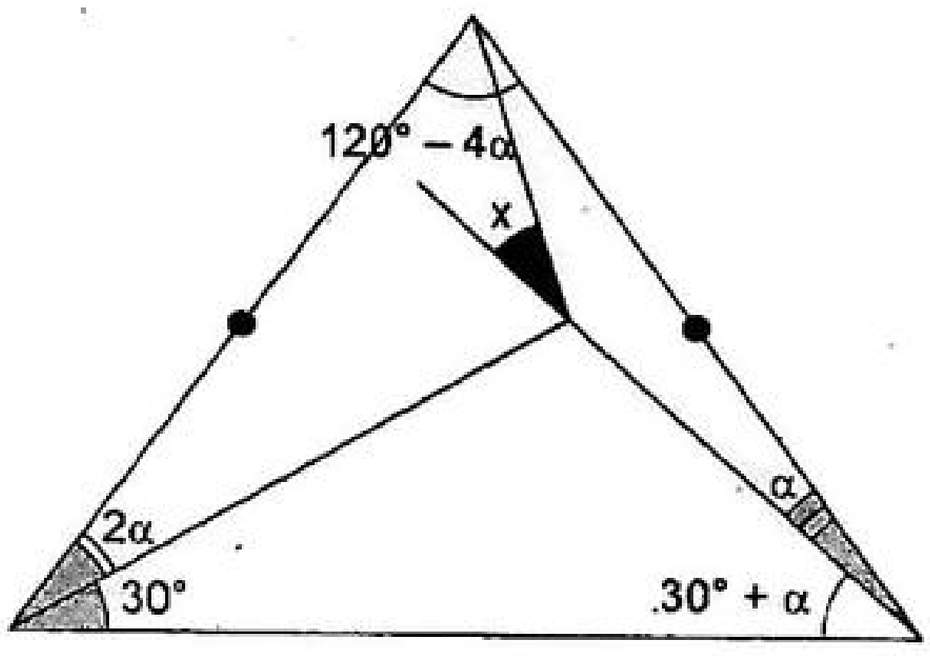
∴ x = 20° + 30°
x = 50°

Problema 72. Calcular x.



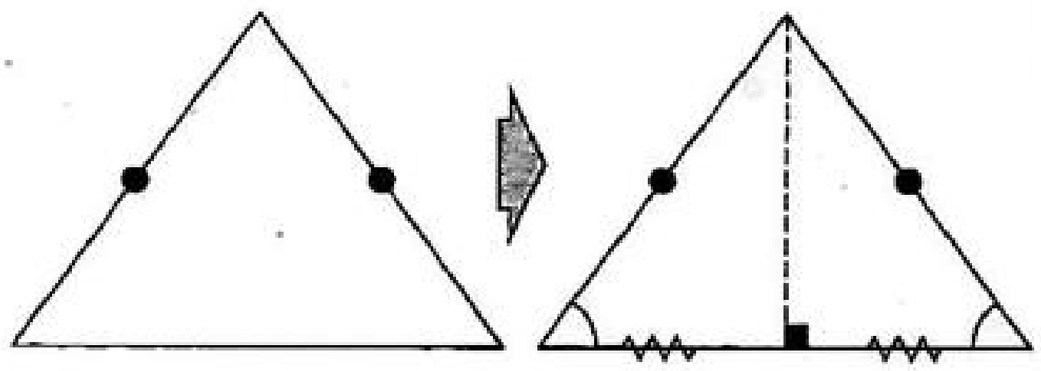
Resolución:

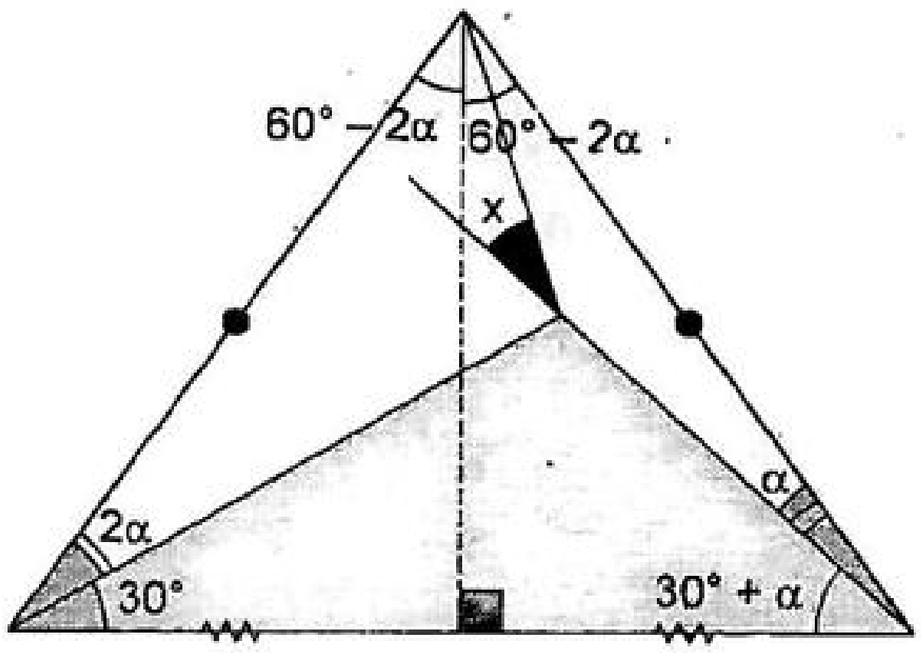
Paso N° 1. Se observa que es un triángulo isósceles:

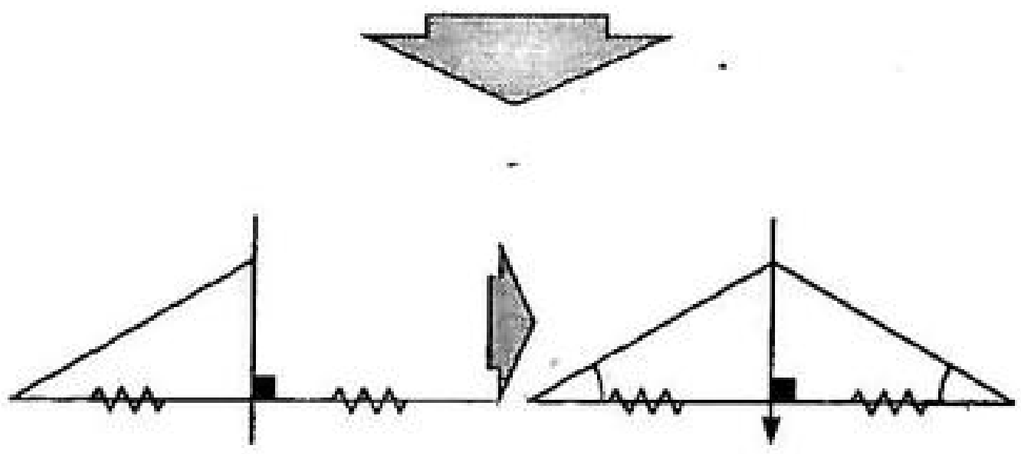


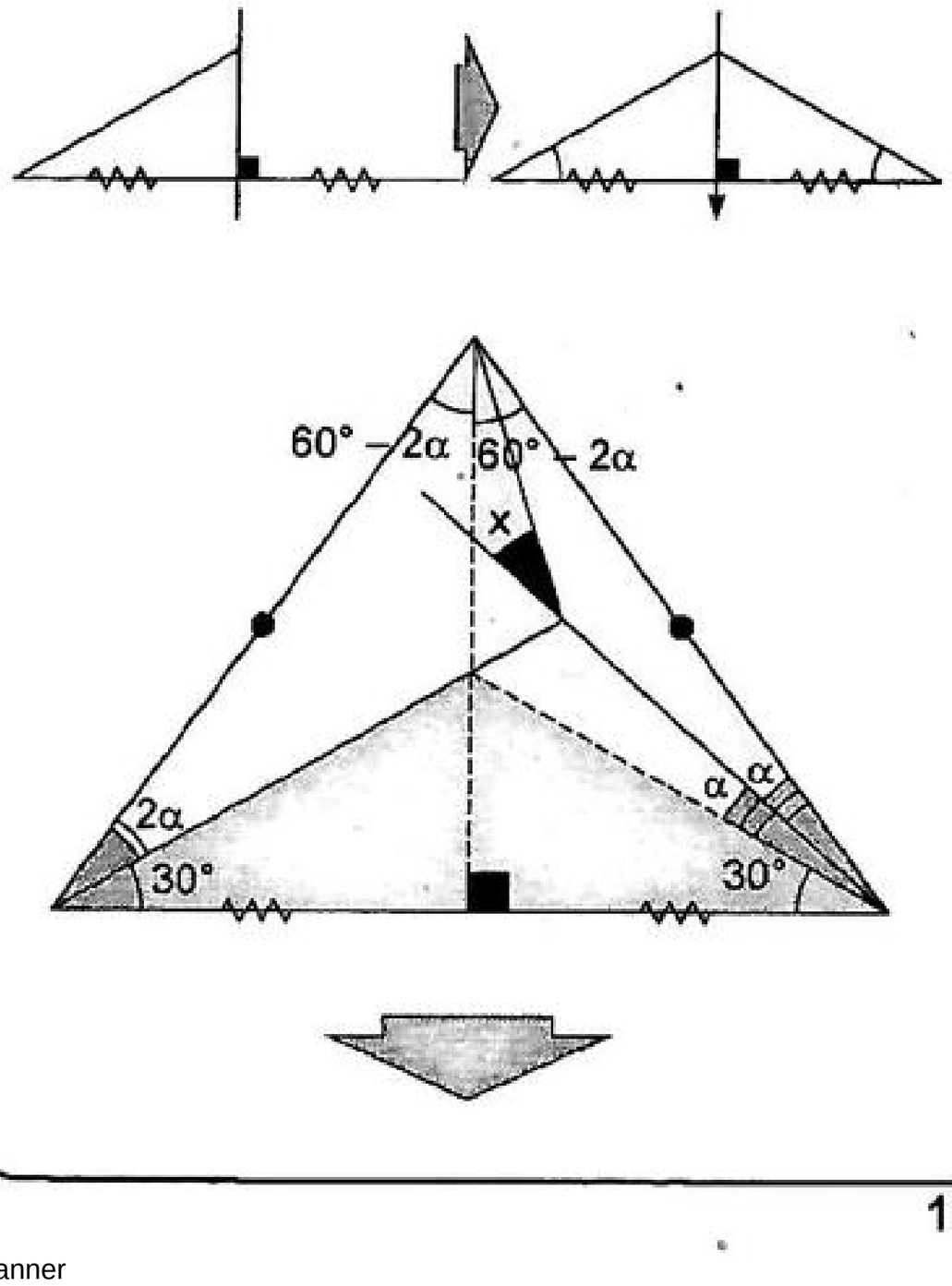
Scanned by CamScanner

Paso N° 2. Aplicamos las propiedades que se cumplen en un triángulo isósceles:

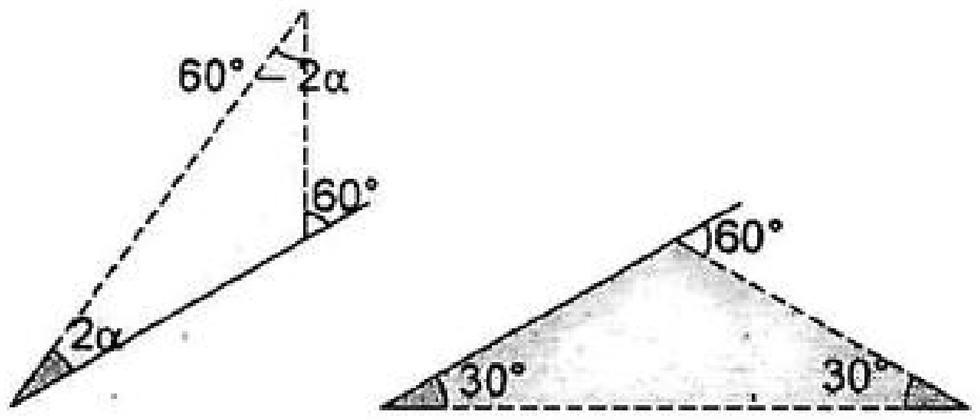


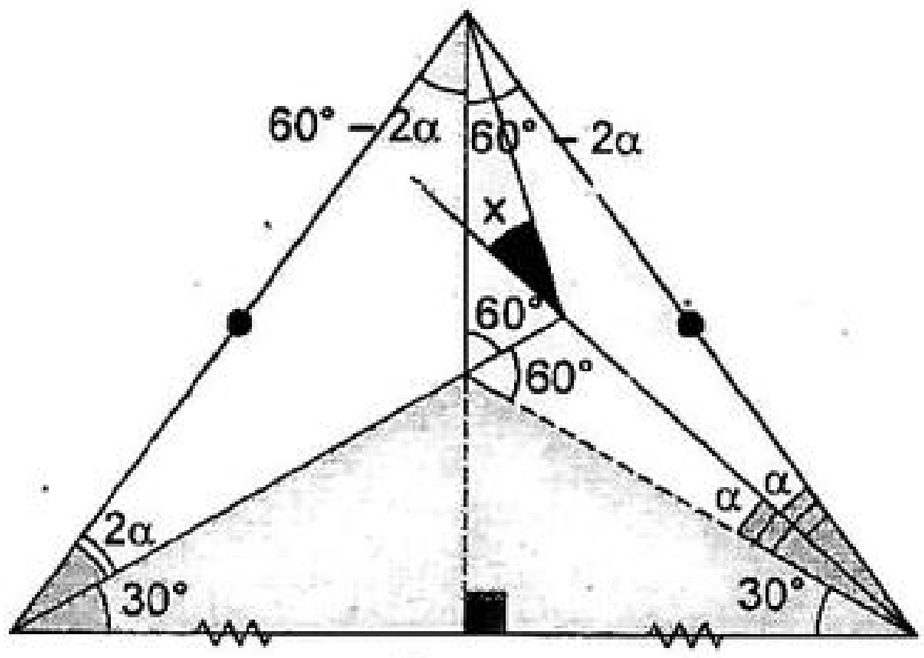




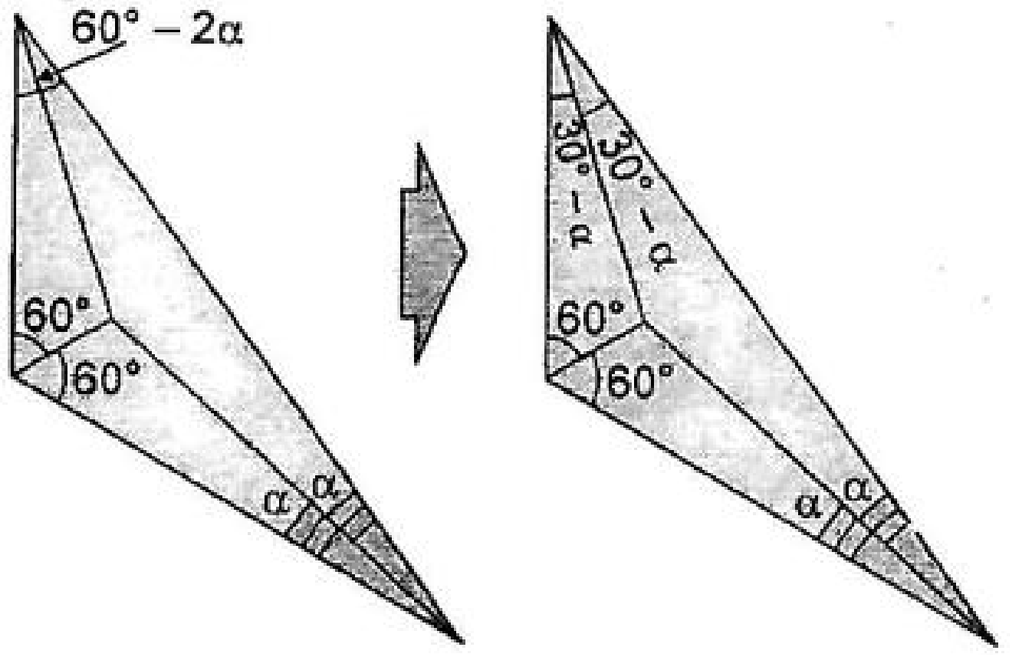


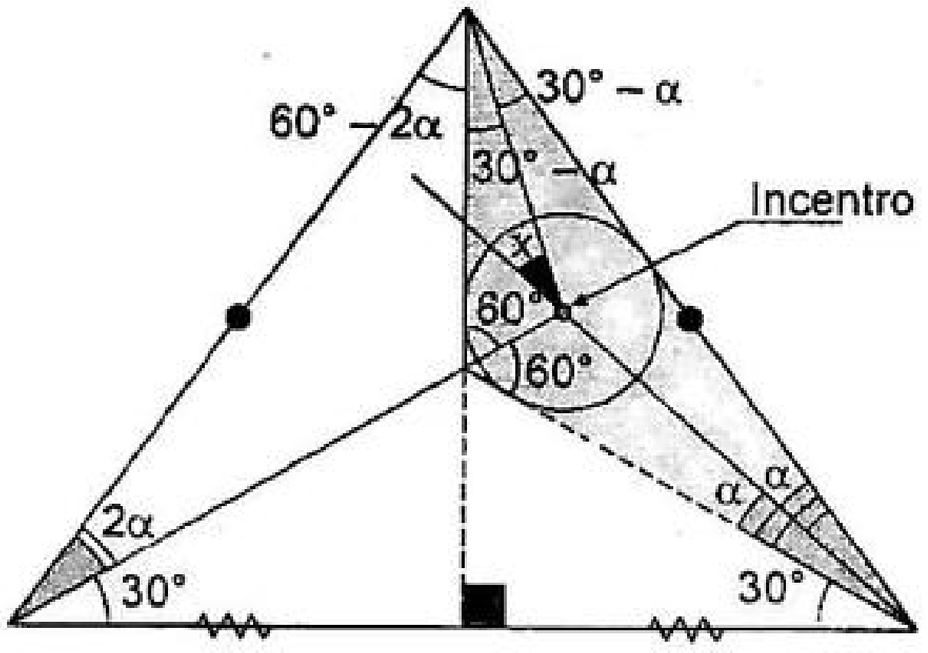
Paso N° 3. Ahora completamos los ángulos externos en la figura obtenida así:





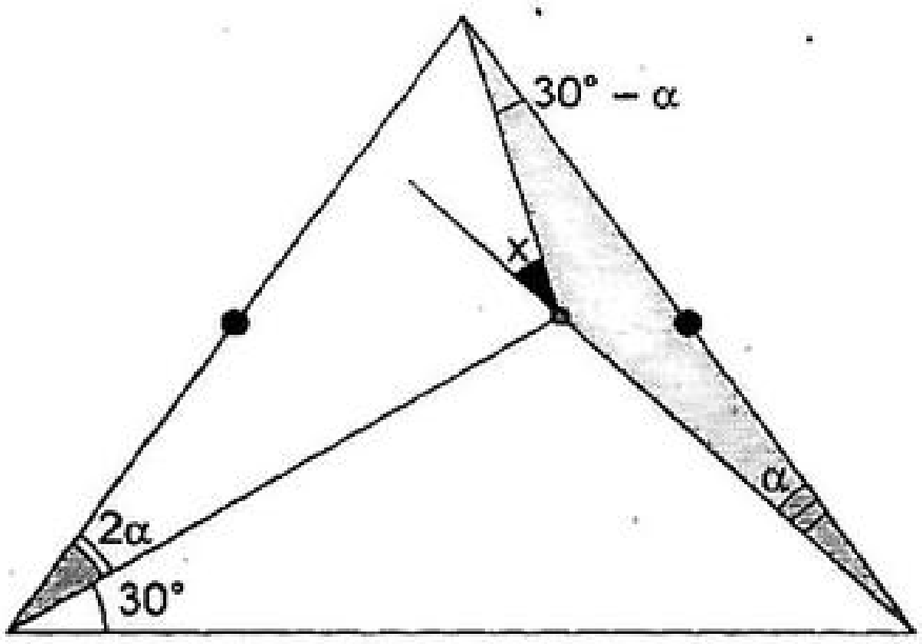
Paso N° 4. Se observa en la figura que se obtiene un triángulo donde cumple:





Scanned by CamScanner

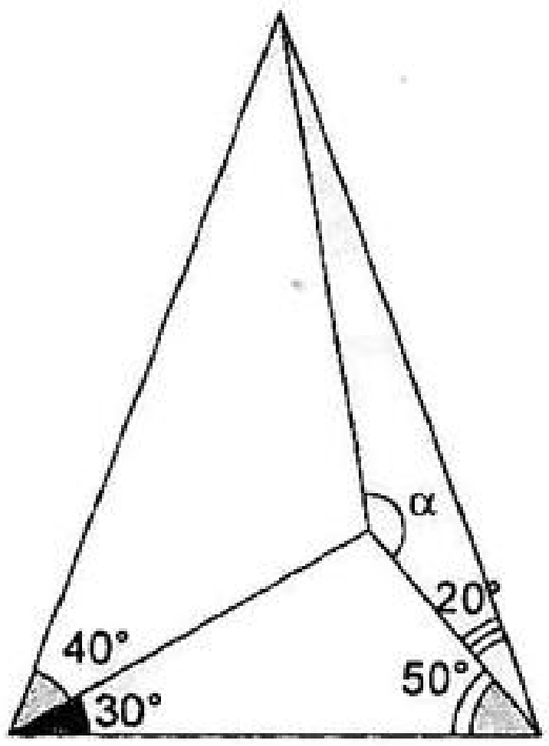
Paso N° 5. Ahora obtenemos:



$\therefore x = 30° - \alpha + \alpha$

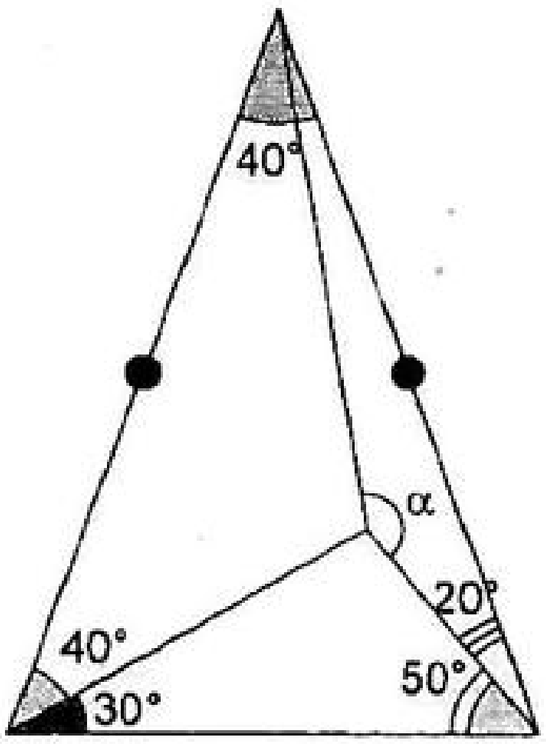
$x = 30°$

Problema 73. Calcular x.

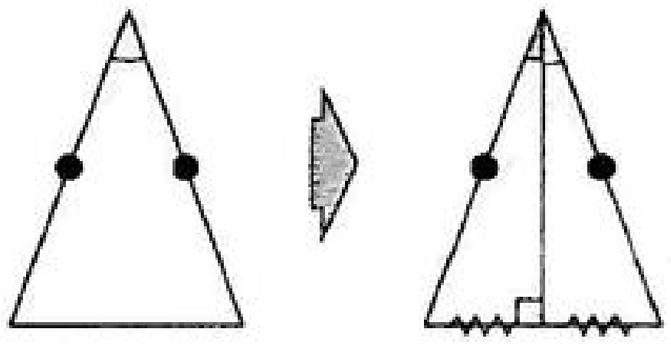


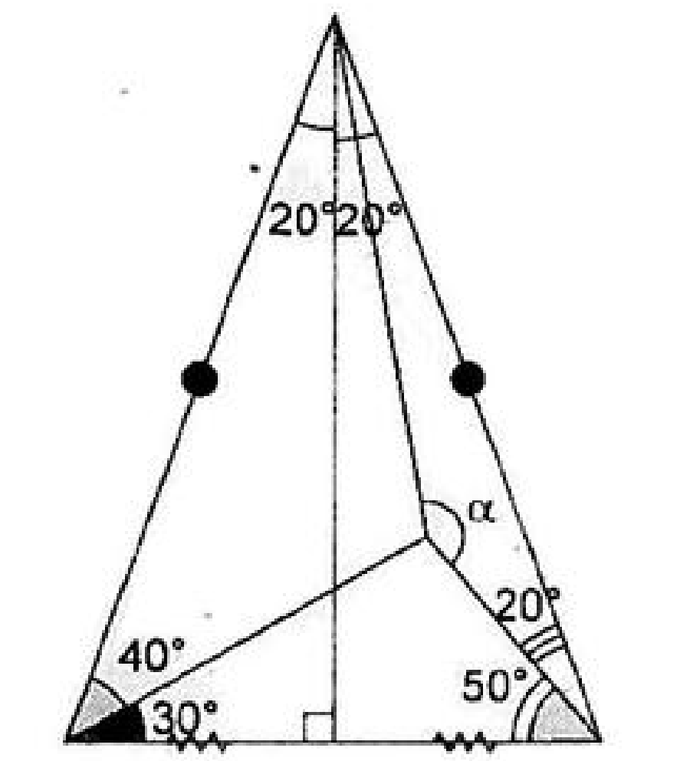
Resolución:

Paso N° 1. Se observa un triángulo isósceles:

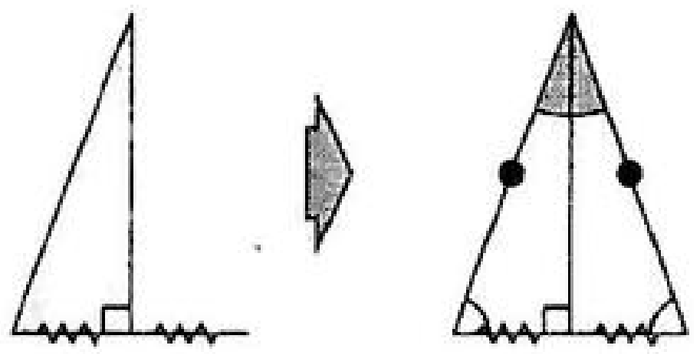


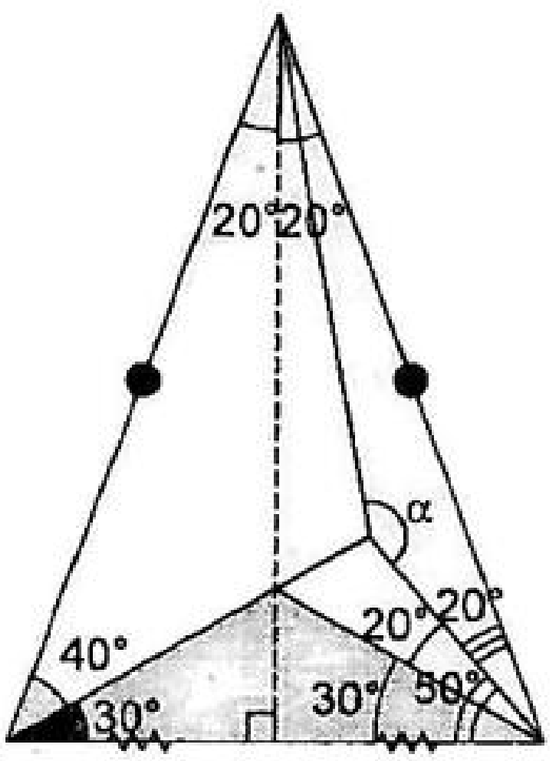
Paso N° 2. Aplicamos las propiedades que se cumplen en un triángulo isósceles:





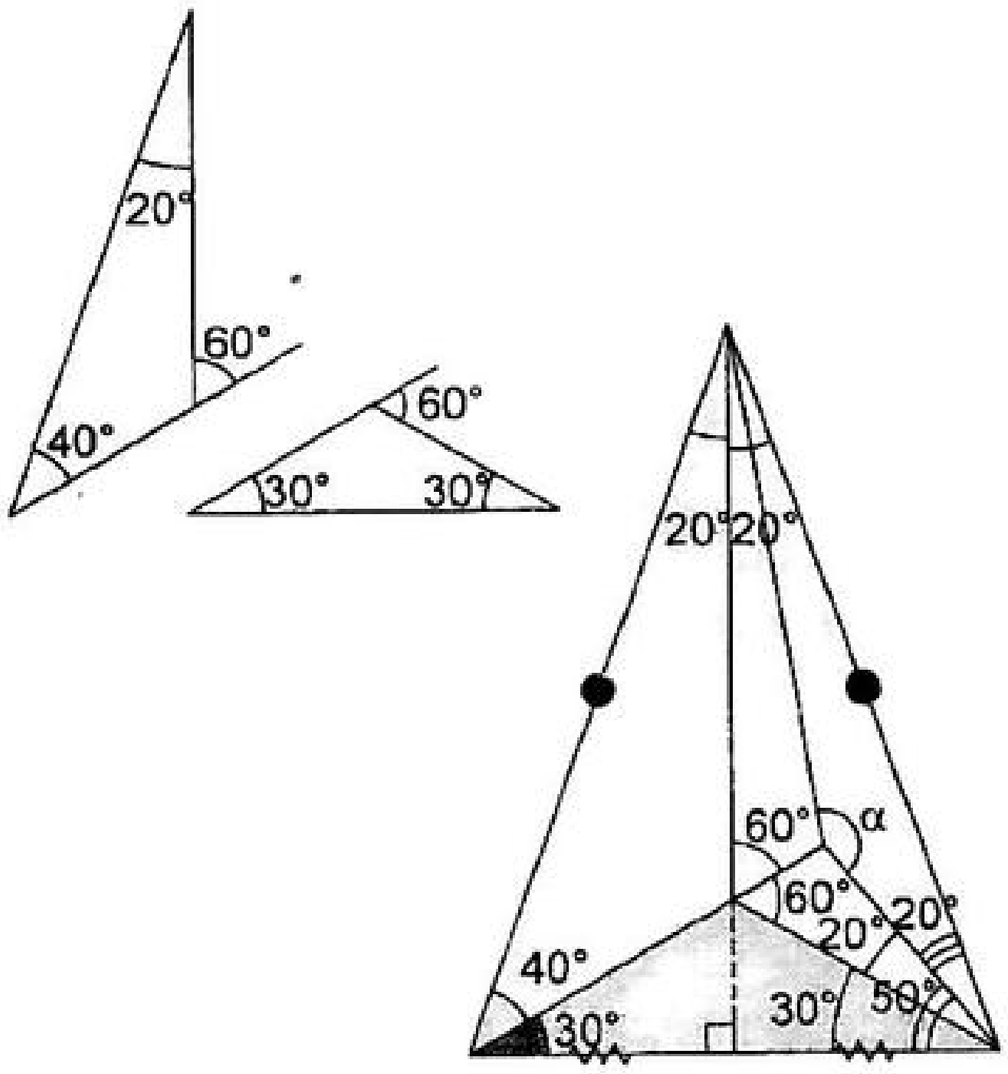
Se observa la propiedad de la mediatriz



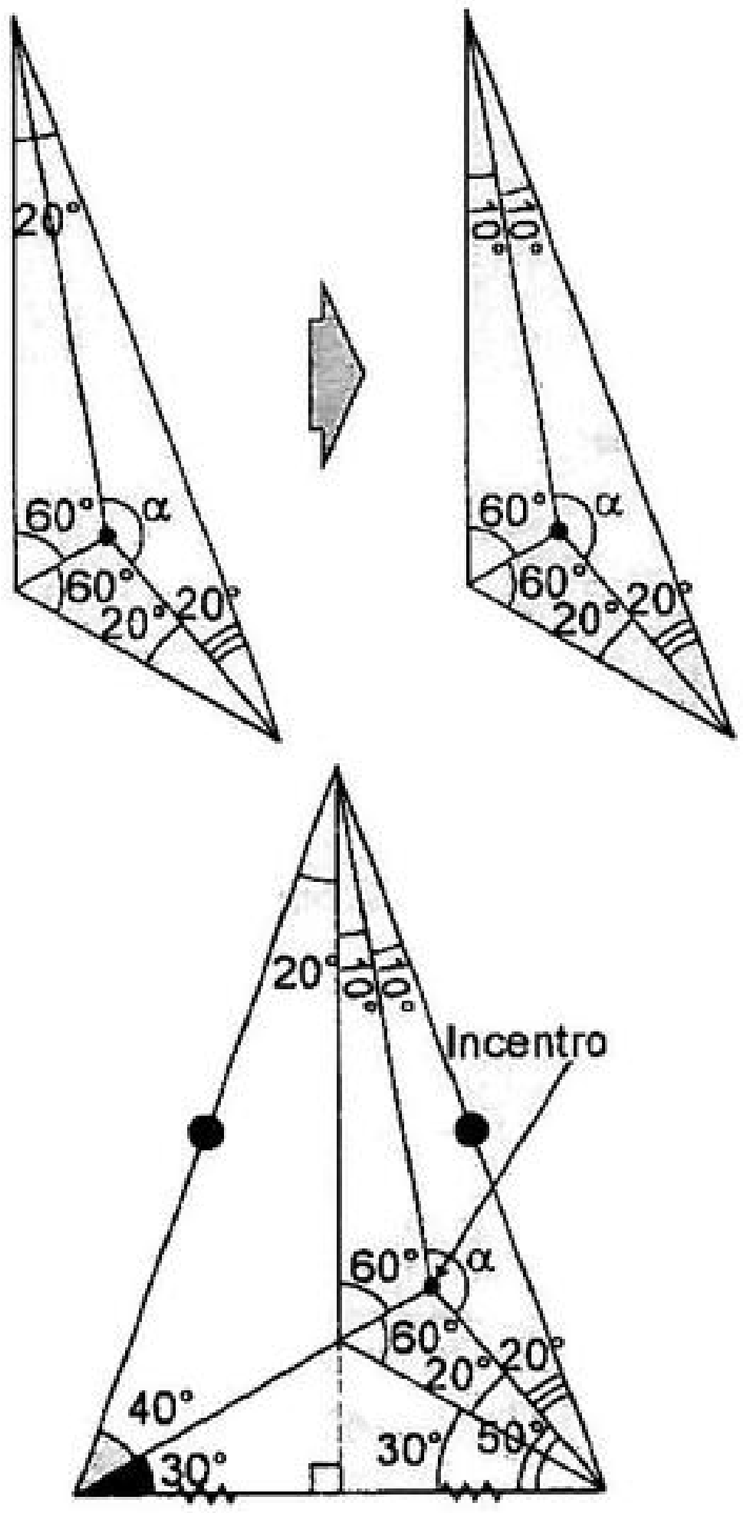


Scanned by CamScanner

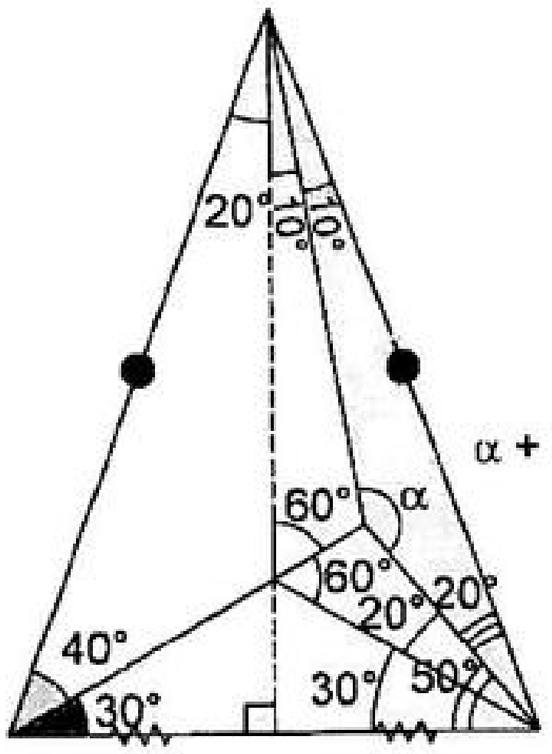
Paso N° 3. Se completa los ángulos externos en la figura, así:



Paso N° 4. Se obtiene internamente en la figura un triángulo donde cumple:



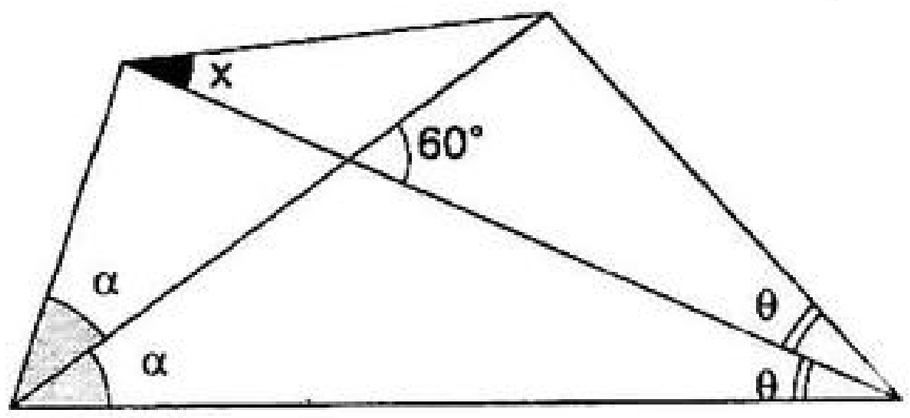
Paso N° 5.



$\alpha + 10° + 20° = 180°$

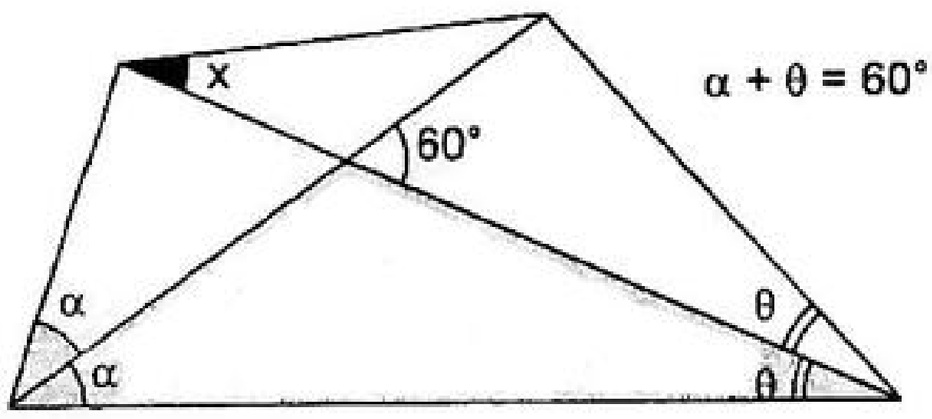
$\alpha = 150°$

Problema 74. Calcular x.



Resolución:

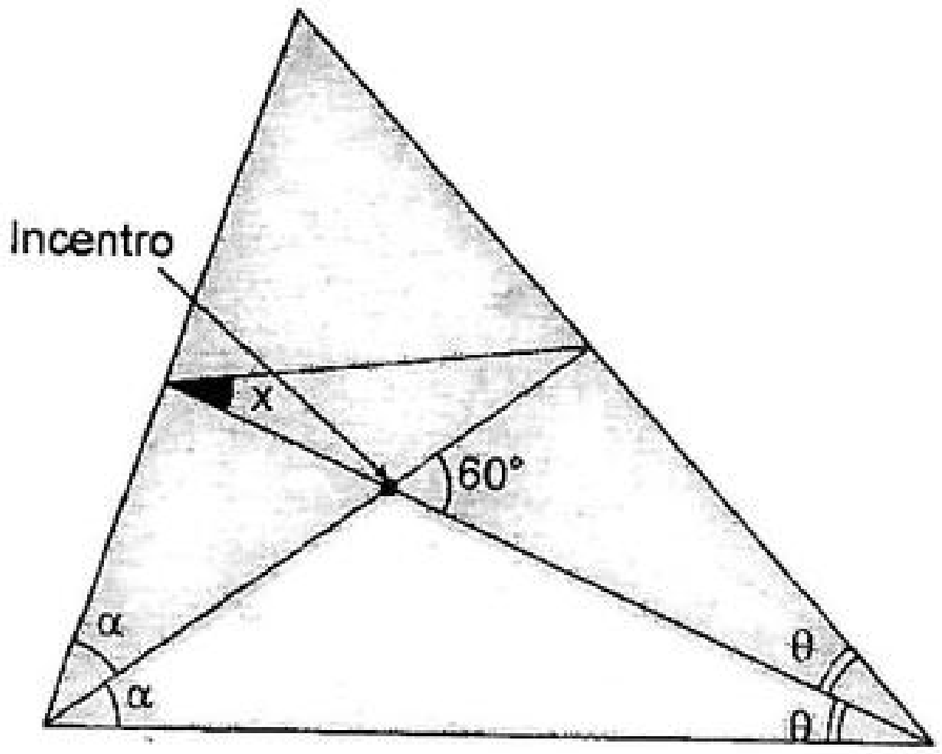
Paso N° 1. Se observa en la figura que se obtiene:



$\alpha + \theta = 60°$

Scanned by CamScanner

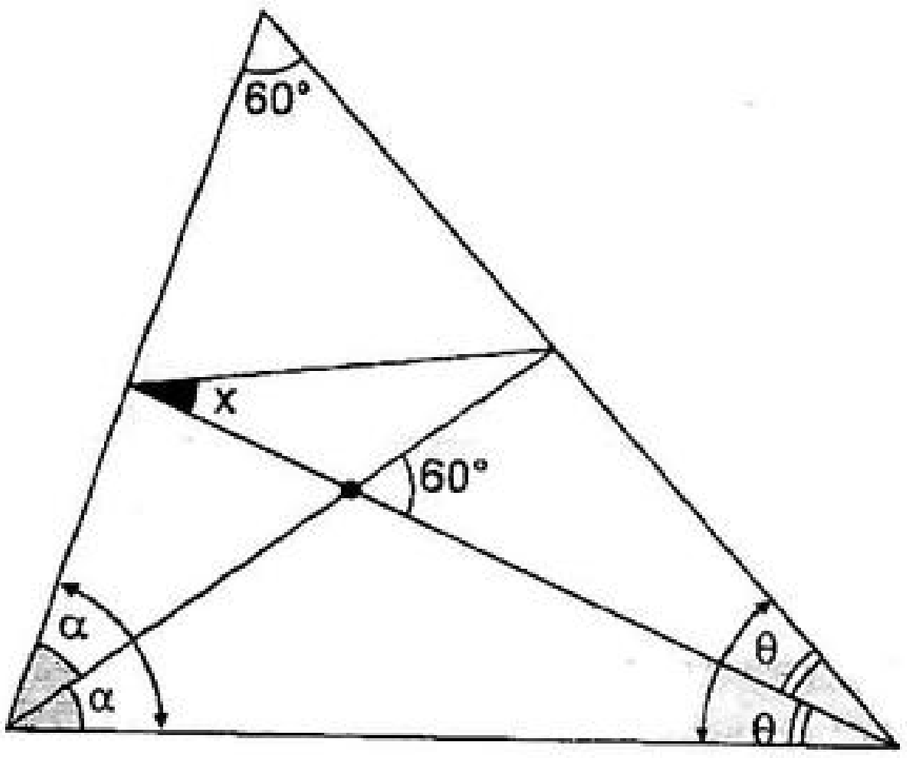
Paso N° 2. Se completa la figura a un triángulo donde se obtiene el incentro:



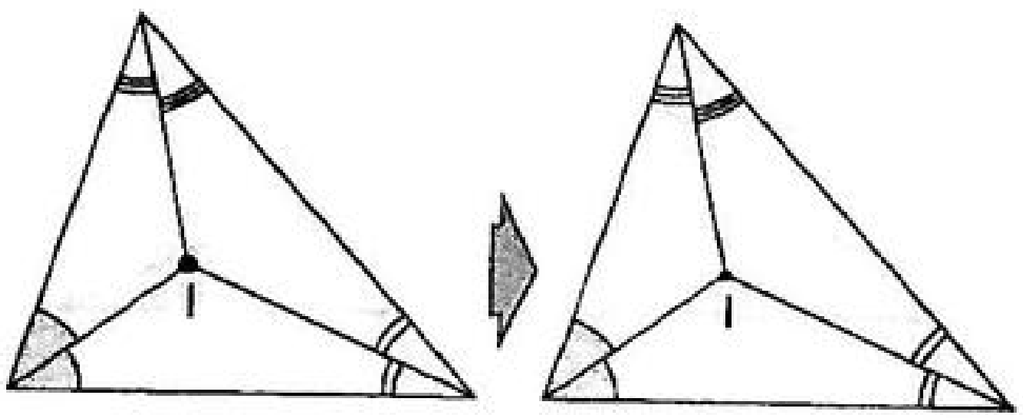
También:

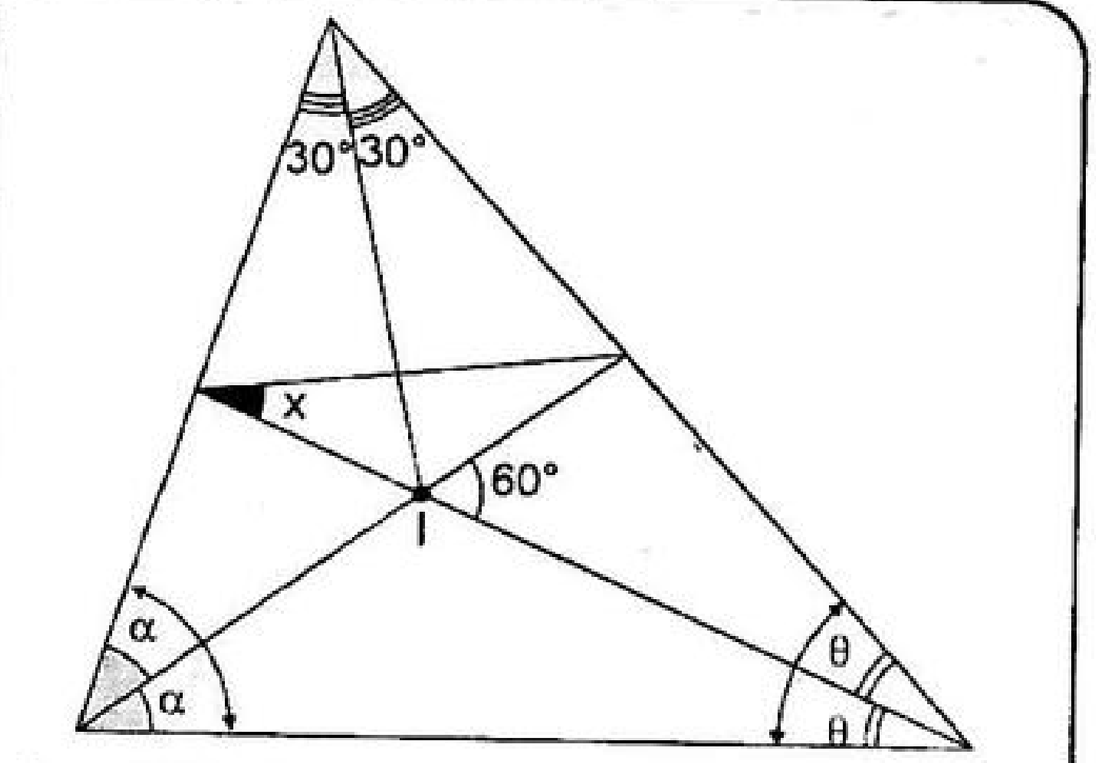
Como: $\alpha + \theta = 60°$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 120°$

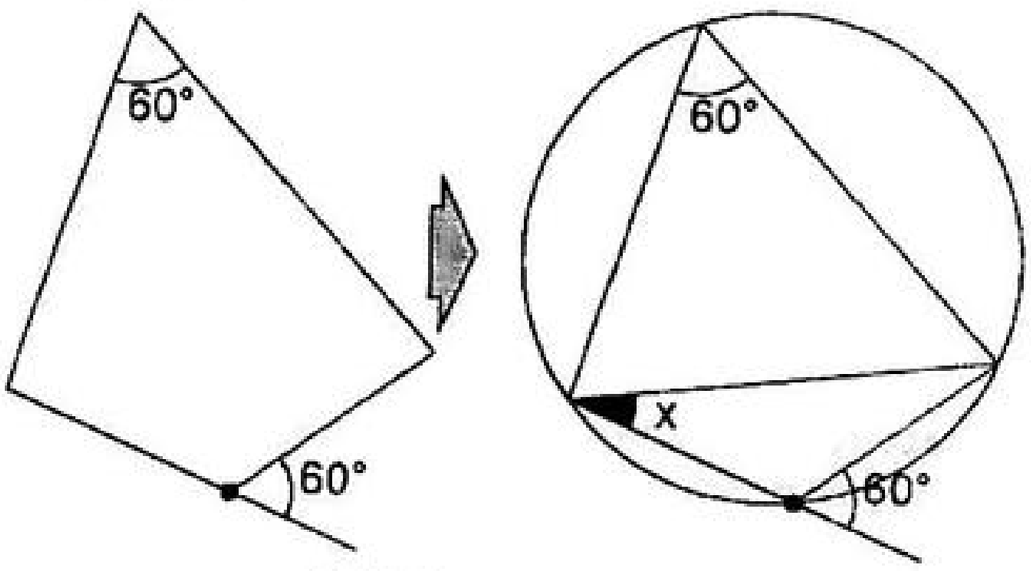


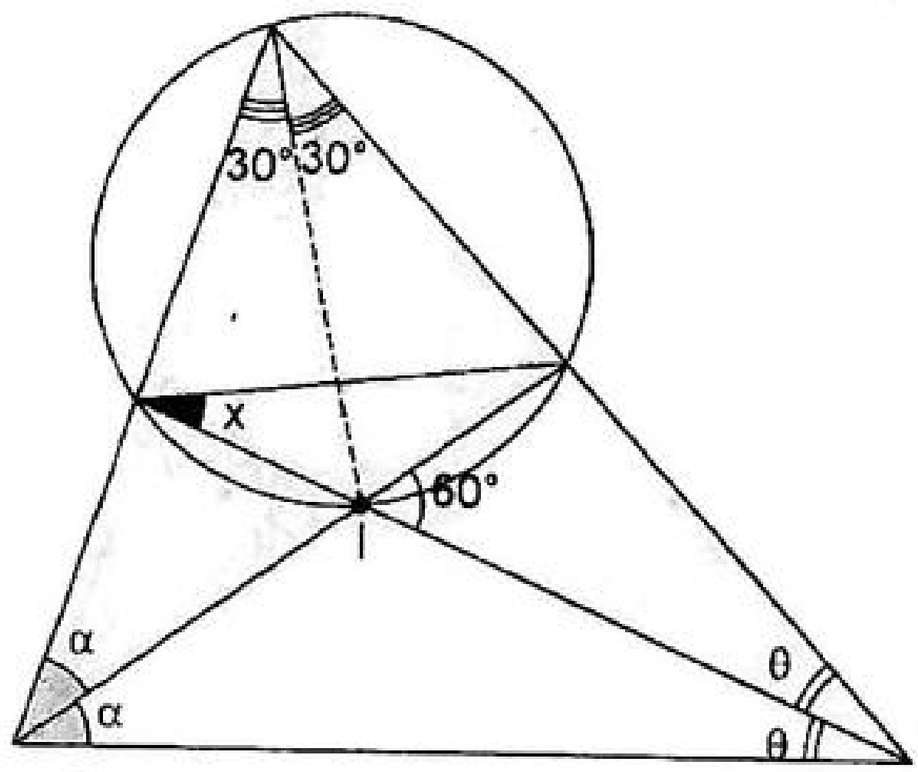
Paso N° 3. Como se tiene el incentro, entonces tenemos:



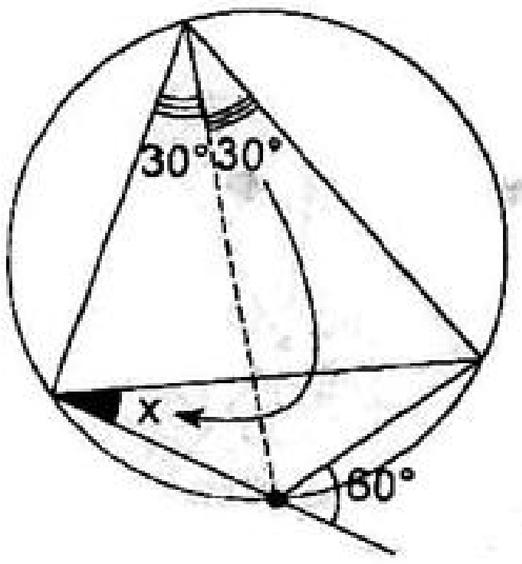


Paso N° 4. Ahora se observa un cuadrilátero, donde cumple:





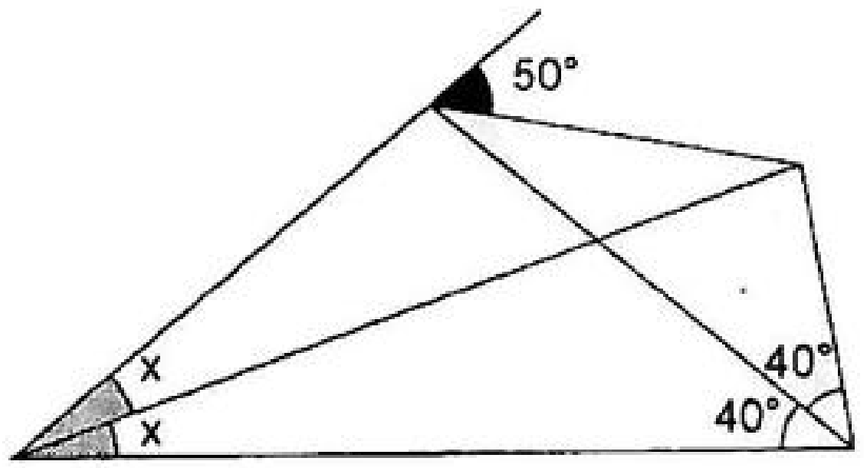
Paso N° 5. Tenemos que también en el cuadrilátero inscriptible, cumple la propiedad del pantalón:



$\therefore x = 30°$

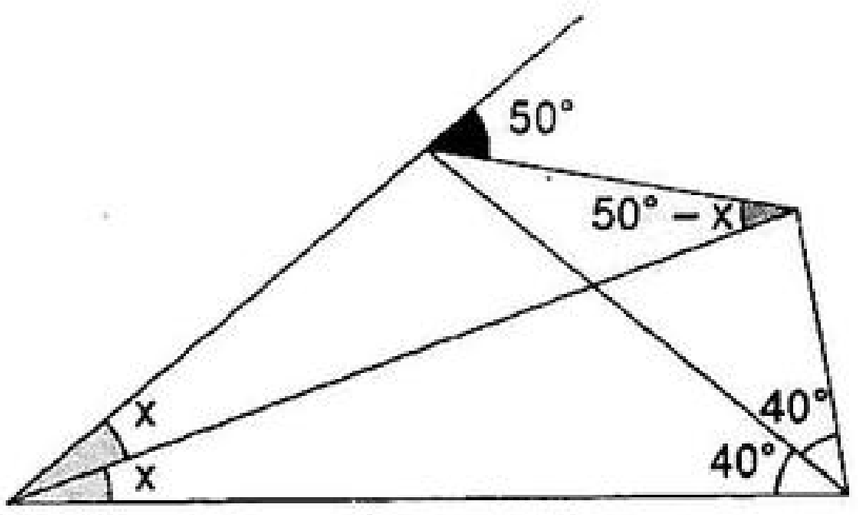
Scanned by CamScanner

Problema 75. Calcular x.

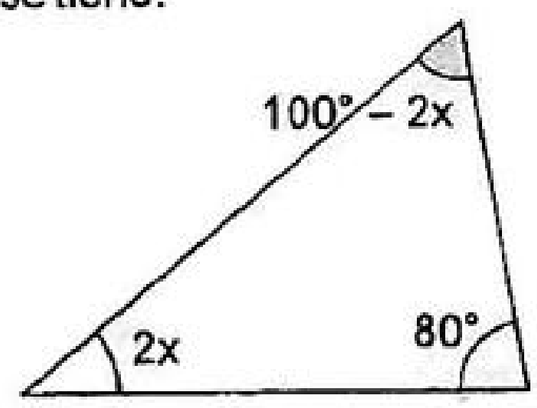


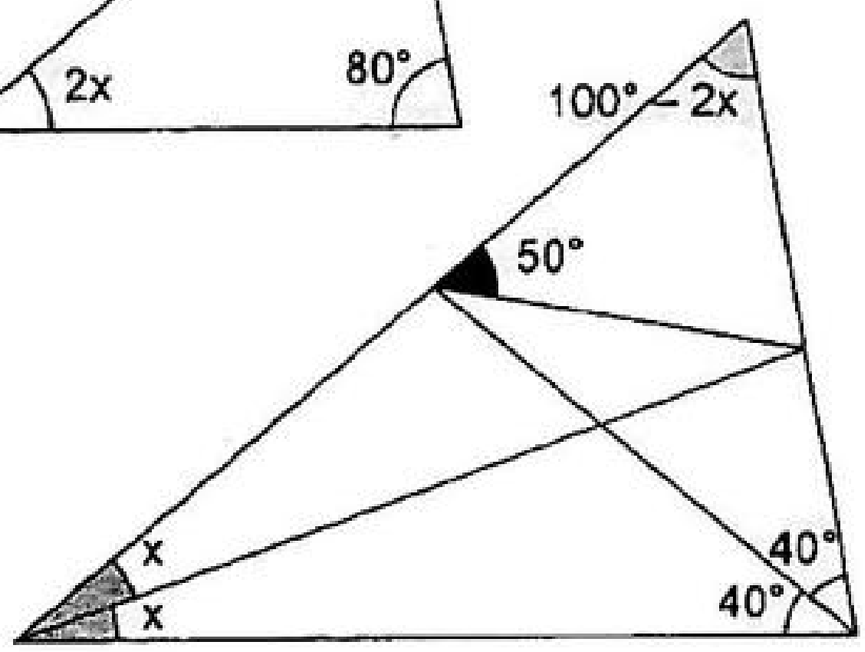
Resolución:

Paso N° 1. Completamos ángulos internos en la figura, así:

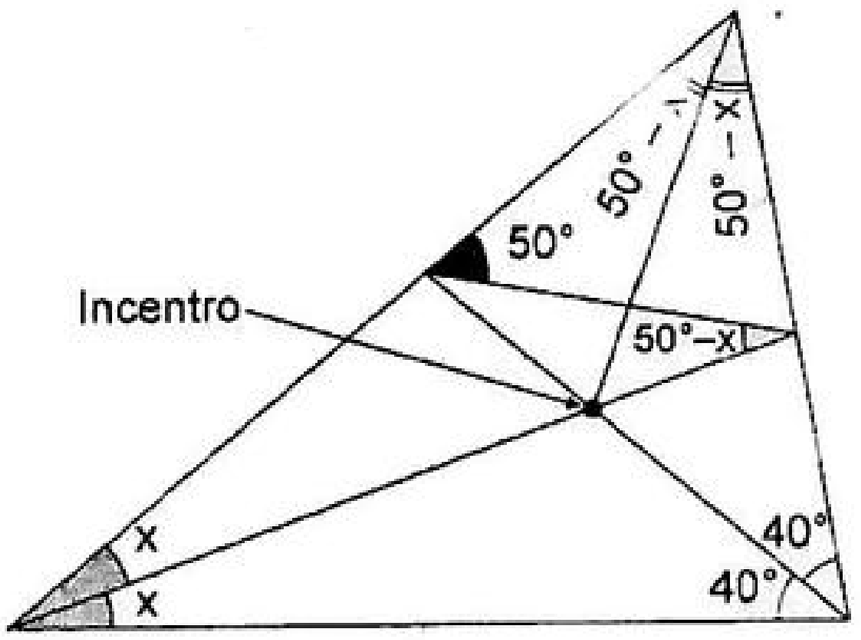


Paso N° 2. Se completa la figura a un triángulo, y se tiene:

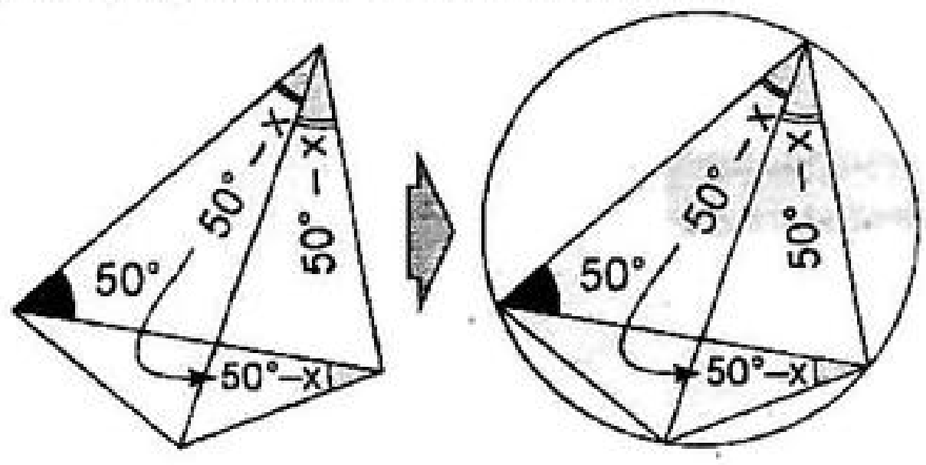


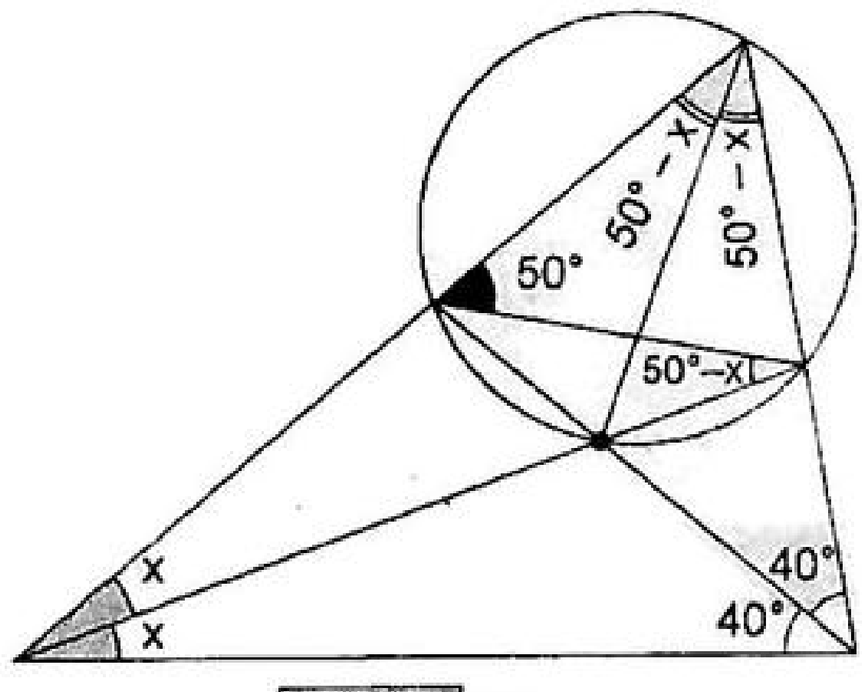


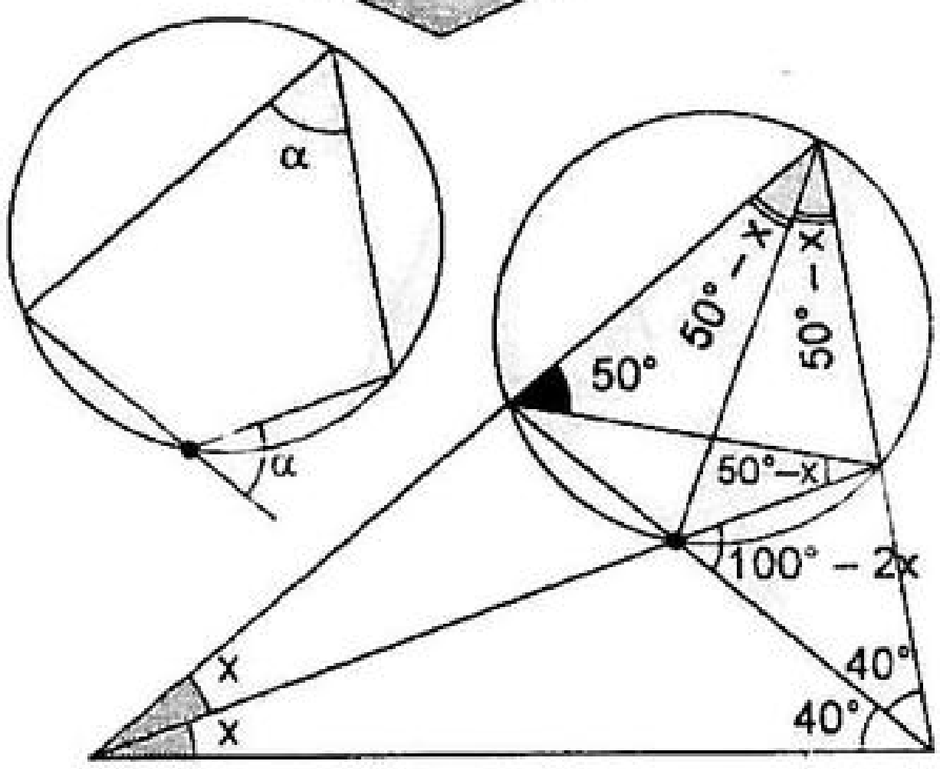
Paso N° 3. Se observa en la figura, el incentro:



Paso N° 4. Se obtiene un cuadrilátero donde cumple la propiedad del rebote o pantalón:

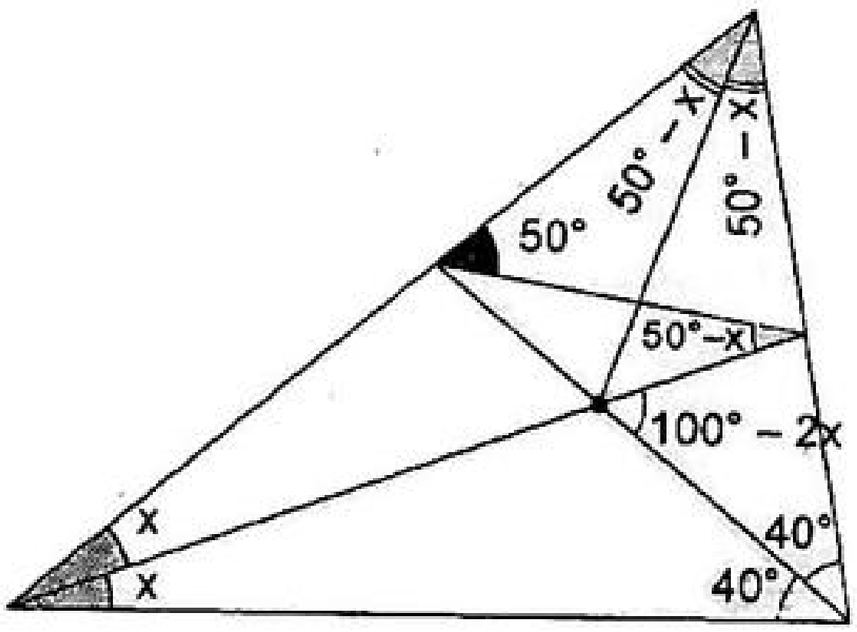






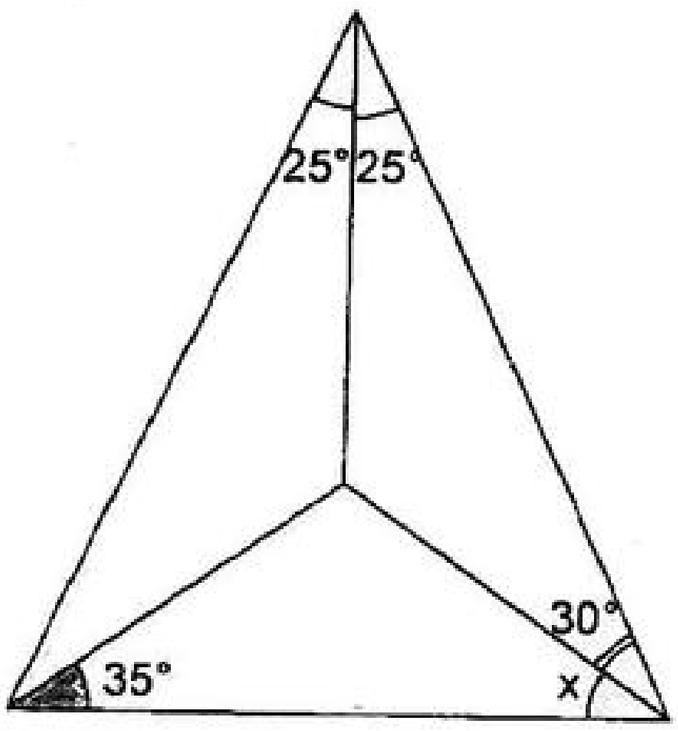
Scanned by CamScanner

Paso N° 5. Se observa el ángulo interior y se obtiene:



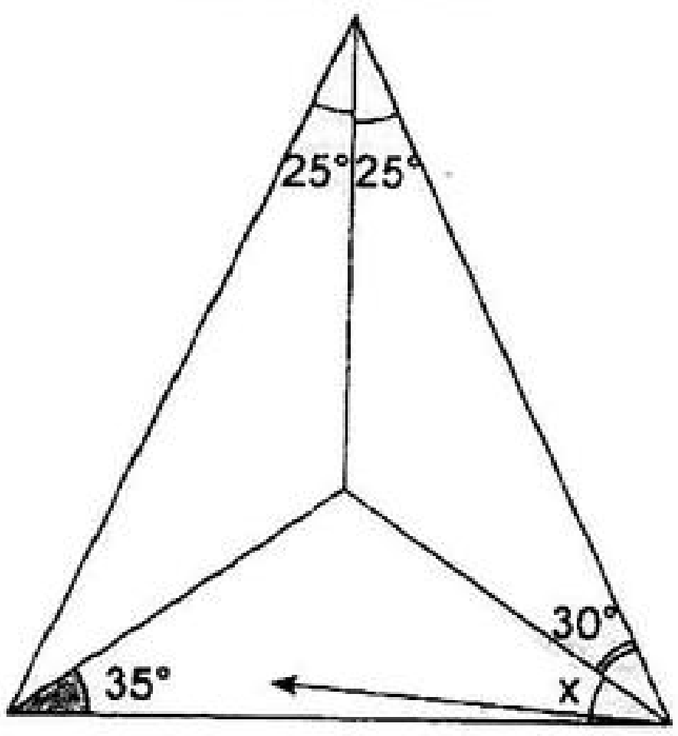
$$\Rightarrow 100 - 2x = x + 40°$$
$$60° = 3x$$
$$\Rightarrow x = 20°$$

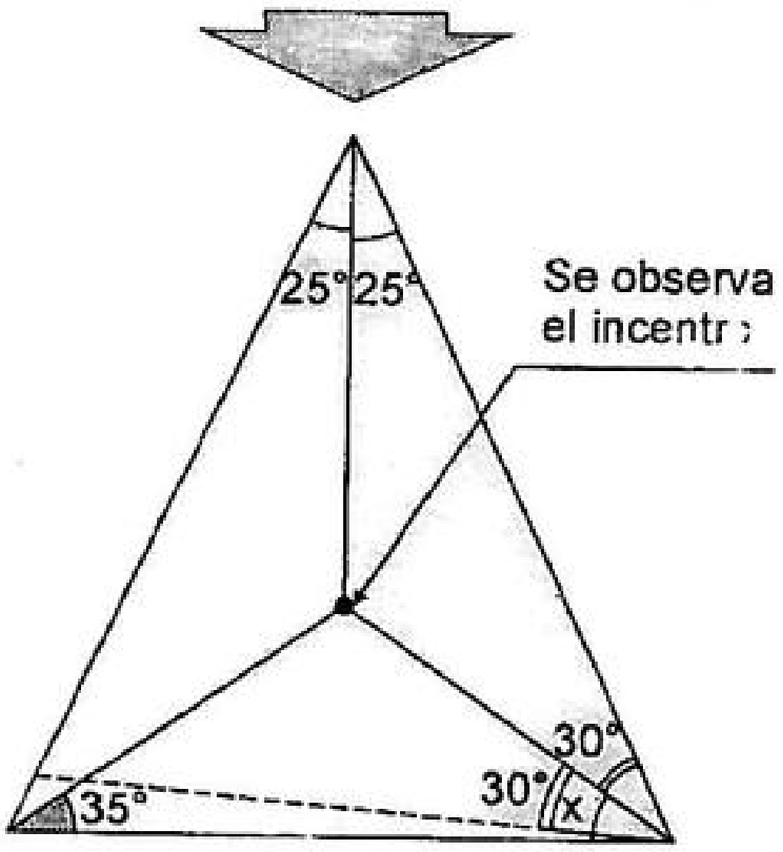
Problema 76. Calcular x.



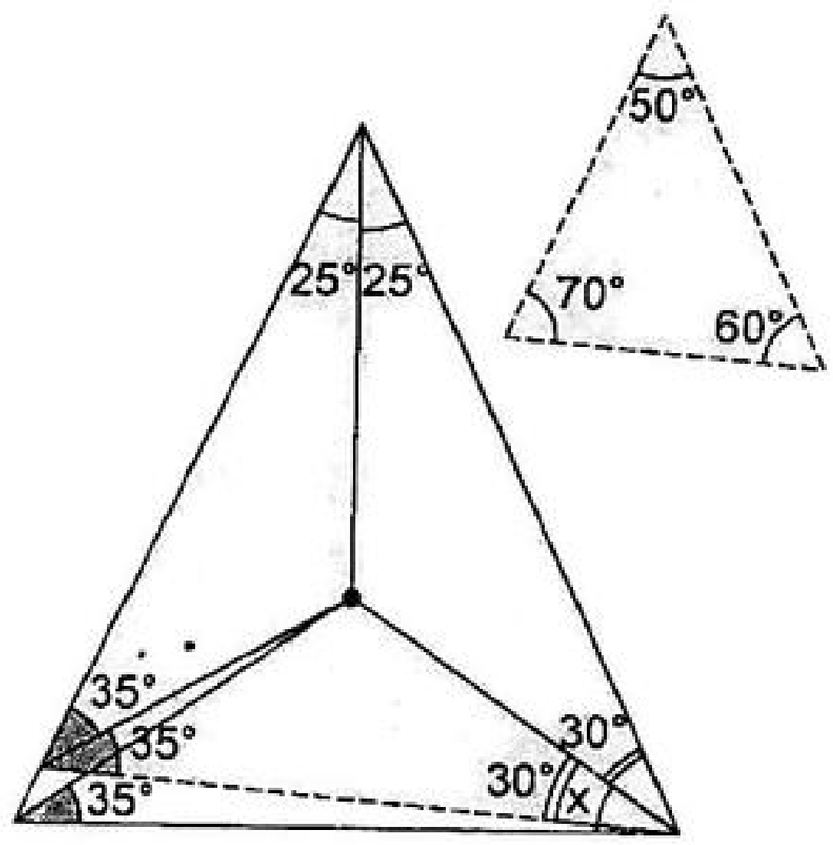
Resolución:

Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo, para obtener bisectriz en un ángulo, así:

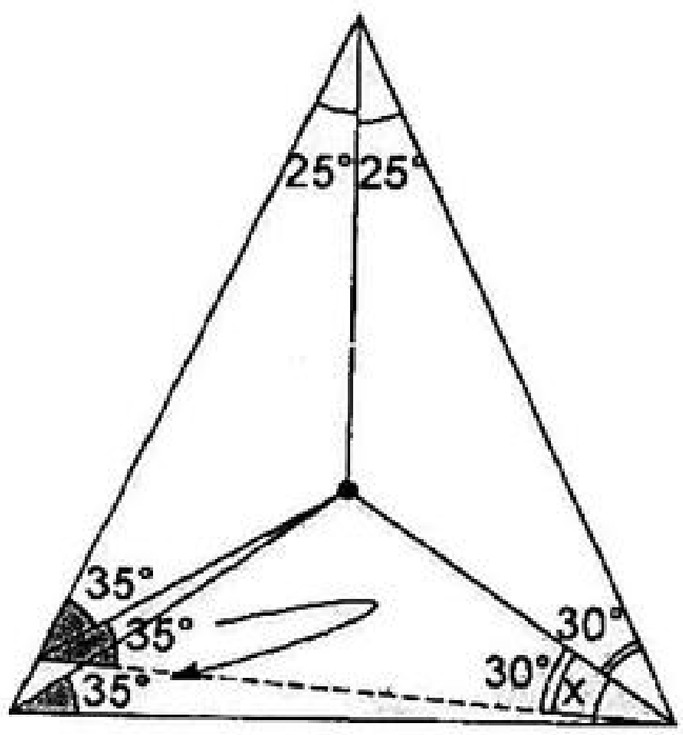




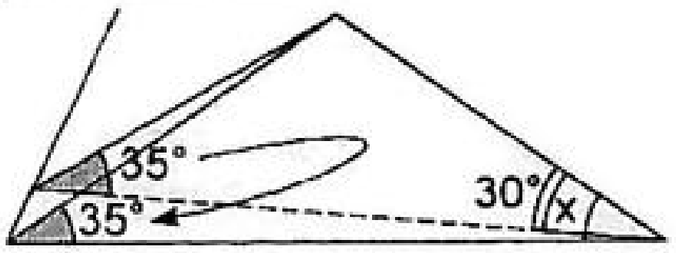
Paso N° 2. Completamos ángulos internos en el triángulo obtenido:

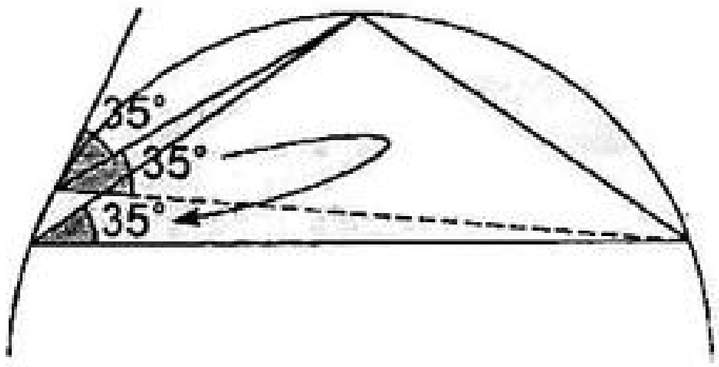


Paso N° 3. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote:

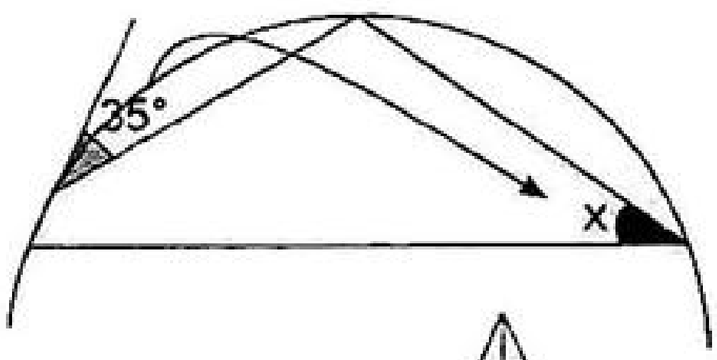


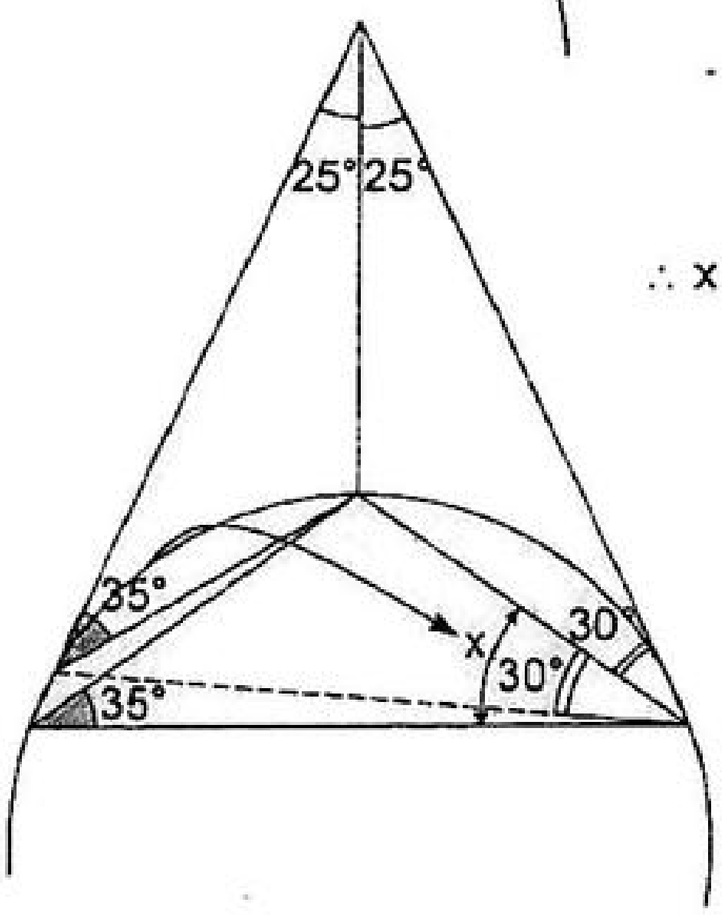
Scanned by CamScanner





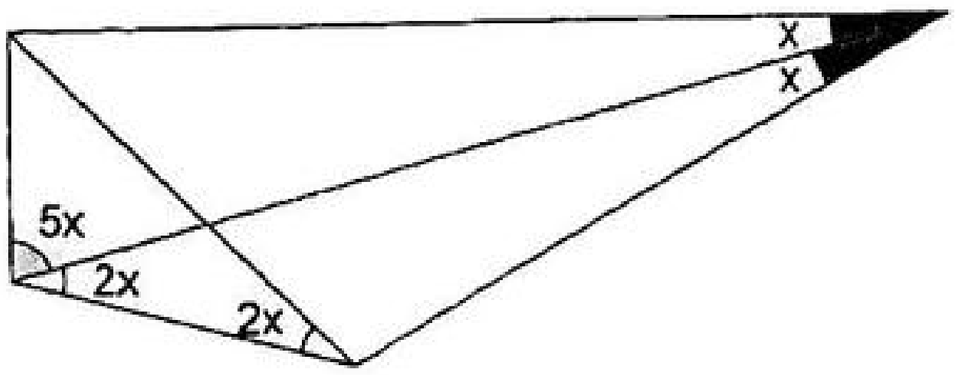
Paso N° 4. Ahora se tiene la siguiente propiedad que se cumple en todo cuadrilátero inscriptible:





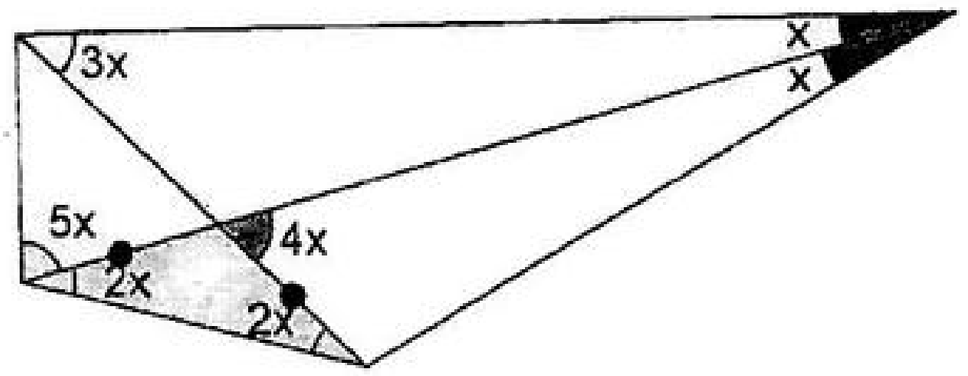
$\therefore x = 35°$

Problema 77. Calcular x.

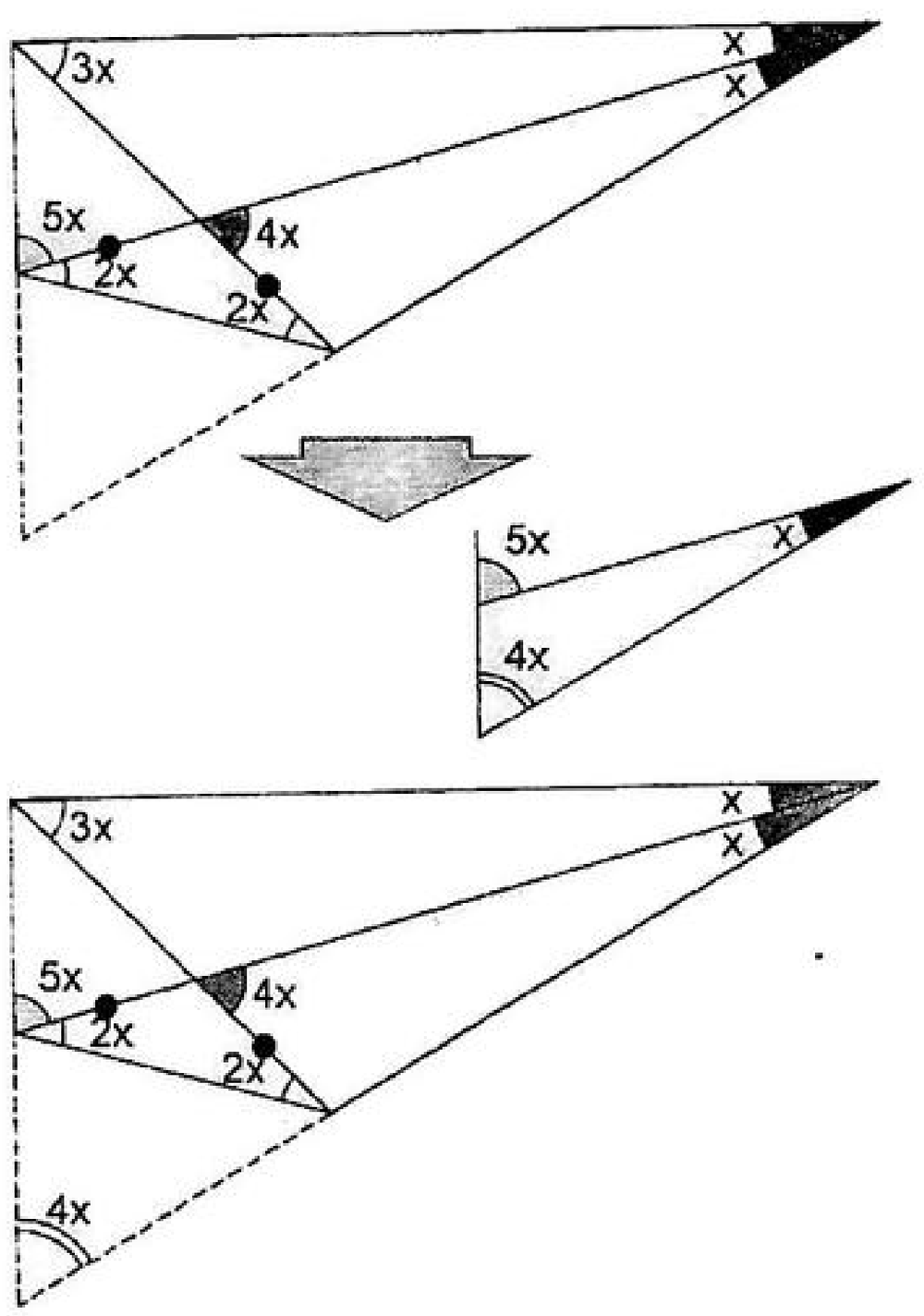


Resolución:

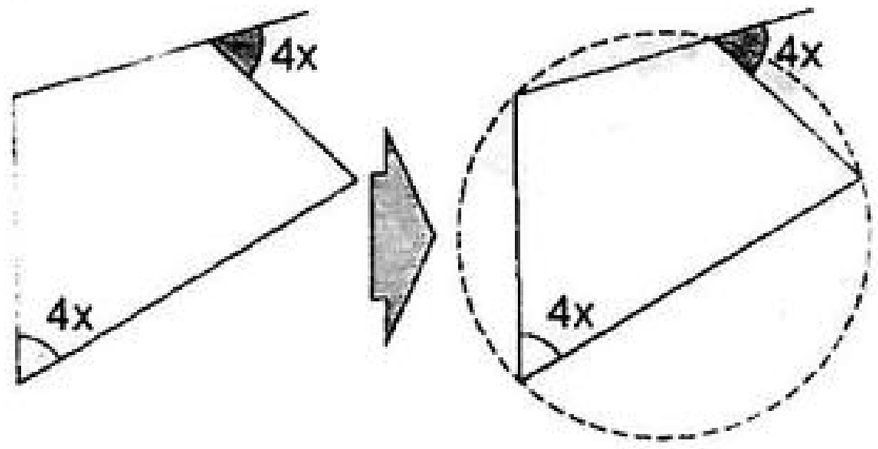
Paso N° 1. Completamos ángulos internos en la figura:



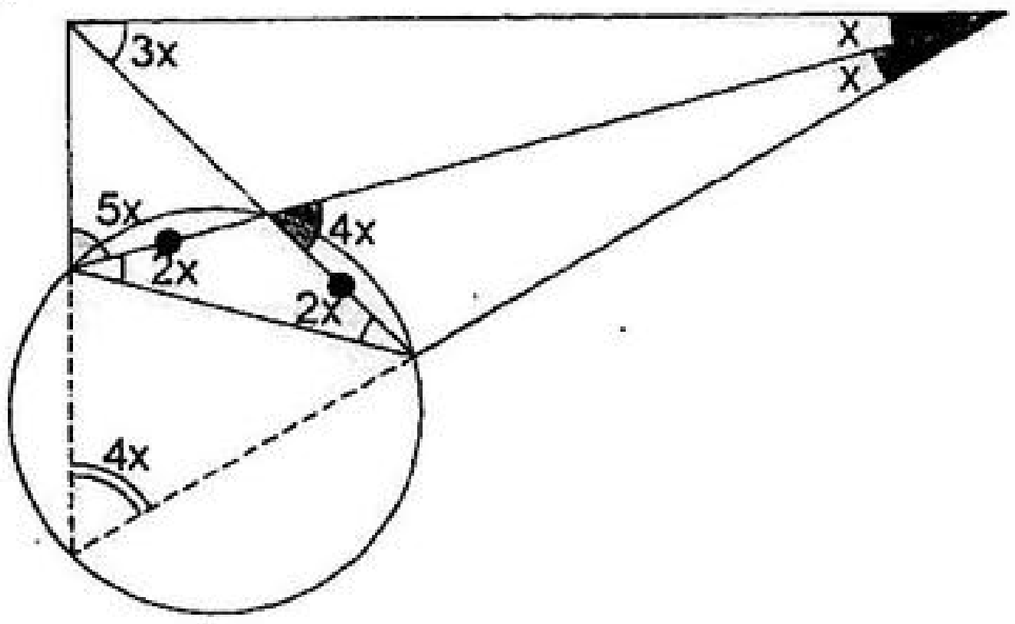
Paso N° 2. Ahora completamos la figura a un triángulo:



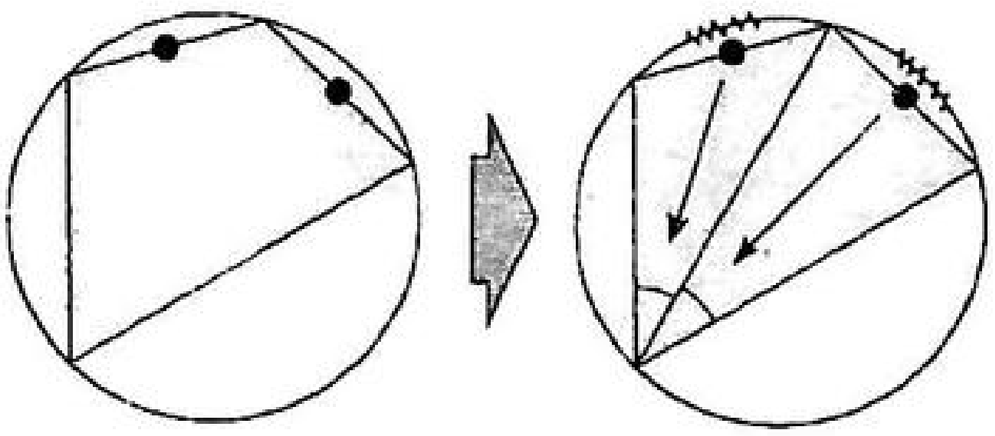
Paso N° 3. Se observa un cuadrilátero donde cumple:

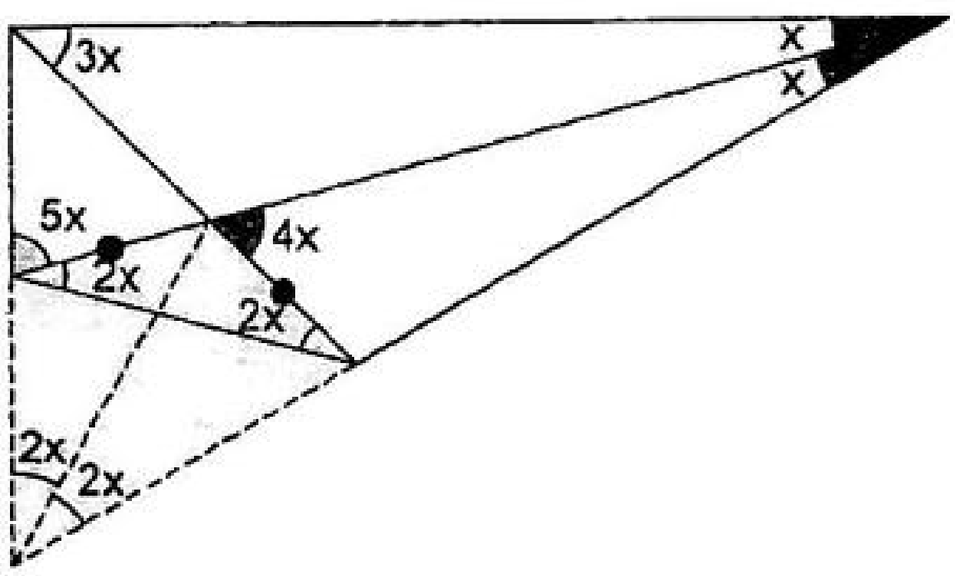


Scanned by CamScanner

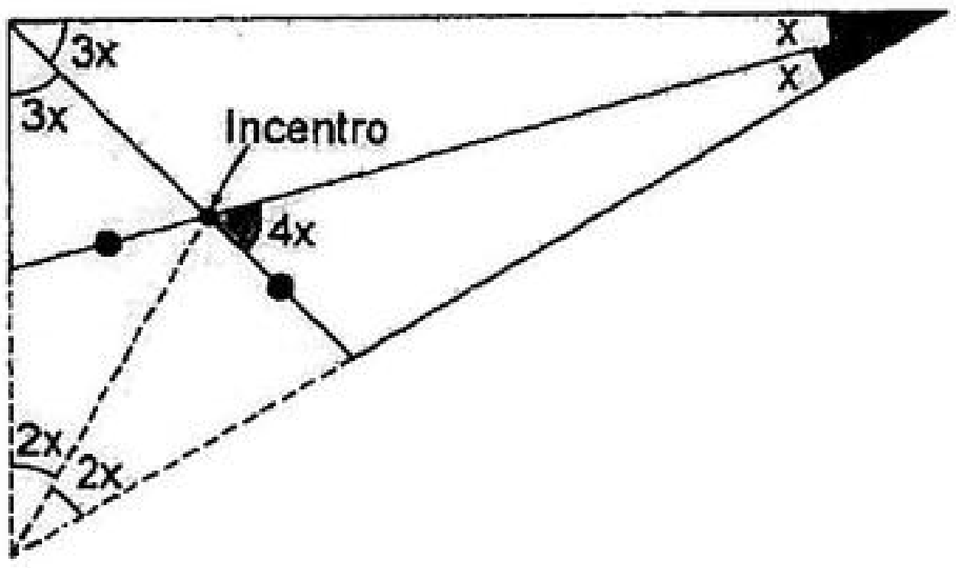


Aquí cumple:

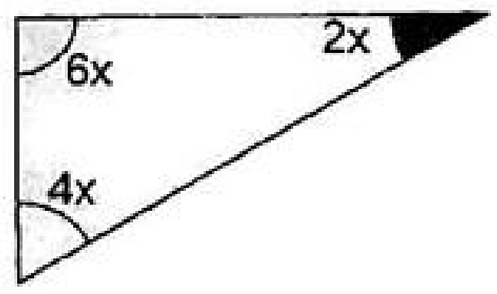




Paso N° 4. Se observa el incentro:

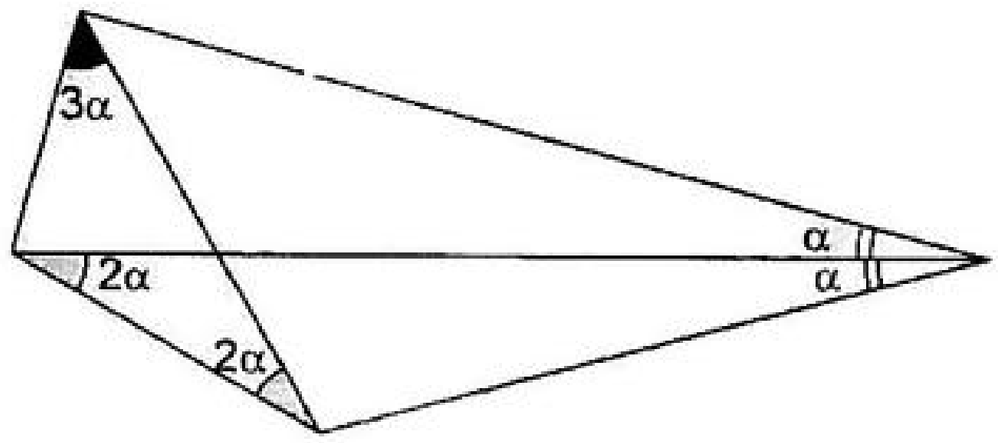


Paso N° 5. Aquí tenemos:



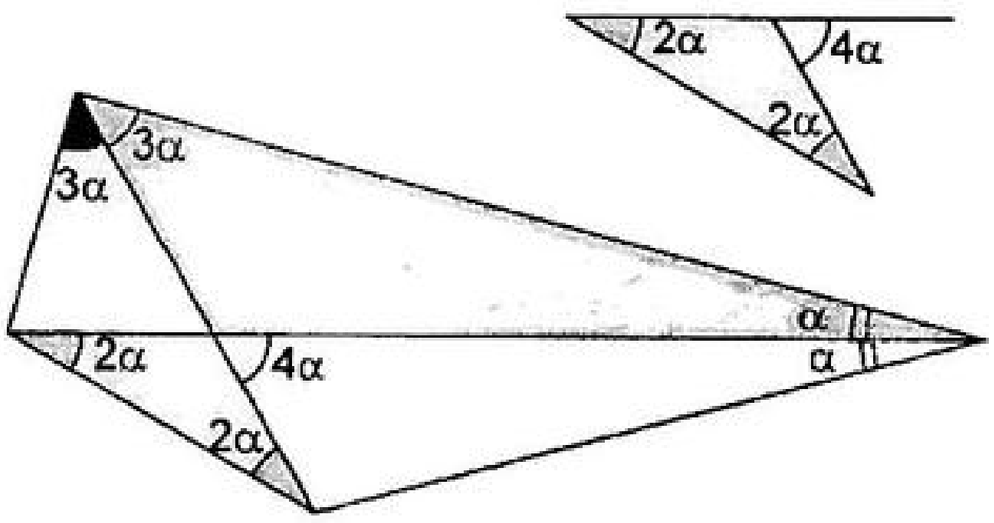
$$4x + 6x + 2x = 180°$$
$$12x = 180°$$
$$x = 15°$$

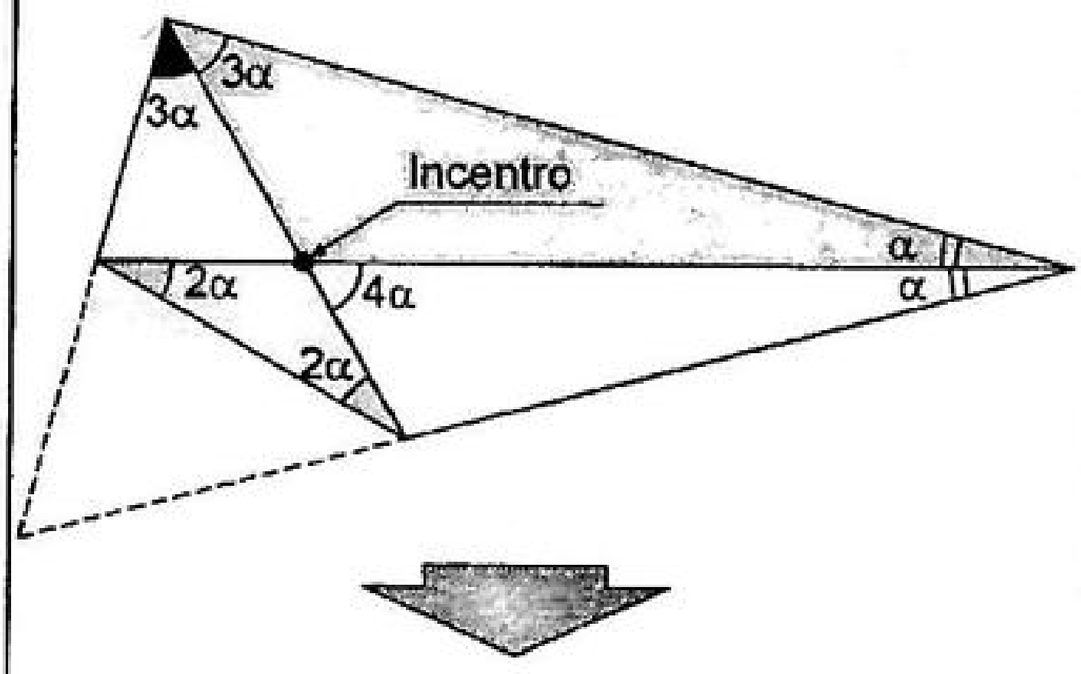
Problema 78. Calcular α.



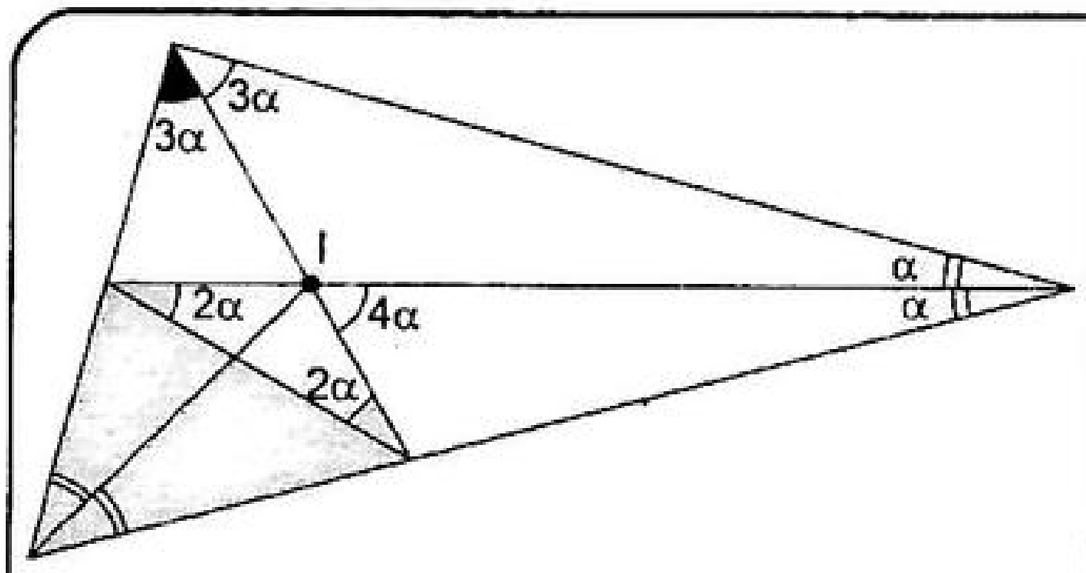
Resolución:

Paso N° 1. Completamos ángulos internos en la figura:

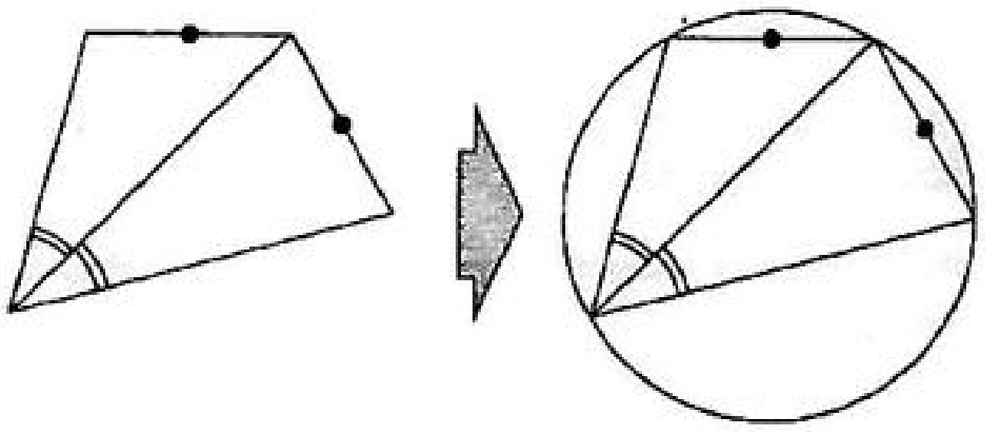


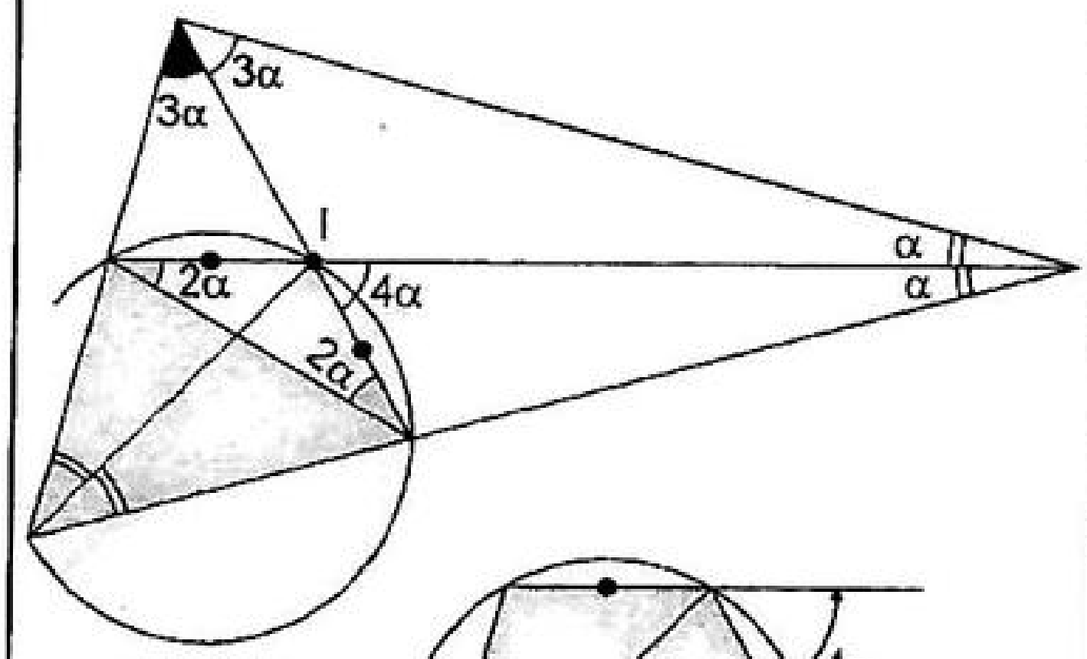


Scanned by CamScanner

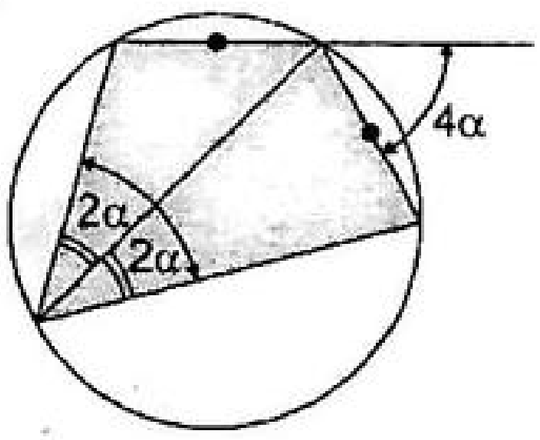


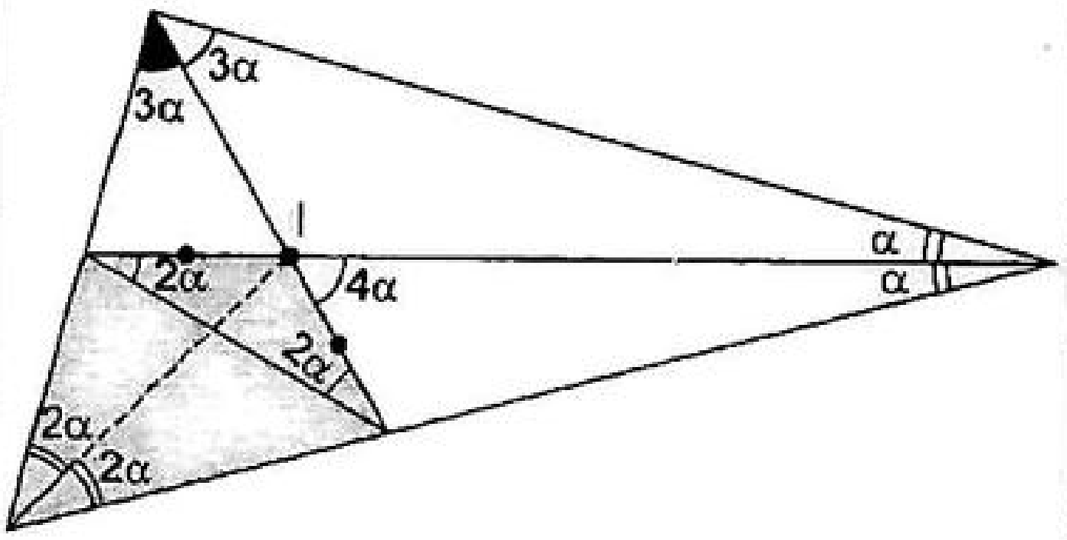
Paso N° 3. Aquí se obtiene un cuadrilátero donde cumple la siguiente propiedad:



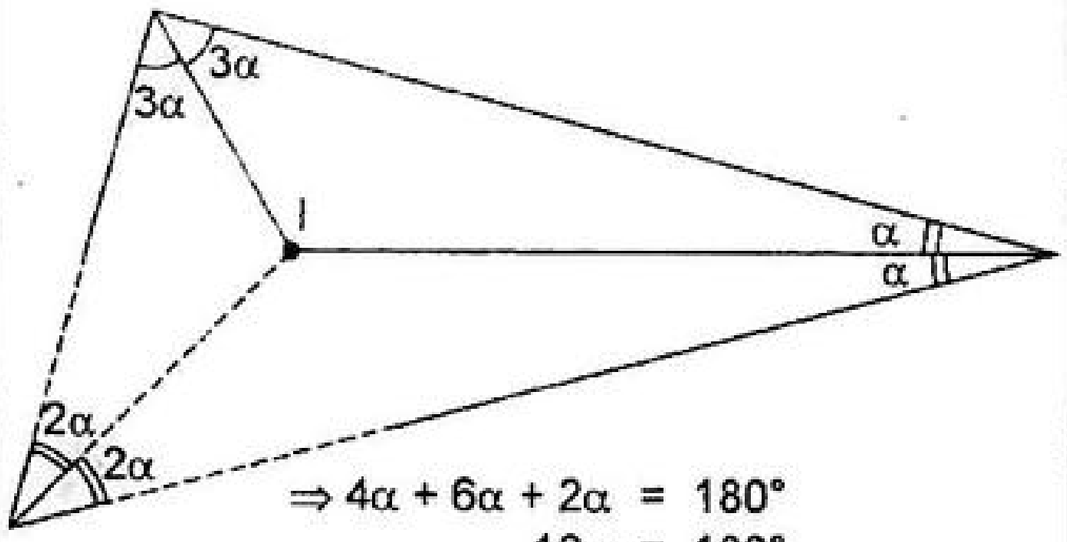


Aquí cumple



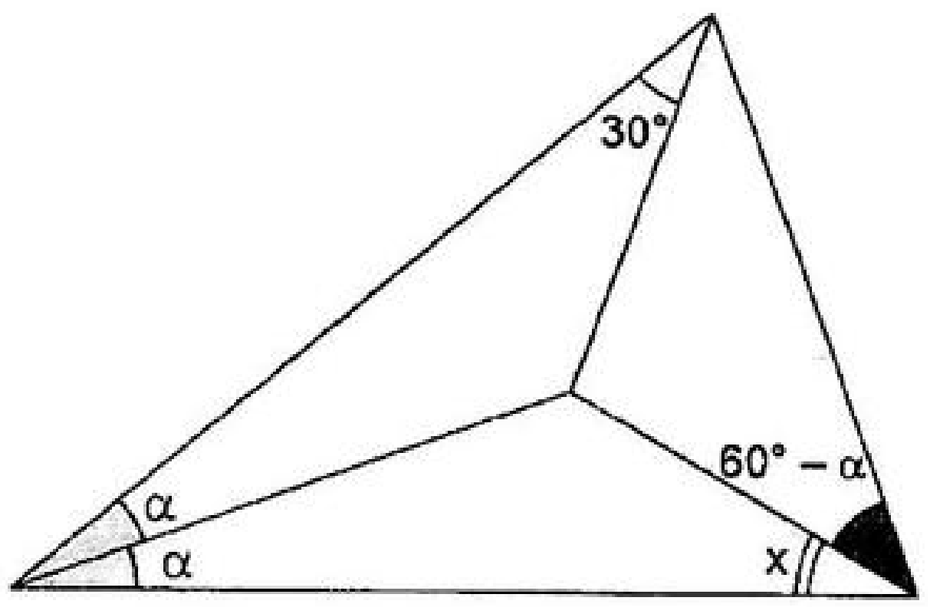


Paso N° 4. Aquí tenemos:



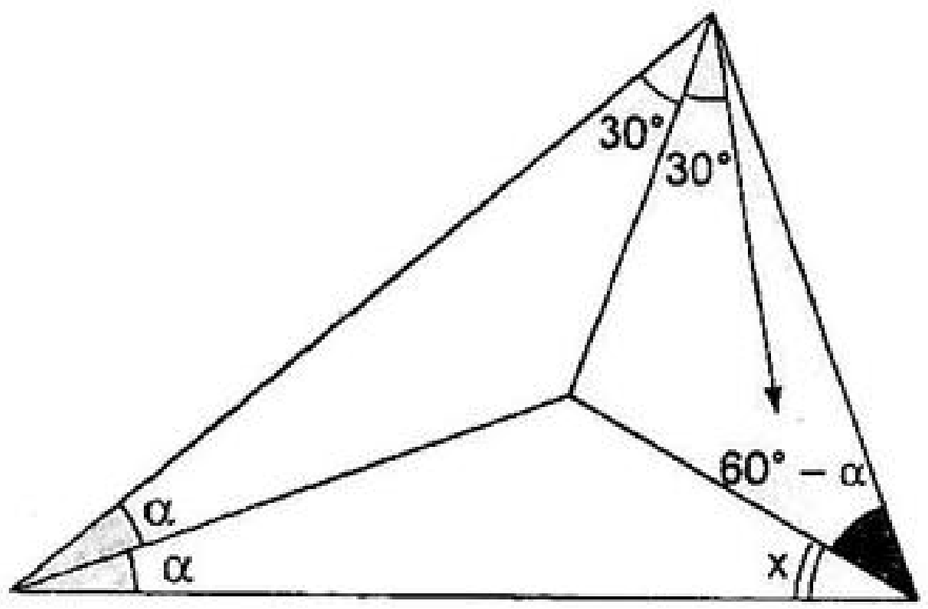
$$\Rightarrow 4\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180°$$
$$12\alpha = 180°$$
$$\alpha = 15°$$

Problema 79. Calcular x.

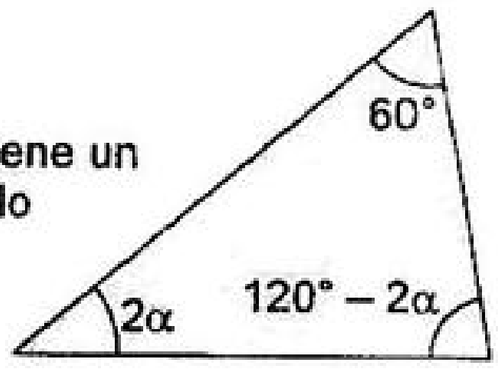


Resolución:

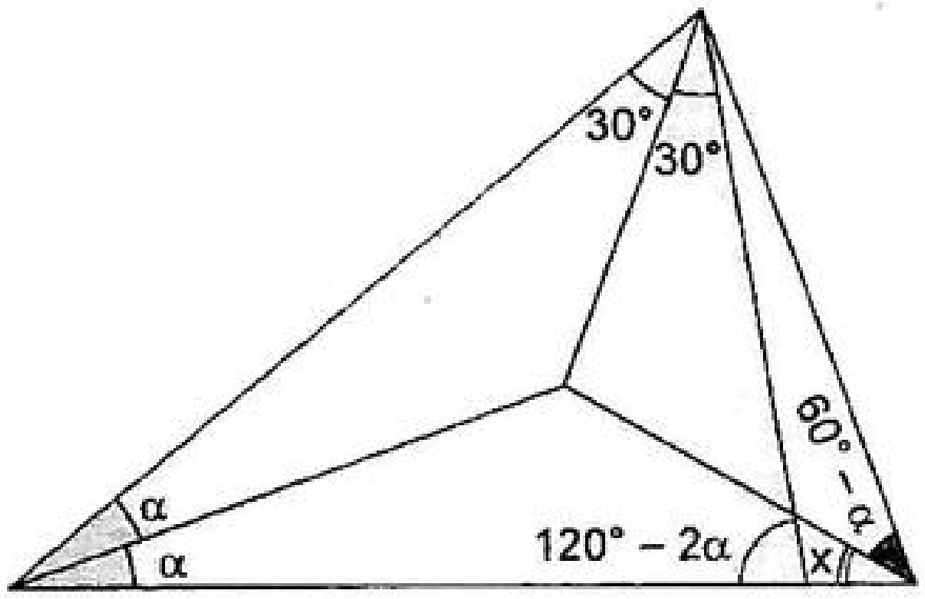
Paso N° 1 Realizamos el siguiente trazo para obtener una bisectriz de un ángulo:



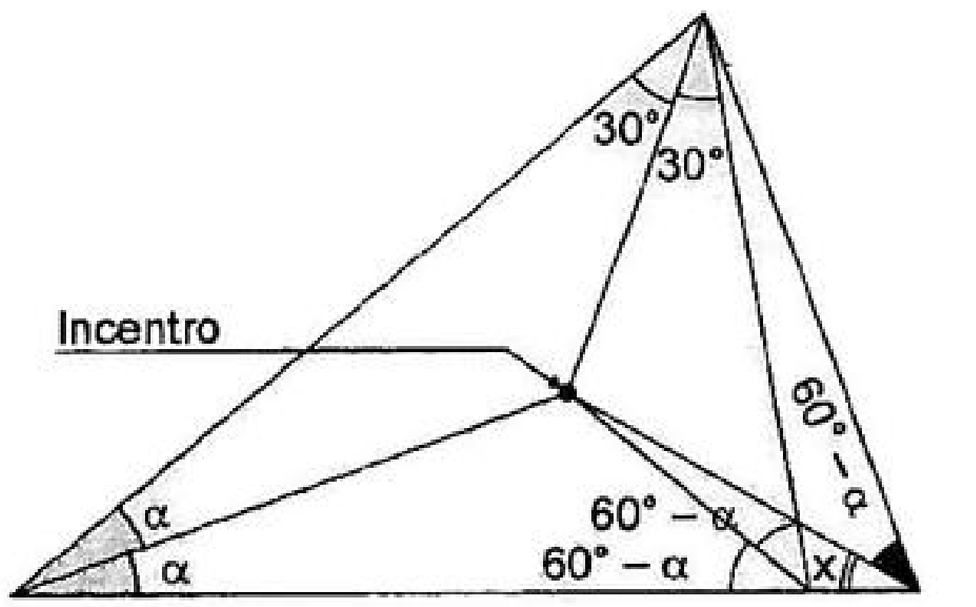
Se obtiene un triángulo



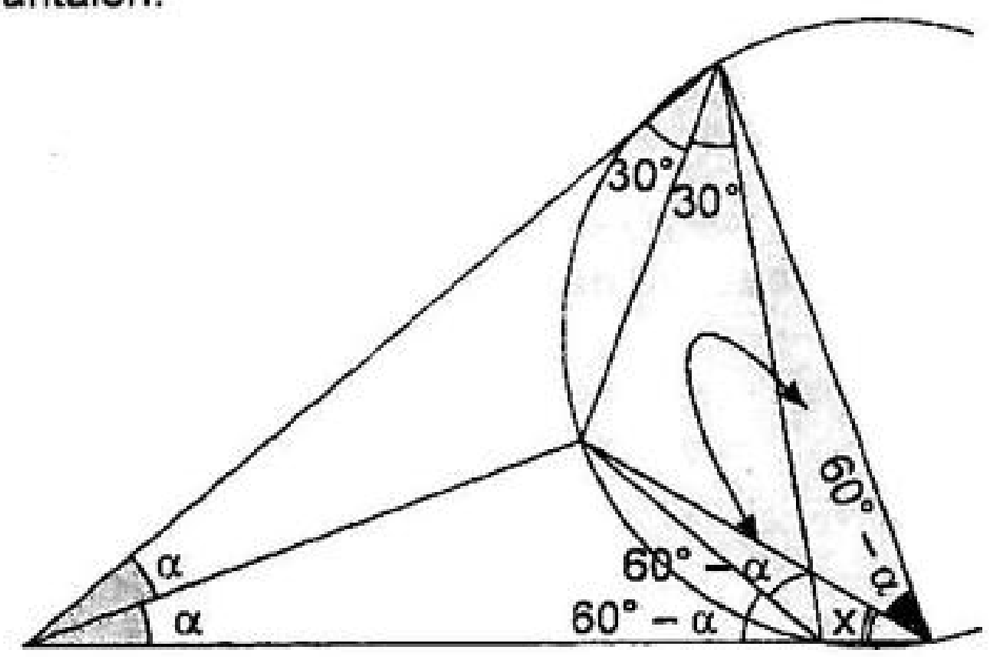
Scanned by CamScanner

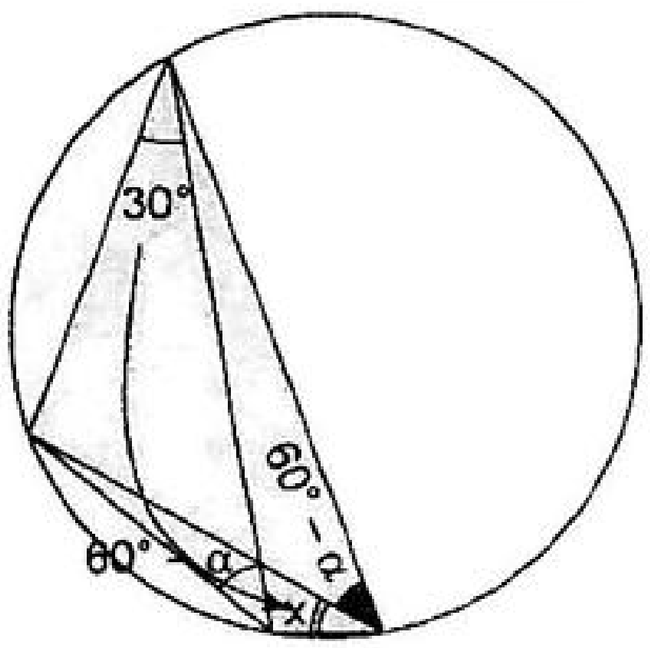


Paso N° 2. Se observa en la nueva figura el incentro:



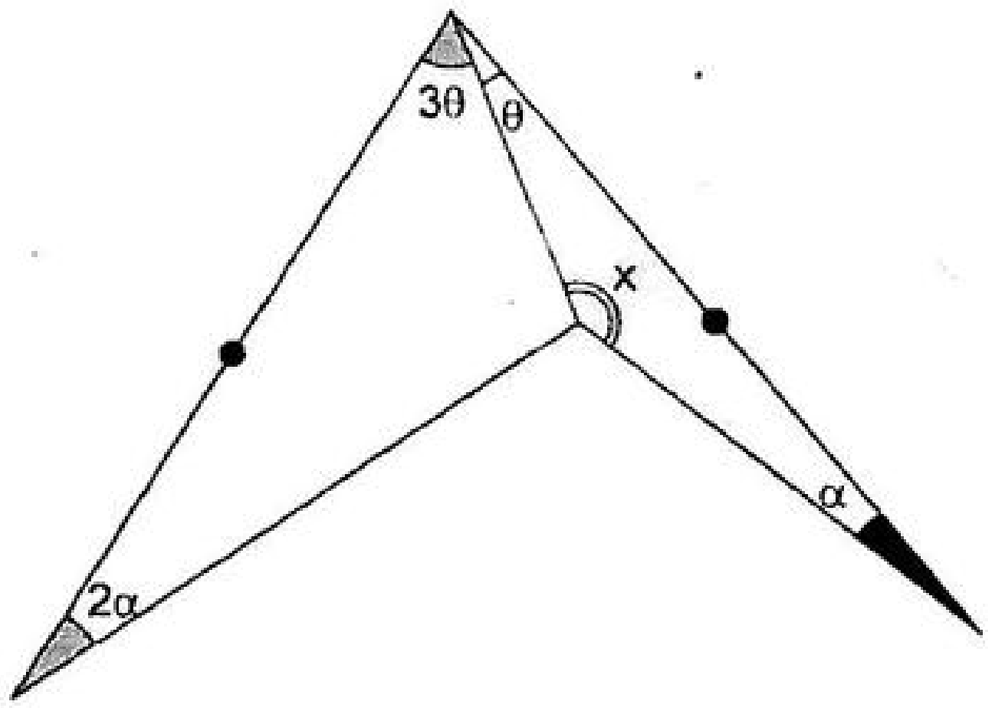
Paso N° 3. Se cumple la propiedad del rebote o del pantalón:





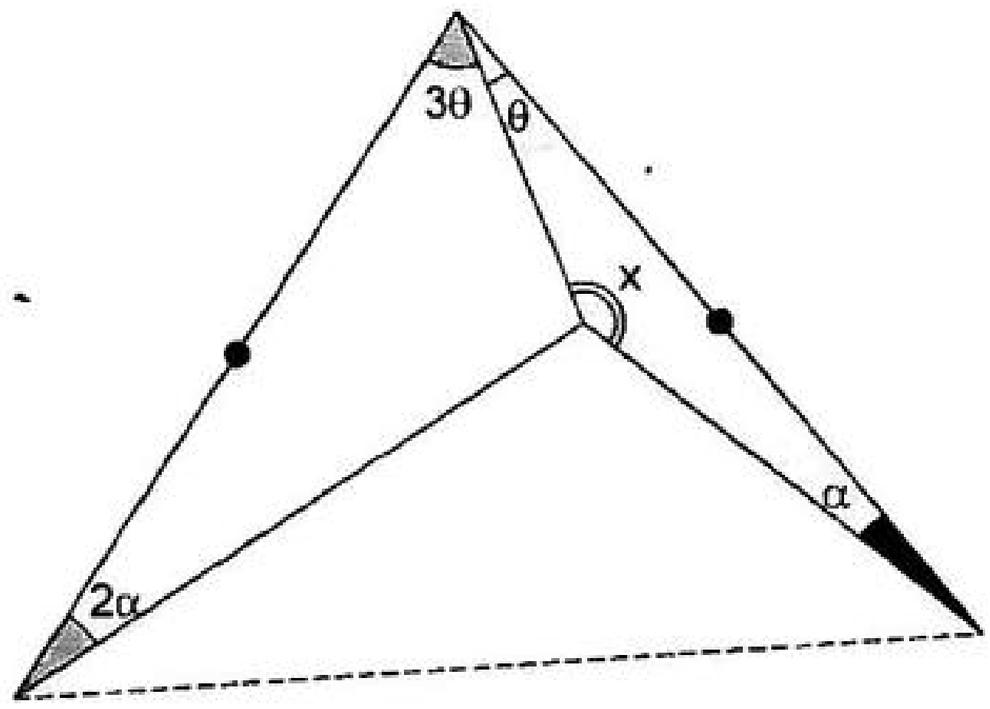
∴ x = 30°

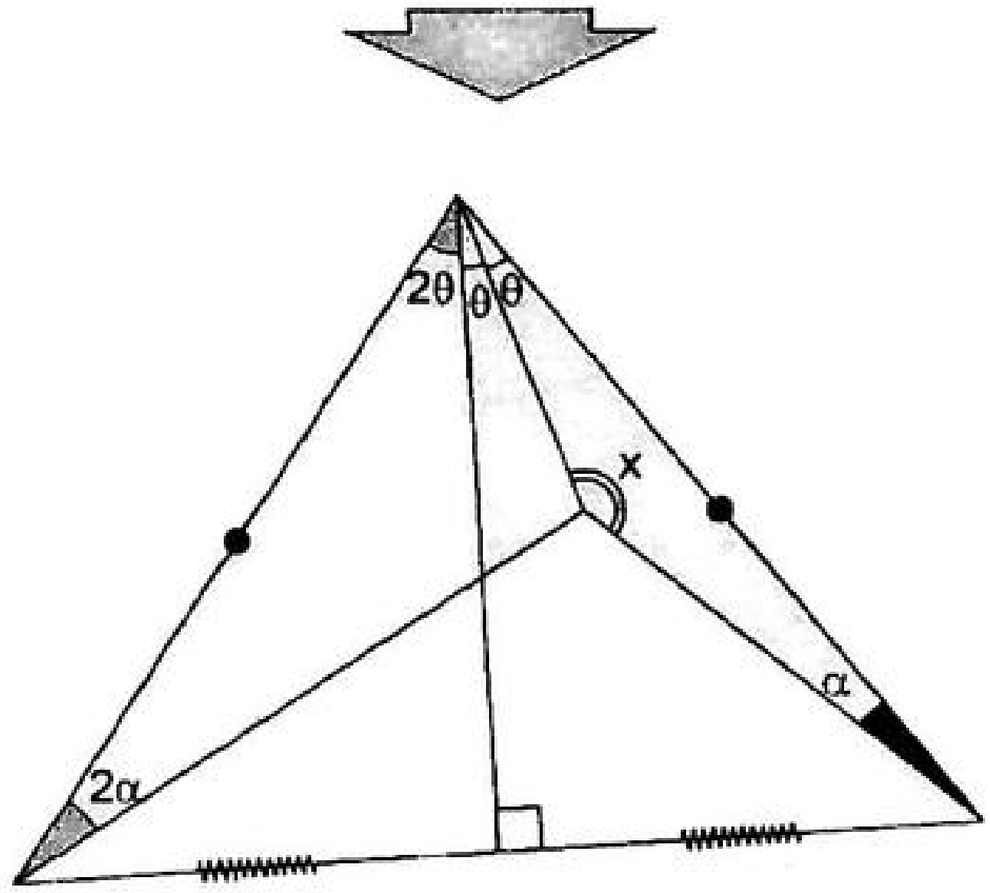
Problema 80. Caso general. Calcular x.



Resolución:

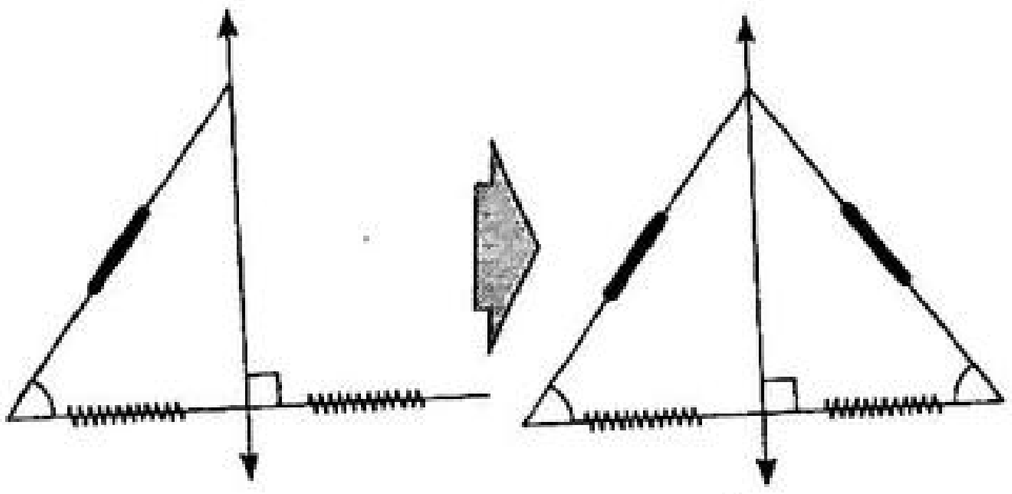
Paso N° 1. Completamos la figura a un triángulo isósceles:



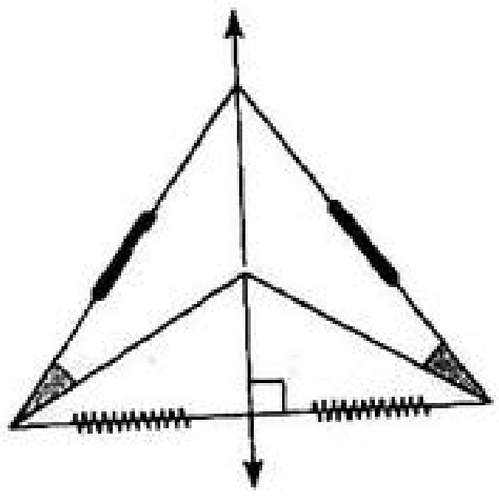


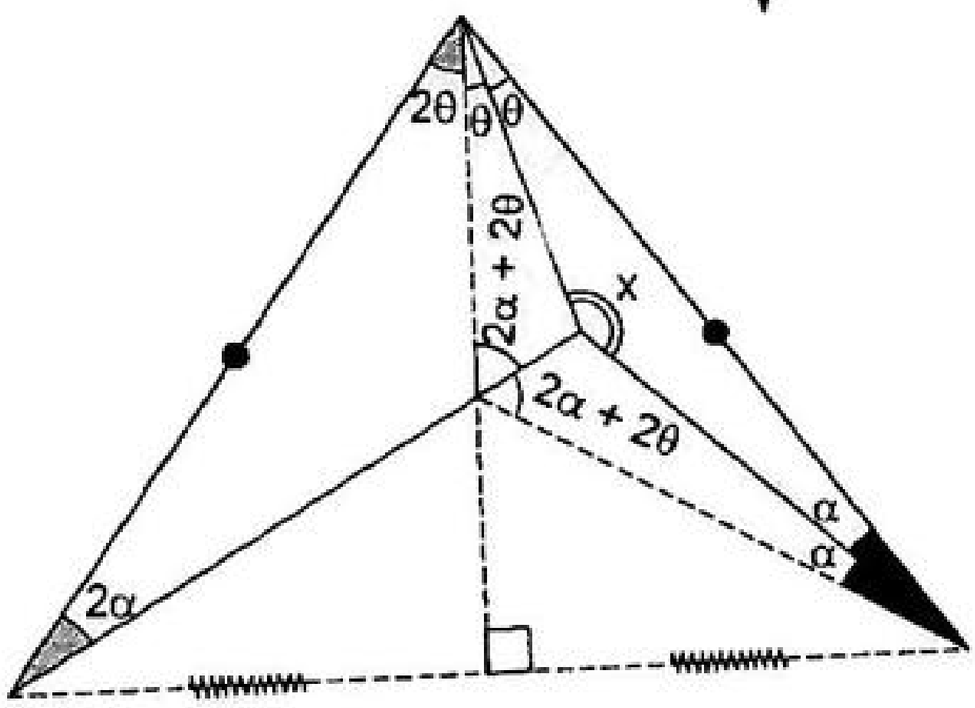
Scanned by CamScanner

Paso N° 2. Se observa:

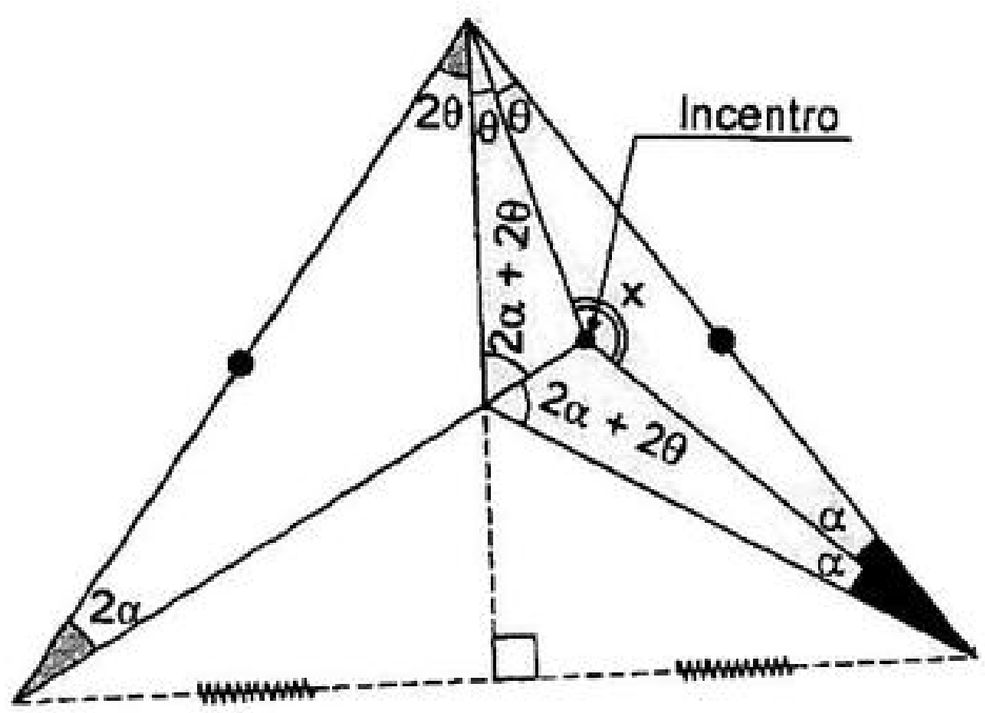


También

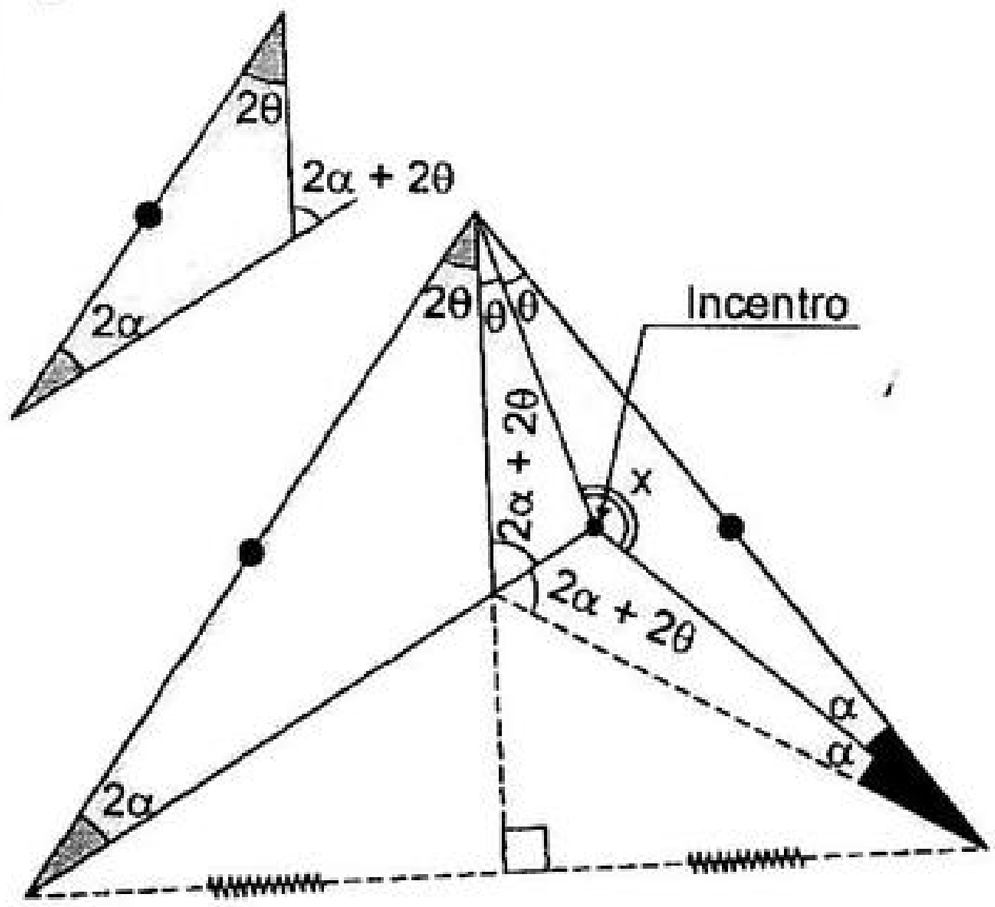


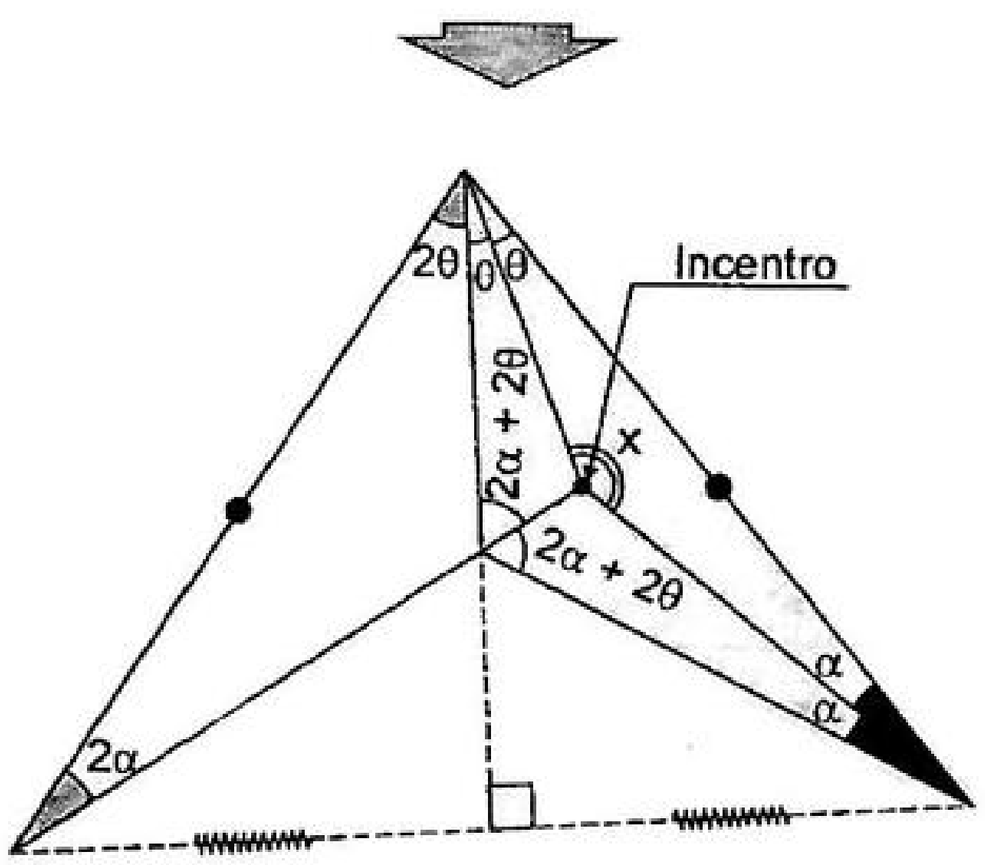


Paso N° 3. Se observa el incentro en la siguiente figura:

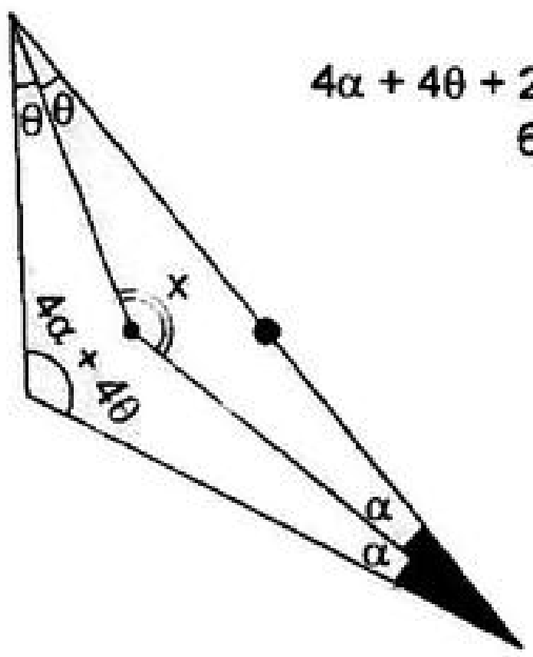


Paso N° 3. Completando los ángulos internos en la figura:





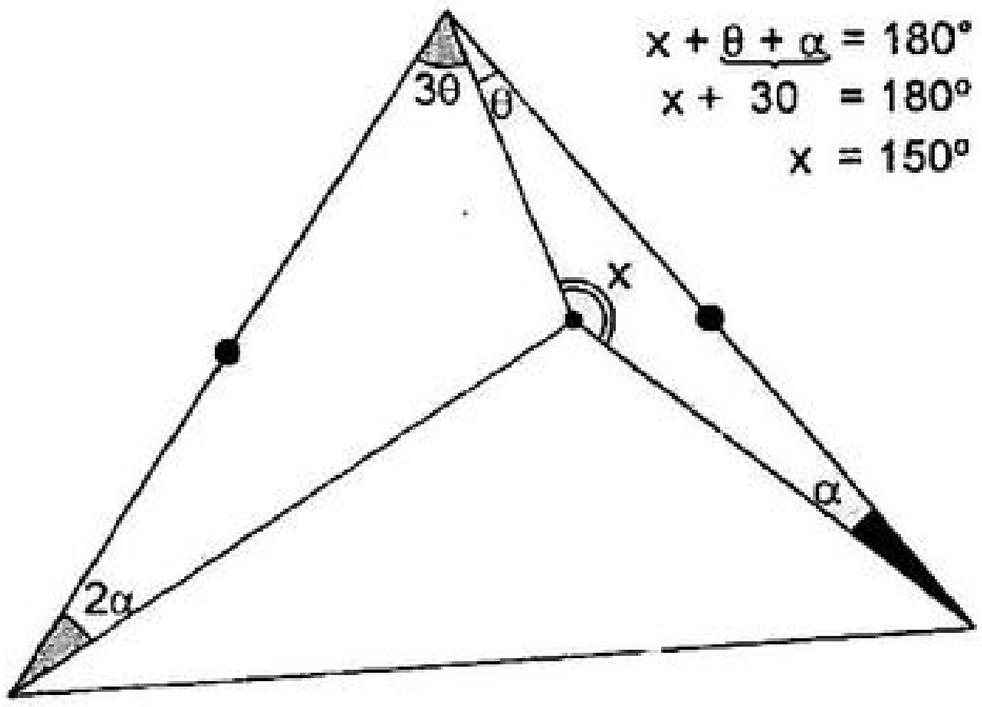
Paso N° 5. Se observa en la figura un triángulo donde cumple:



$$4\alpha + 4\theta + 2\theta + 2\alpha = 180°$$
$$6\theta + 6\alpha = 180°$$
$$\theta + \alpha = 30°$$

Scanned by CamScanner

También se observa:

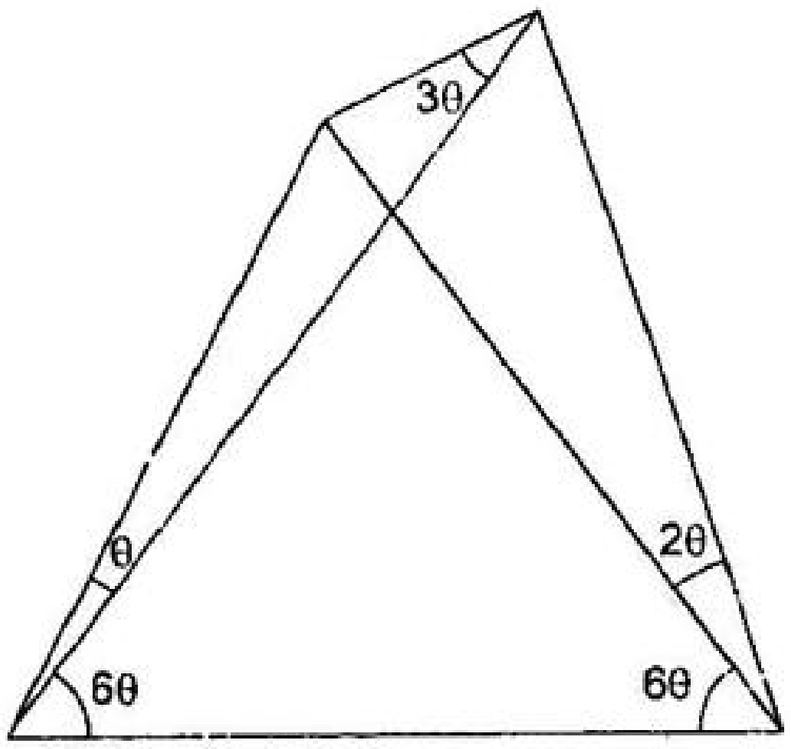


$x + \underline{\theta + \alpha} = 180°$

$x + 30 = 180°$

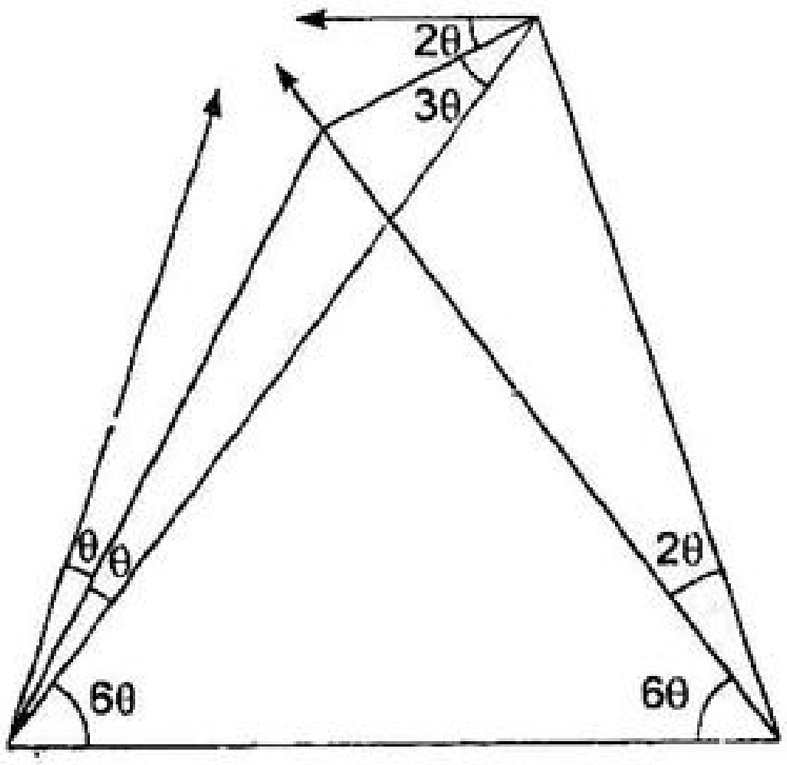
$x = 150°$

Problema 81. Calcular θ.

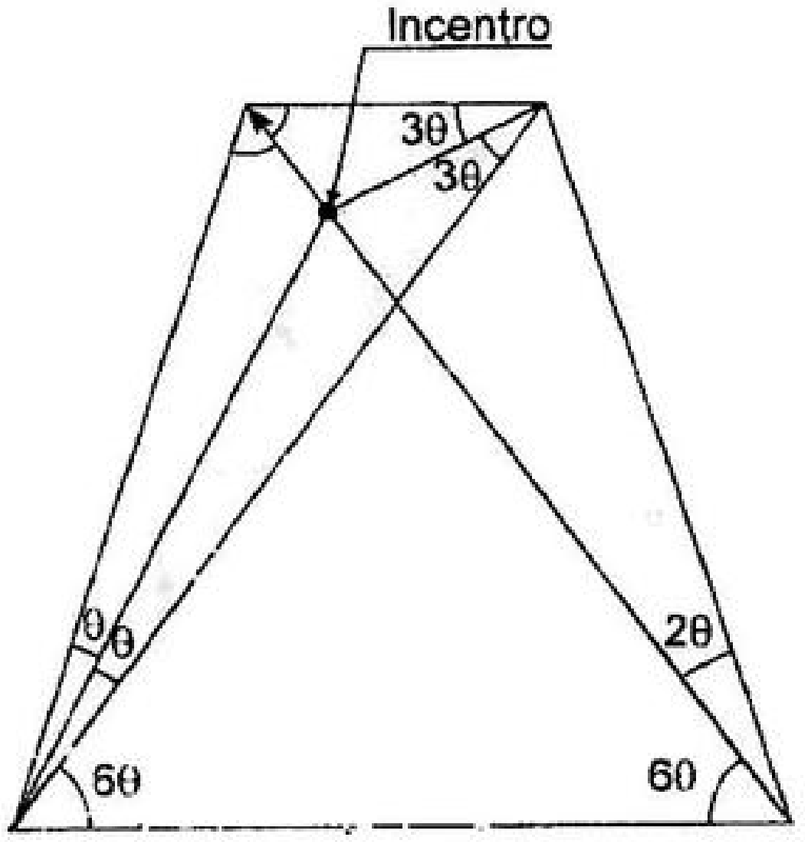


Resolución:

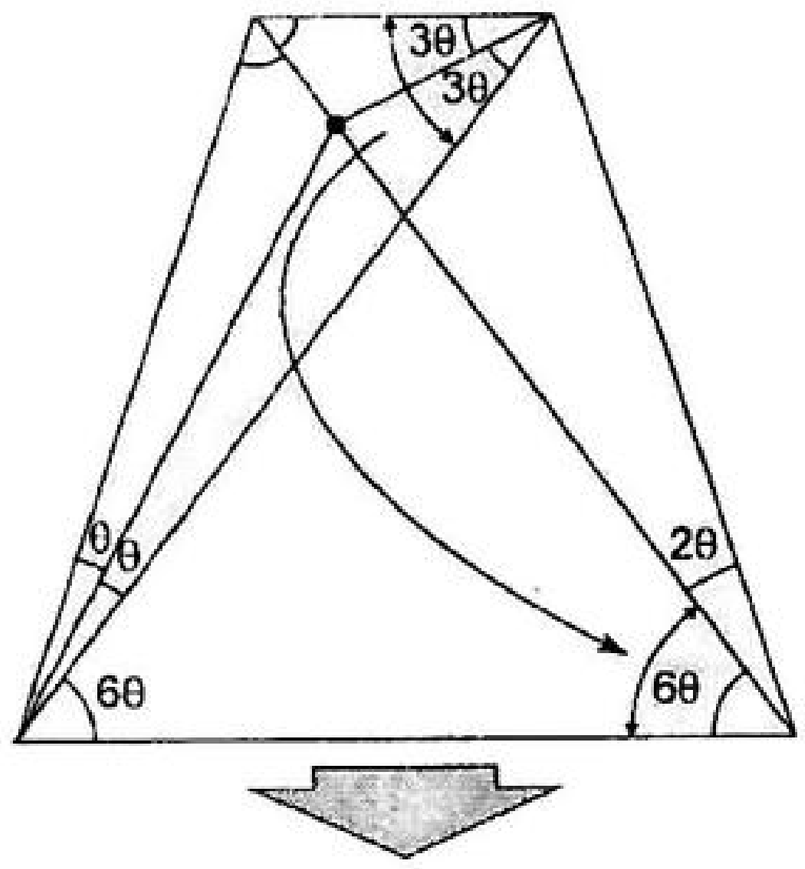
Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo para obtener un triangulo y se observa su encuentro, así:

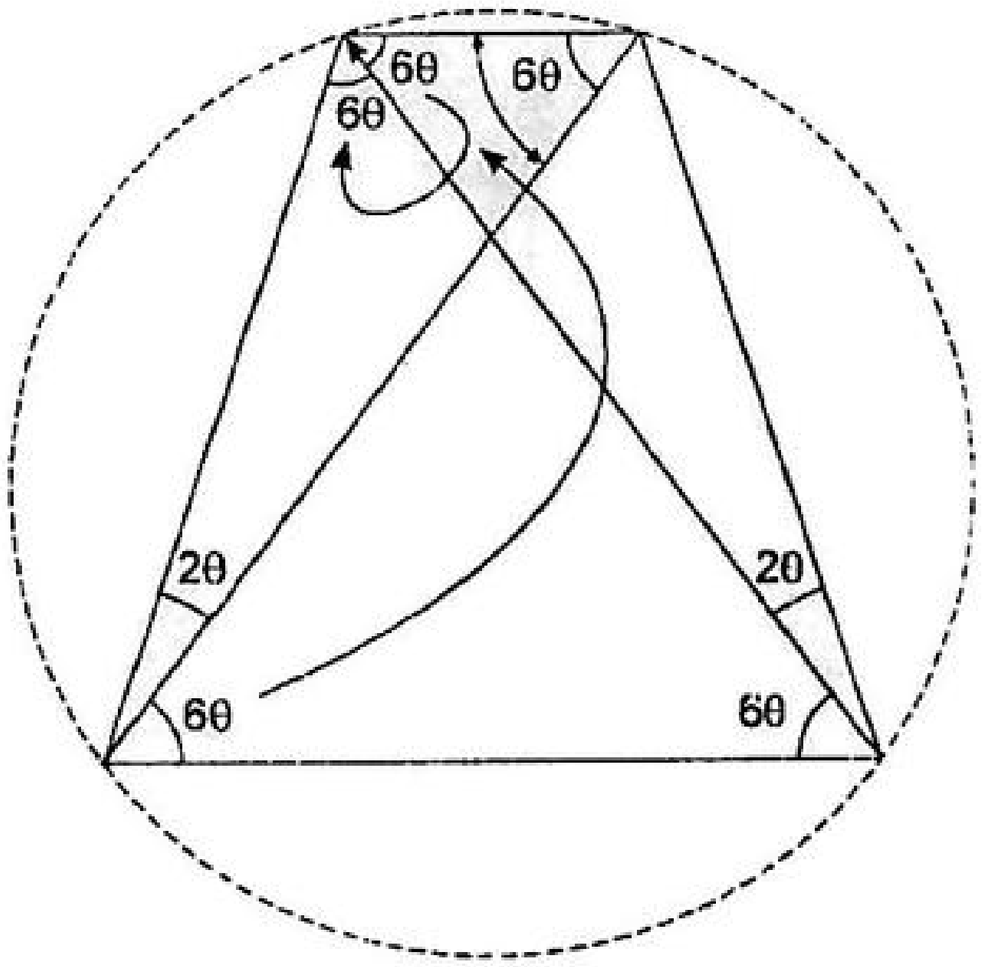


Incentro



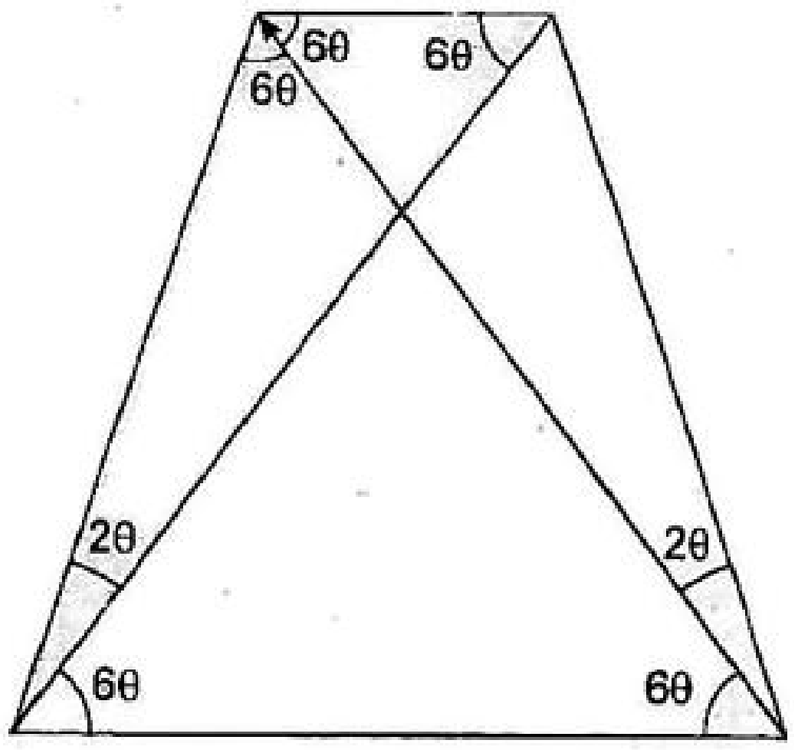
Paso N° 2. Se observa un cuadrilátero donde se cumple la propiedad del rebote o del pantalón:





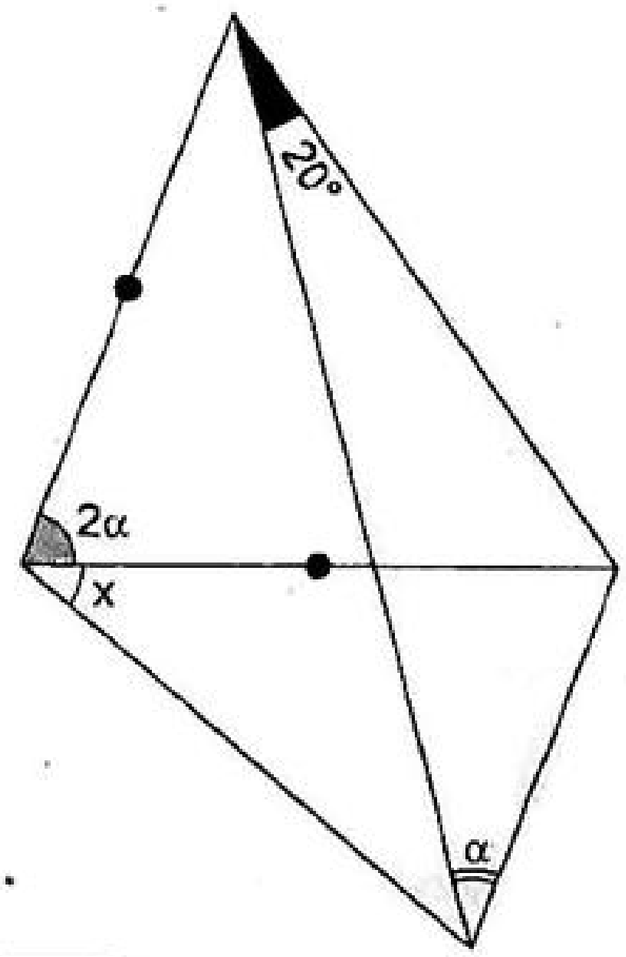
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Aquí cumple:



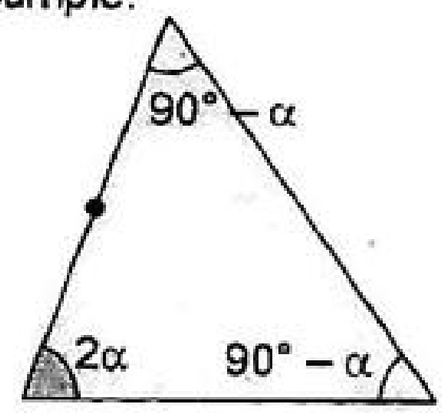
$$\therefore 2\theta + 6\theta + 6\theta + 6\theta = 180°$$
$$20\theta = 180°$$
$$\theta = 9°$$

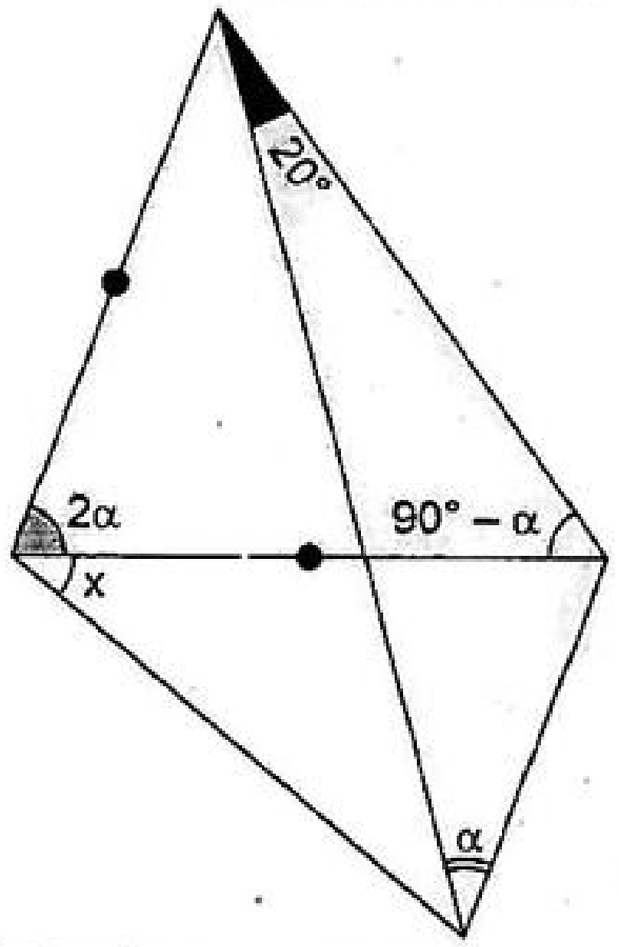
Problema 82. Calcular x.



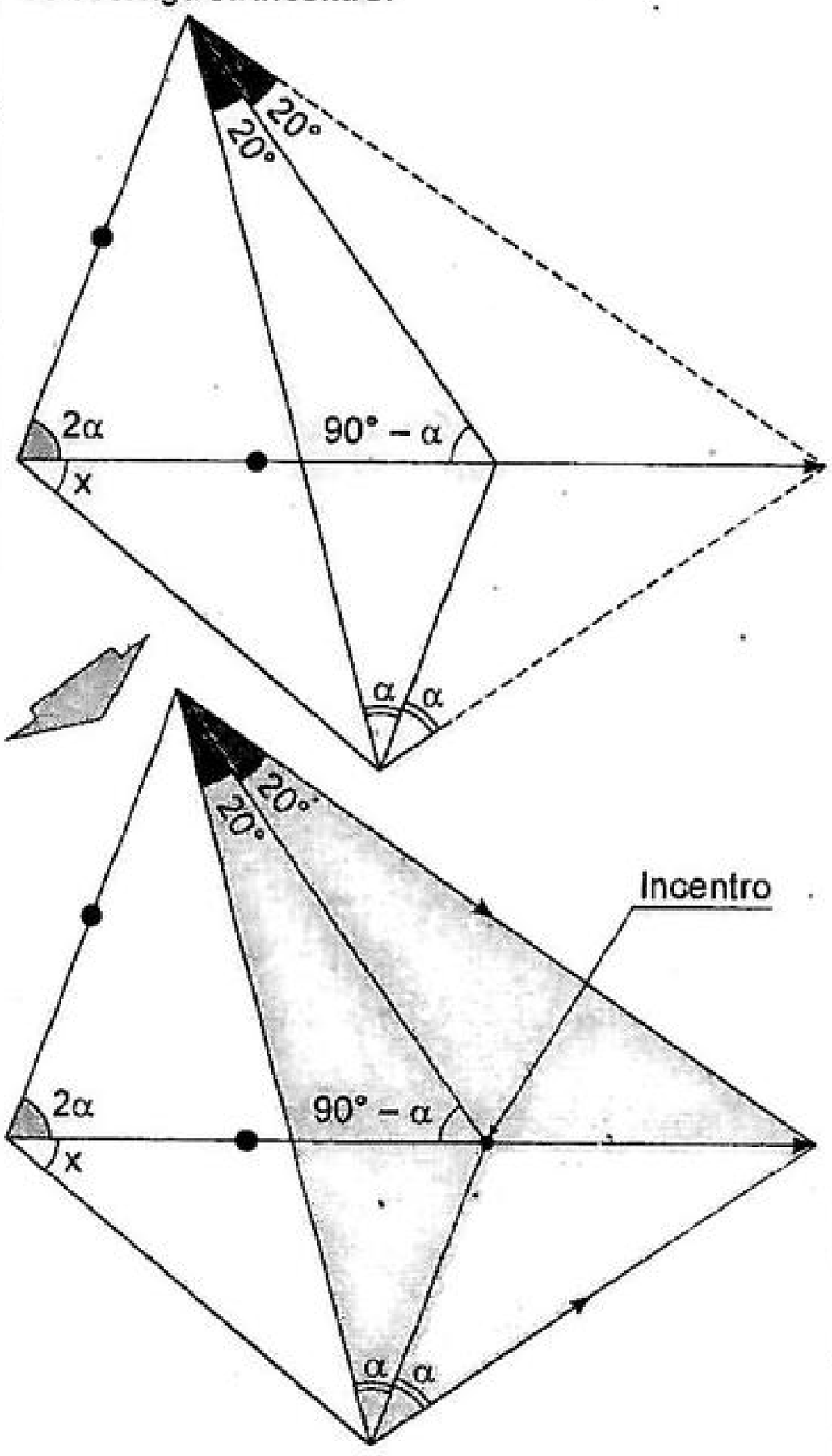
Resolución:

Paso N° 1. Se observa un triángulo isósceles, donde cumple:



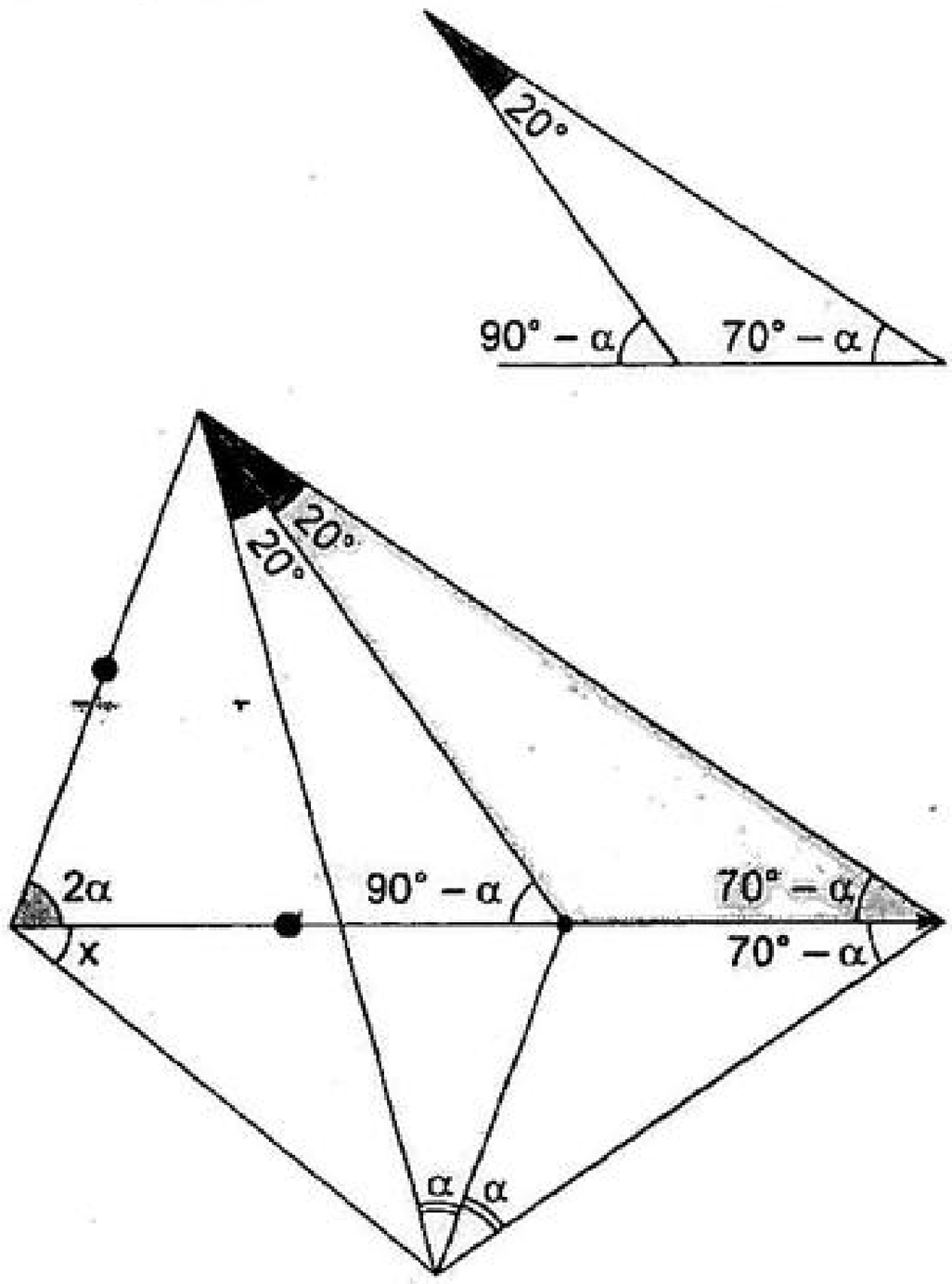


Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo, completamos un triángulo externamente de manera que se obtenga su incentro:

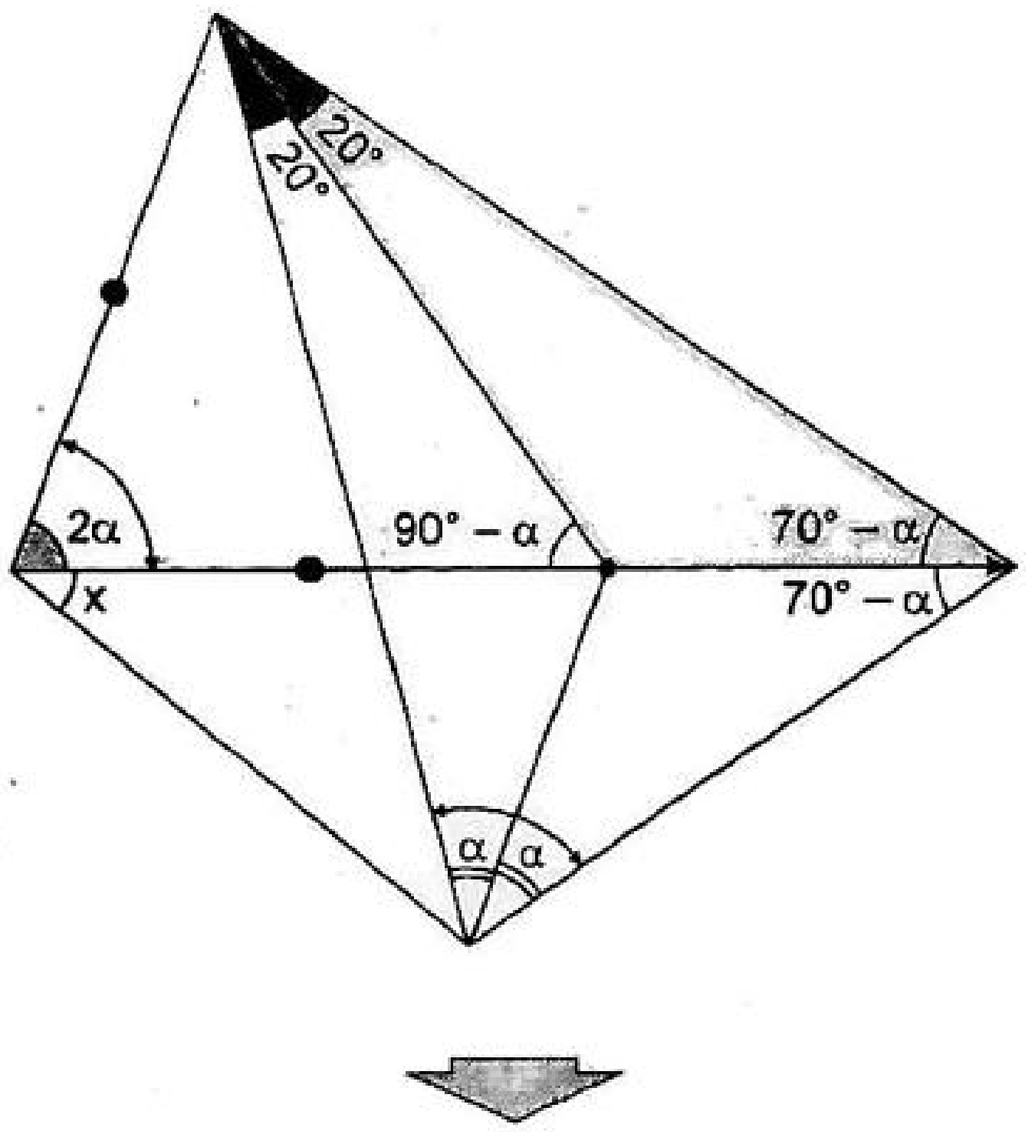


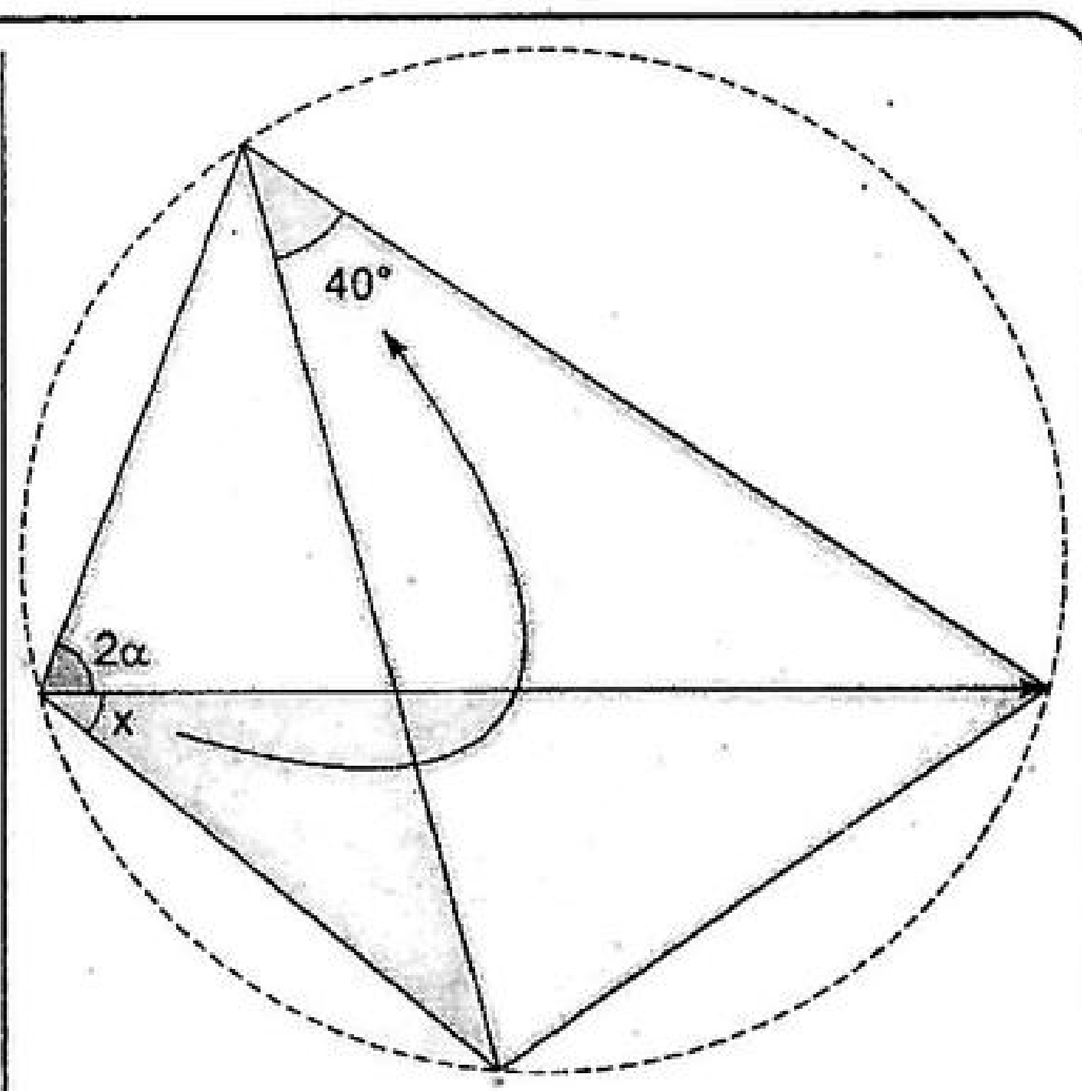
Scanned by CamScanner

Paso N° 3. Ahora se obtiene en la nueva figura:



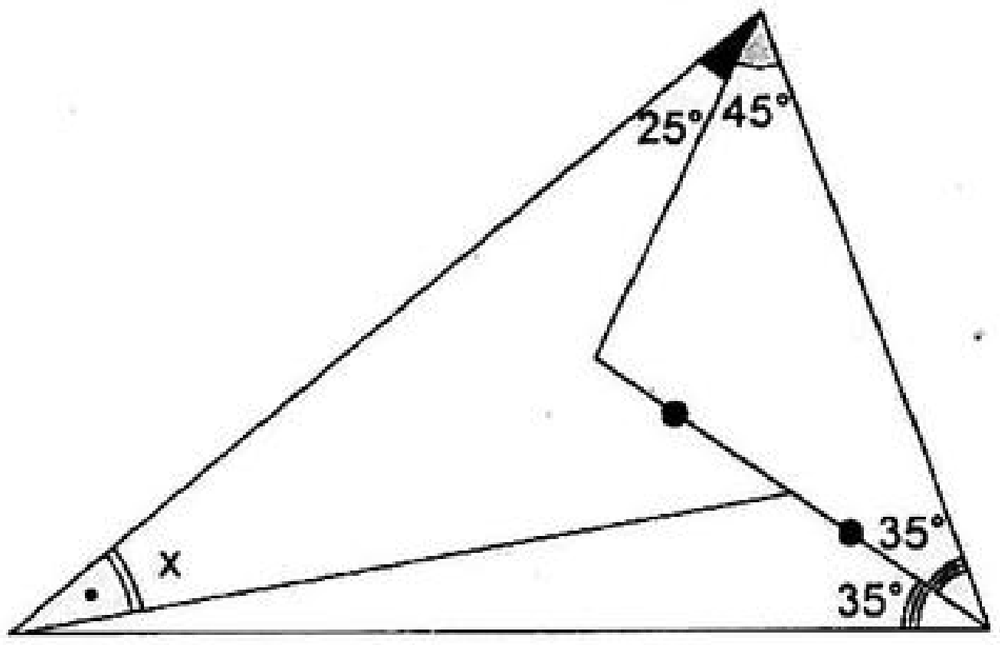
Paso N° 4. Se tiene ahora un cuadrilátero donde se observa la propiedad del rebote:





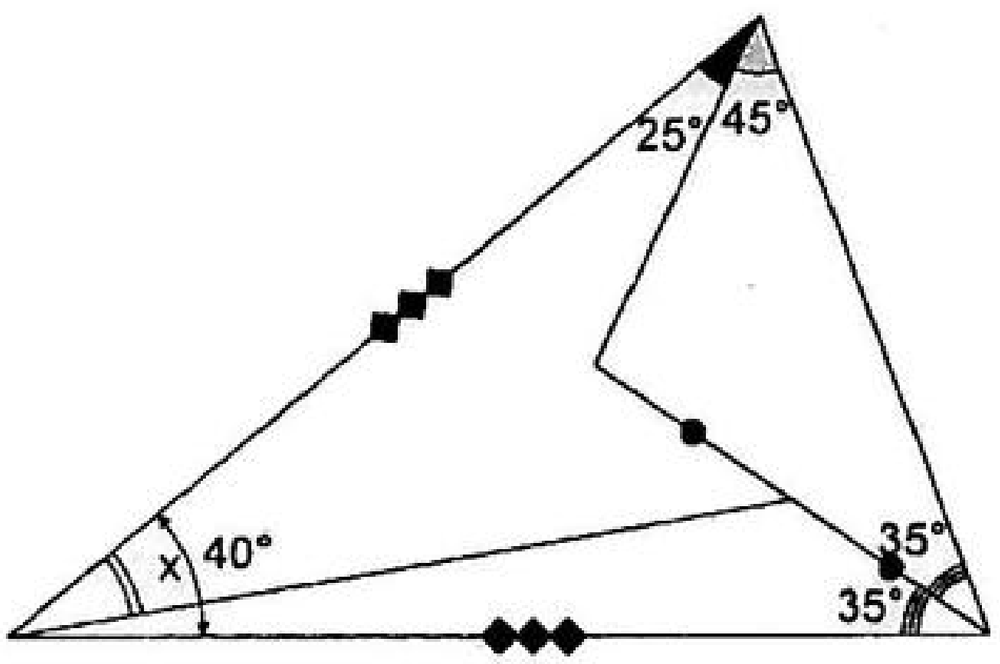
$\therefore x = 40°$

Problema 83. Calcular x.

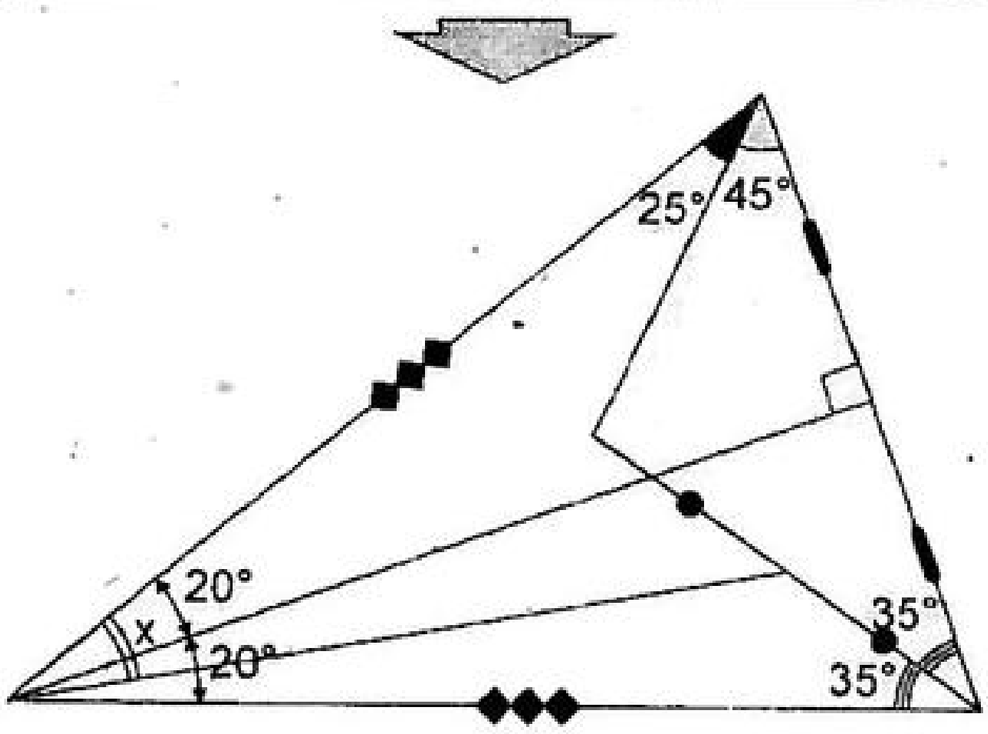


Resolución:

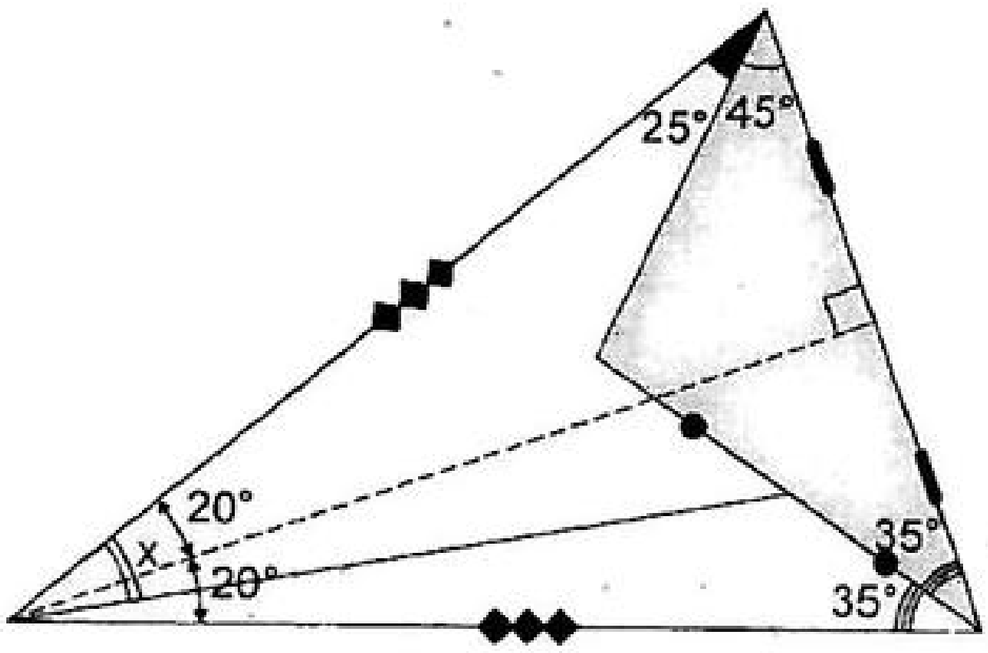
Paso N° 1. Se observa un triángulo isósceles:

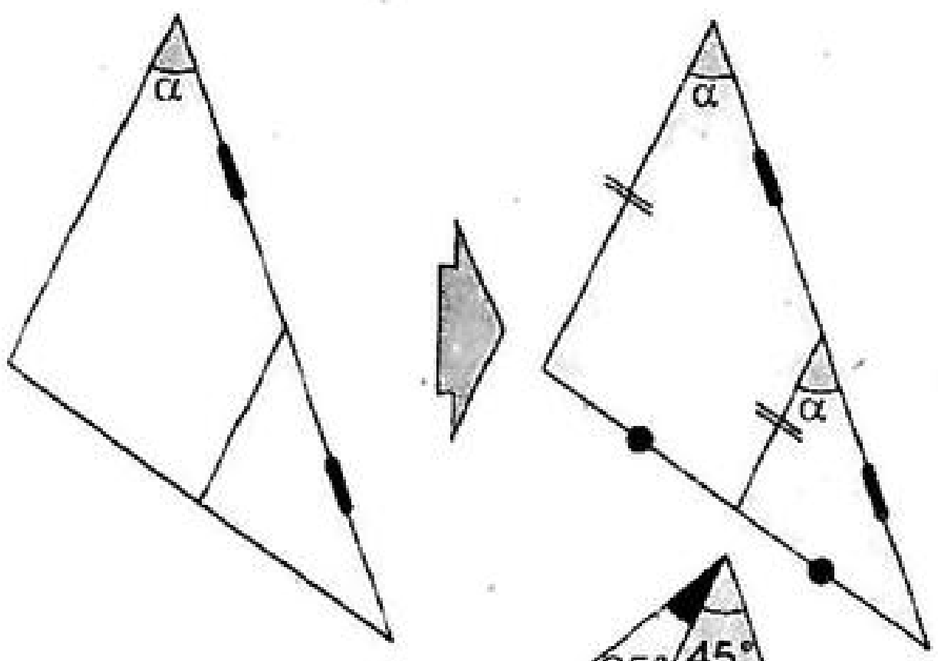


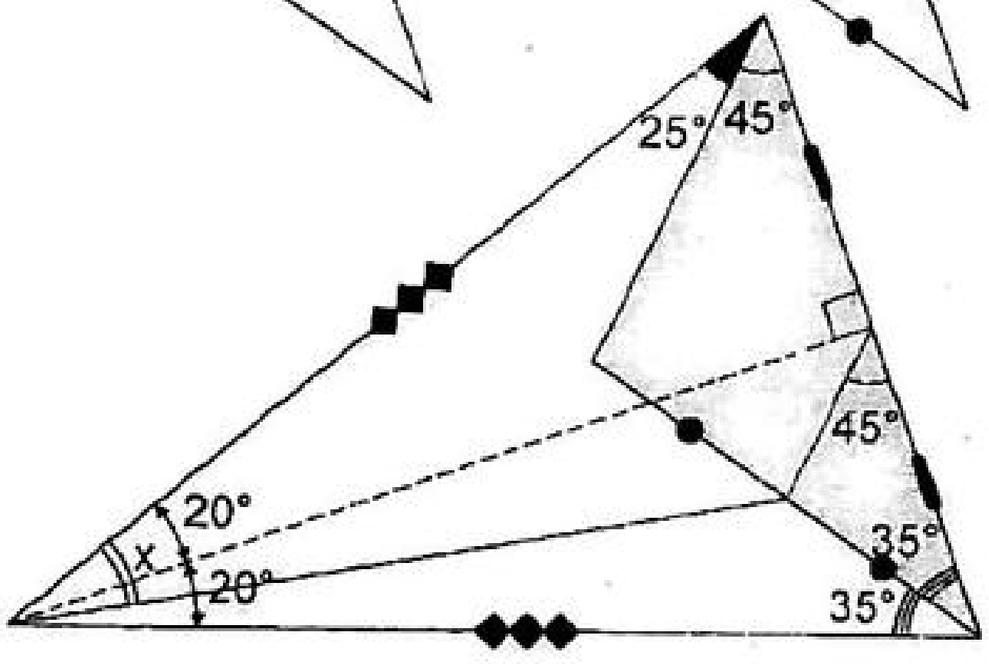
Scanned by CamScanner



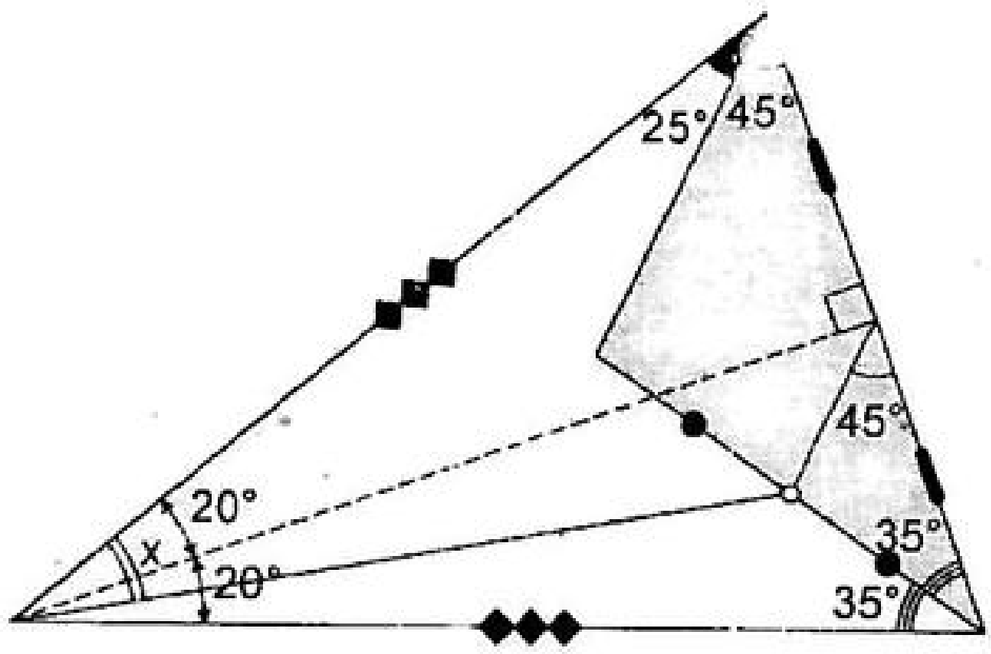
Paso N° 2. Se obtiene un triángulo donde tiene base media, así:

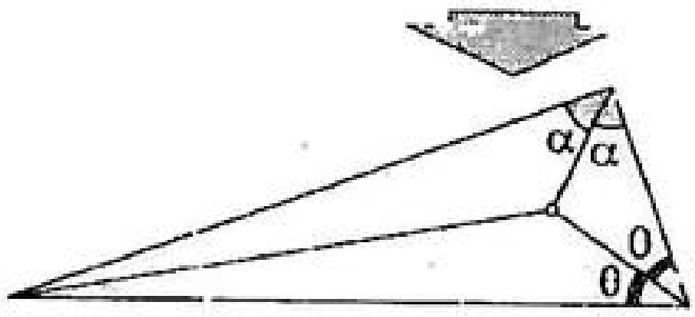




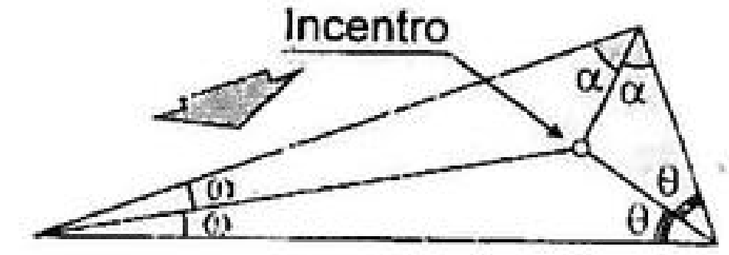


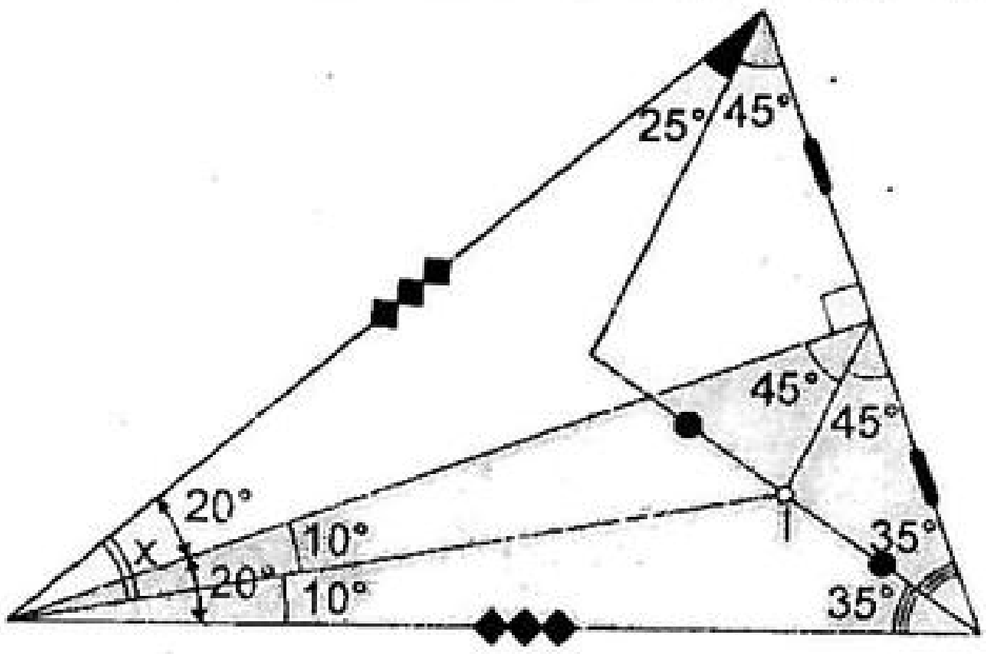
Paso N° 3. Ahora tenemos el siguiente triángulo donde se observa el incentro:





Incentro



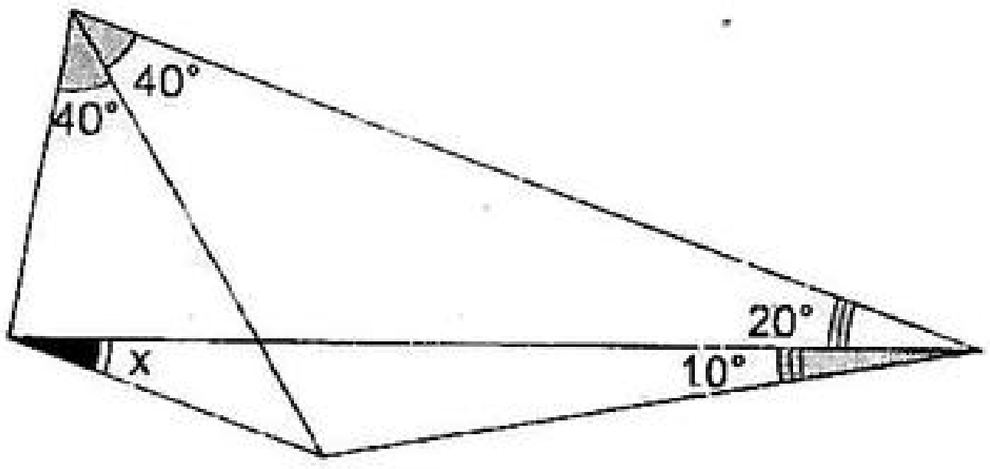


∴ En la figura se observa:

$x = 20° + 10°$

$x = 30°$

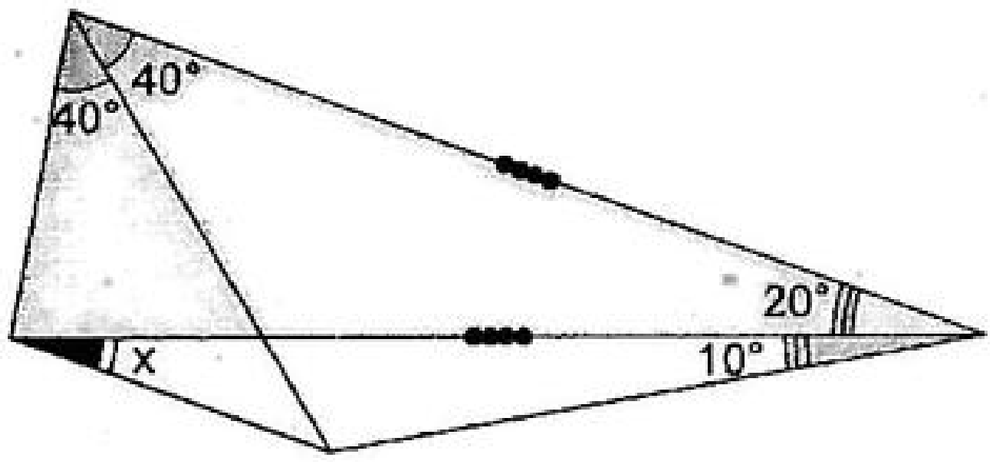
Problema 84. Caso general. Calcular x.

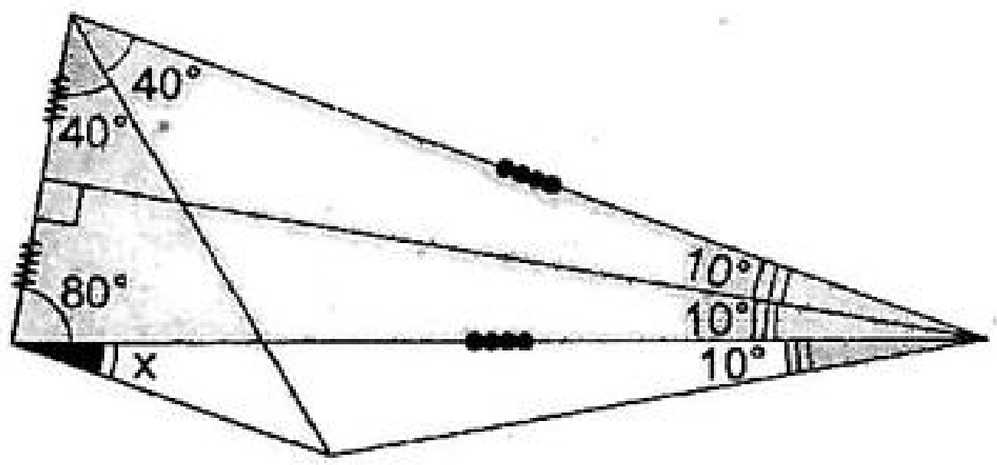


Scanned by CamScanner

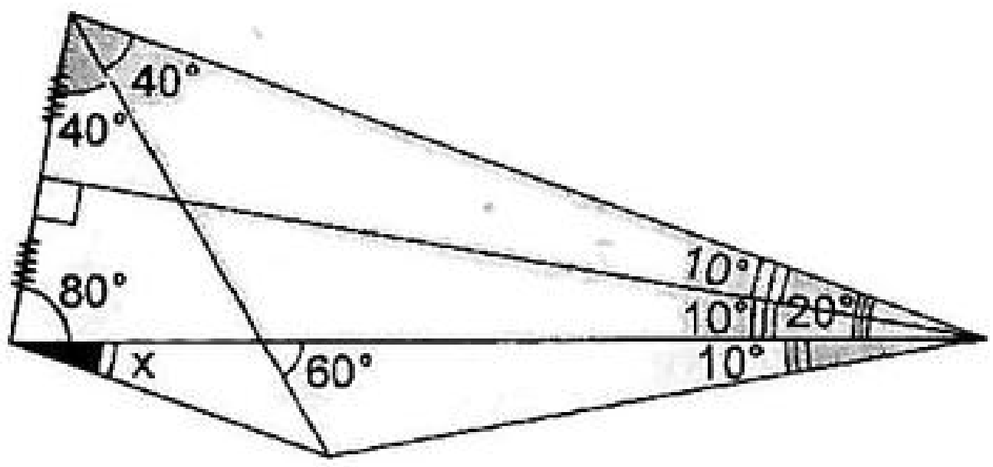
Resolución:

Paso N° 1. Completando ángulos interiores se observa un triángulo isósceles:

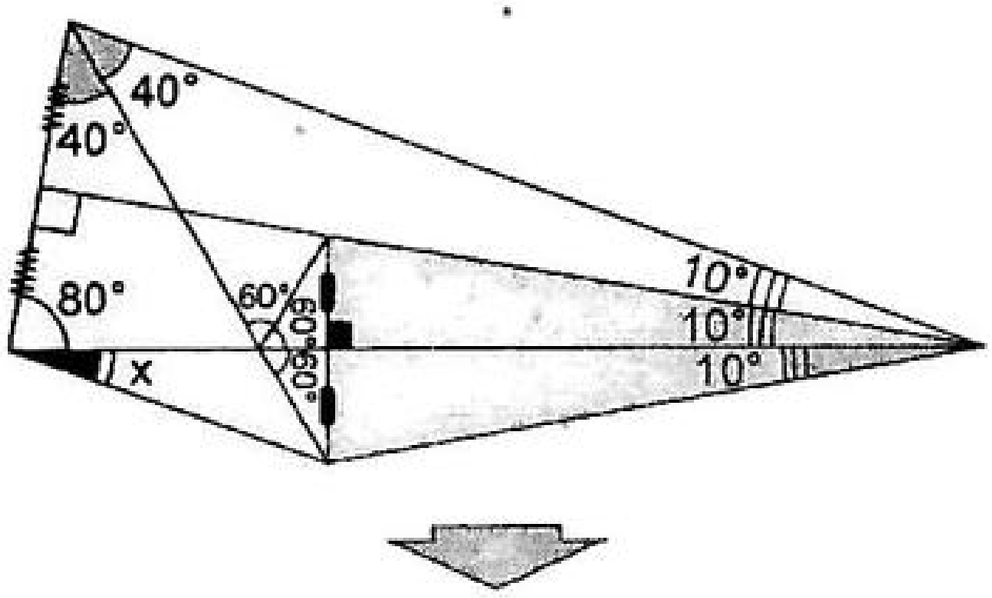


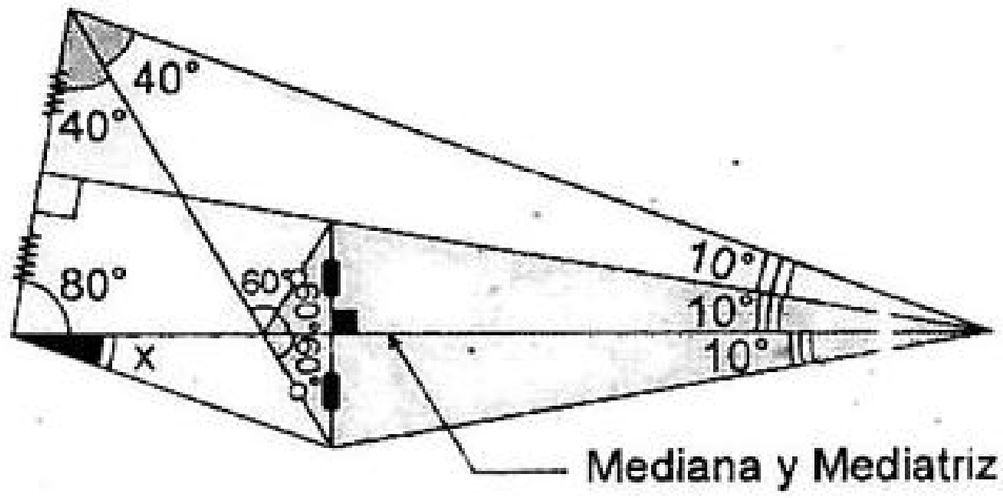


Paso N° 2. También se observa un triángulo exterior de 60°:

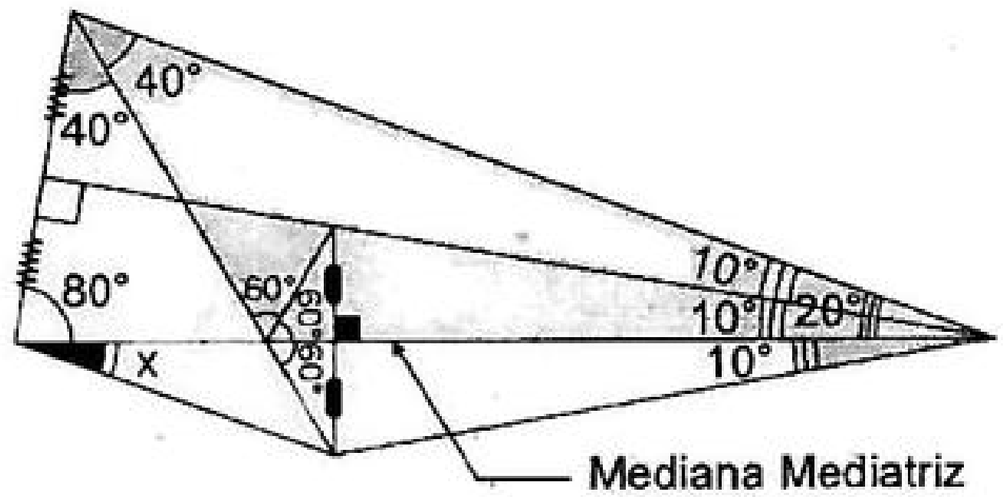


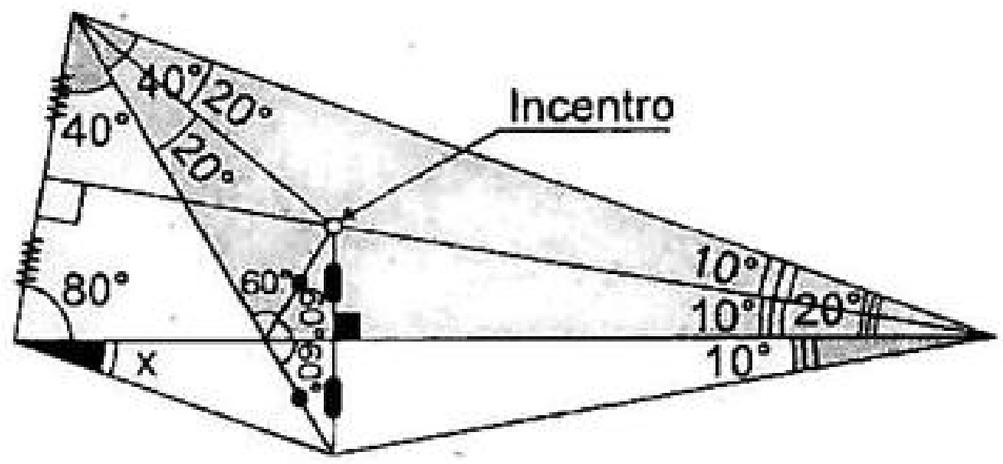
Paso N° 3. Ahora construimos internamente un nuevo triángulo isósceles, así:



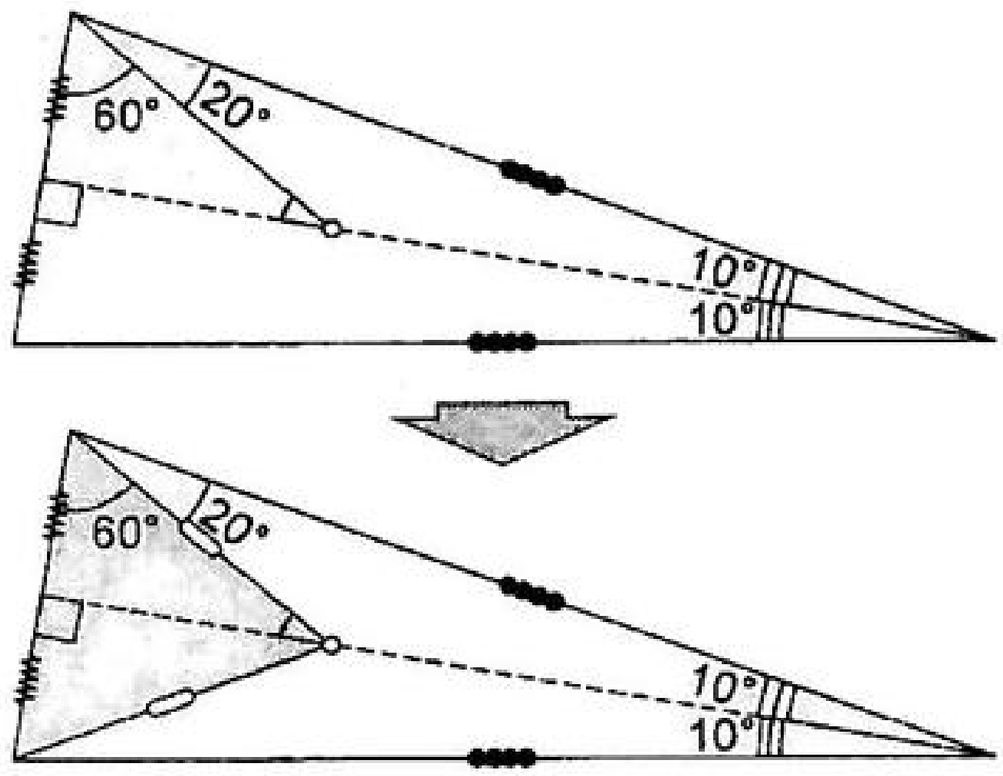


Paso N° 4. Construimos un triángulo donde se obtiene el incentro:

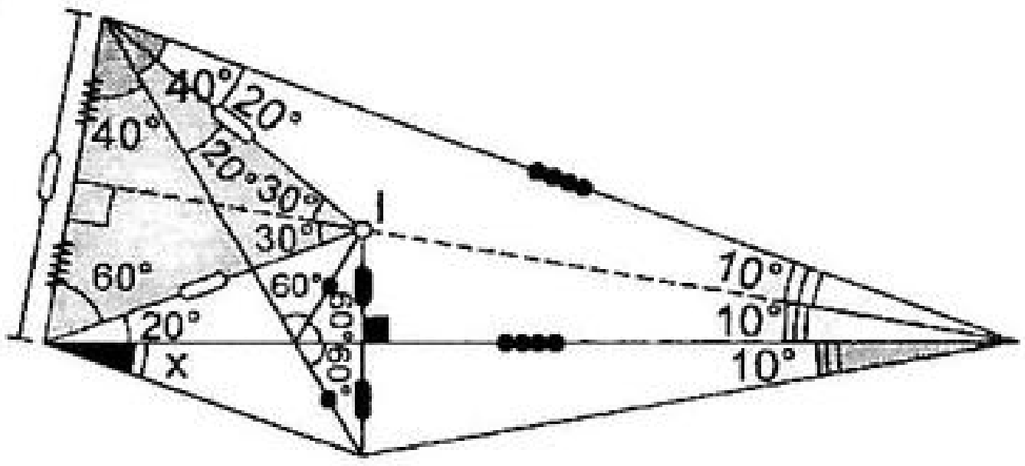




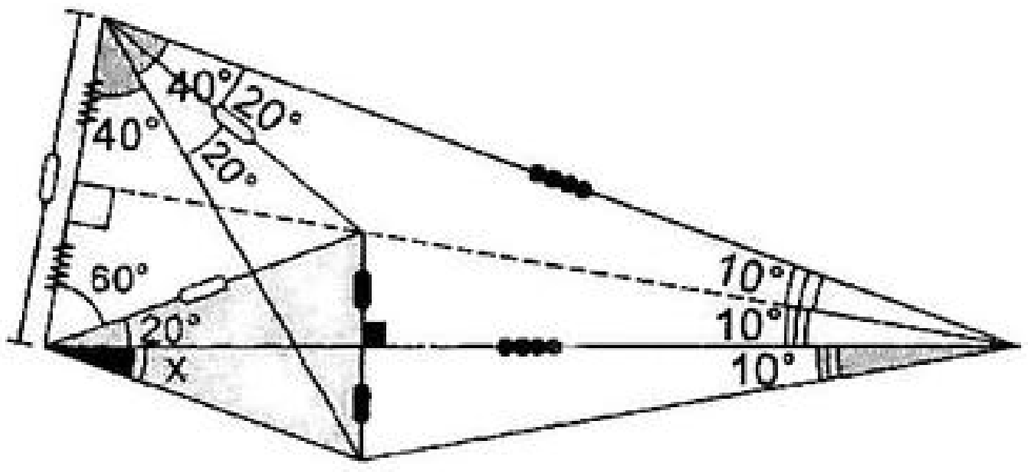
Paso N° 5. Ahora se obtiene la siguiente figura, un triángulo equilátero, así:

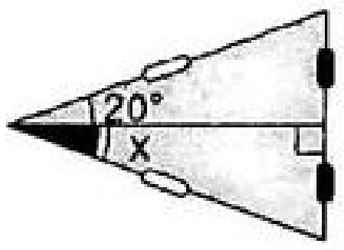


Scanned by CamScanner



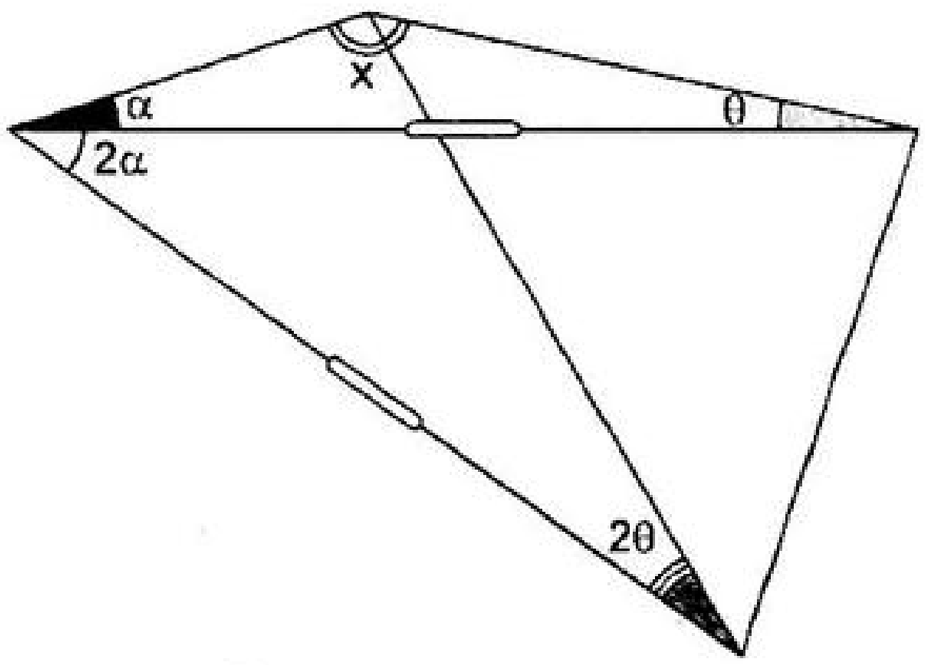
Paso N° 6. Se obtiene un triángulo isósceles, donde cumple:





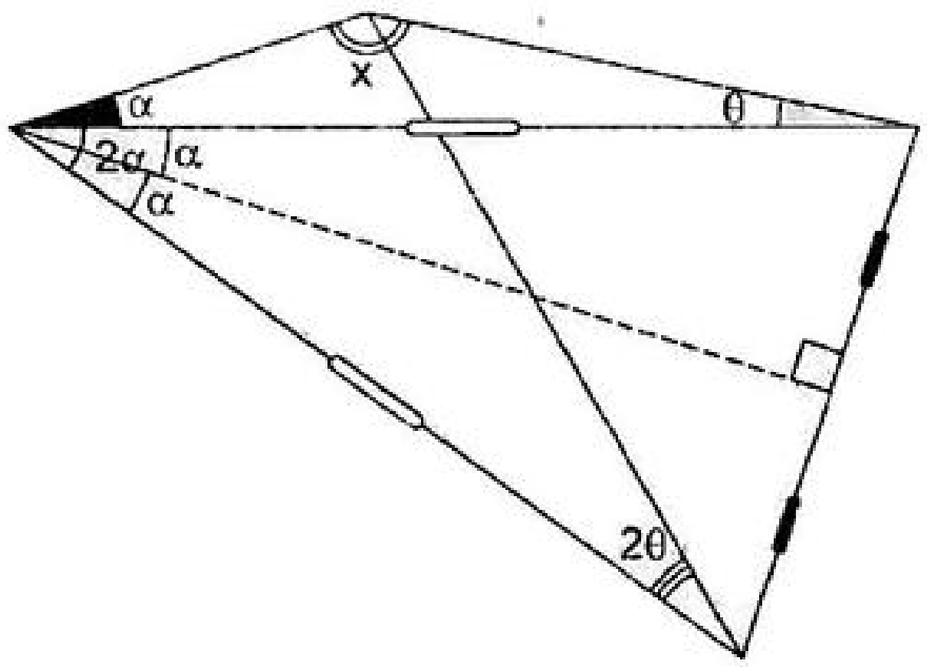
$\therefore x = 20°$

Problema 85. Calcular x.

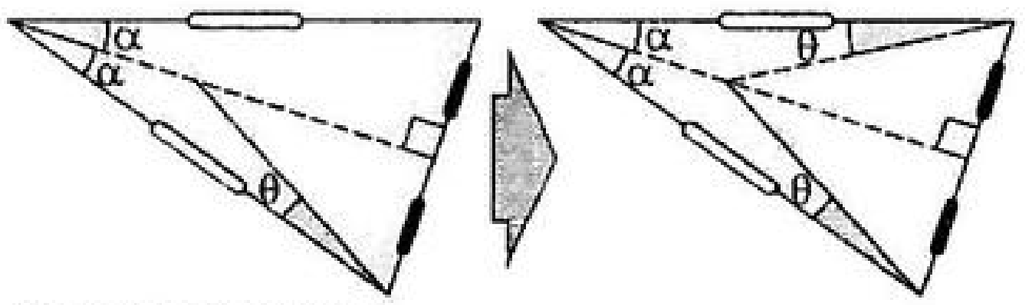


Resolución:

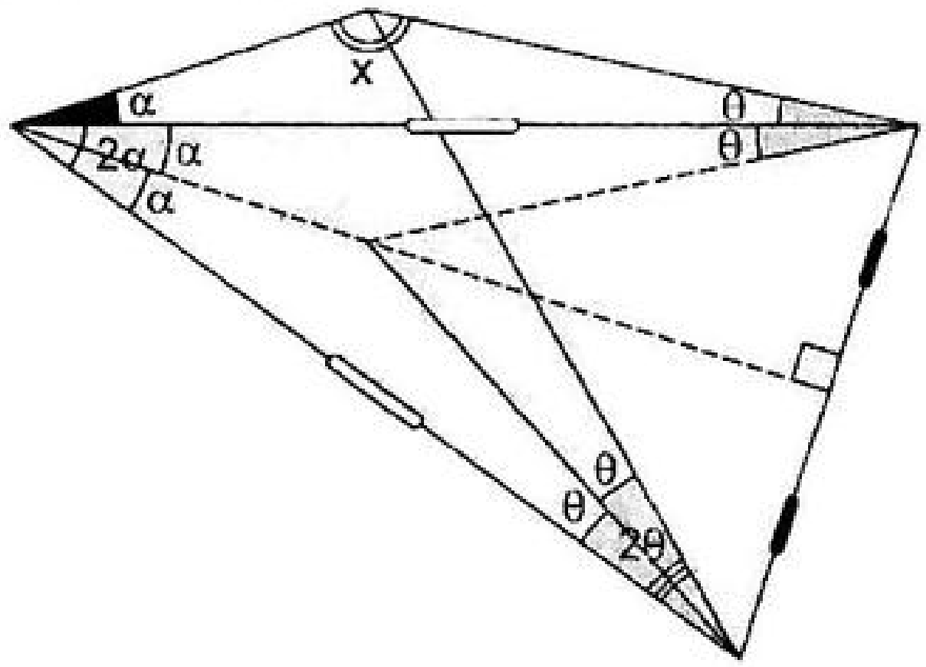
Paso N° 1. Como se observa un triángulo isosceles, empleamos sus propiedades:



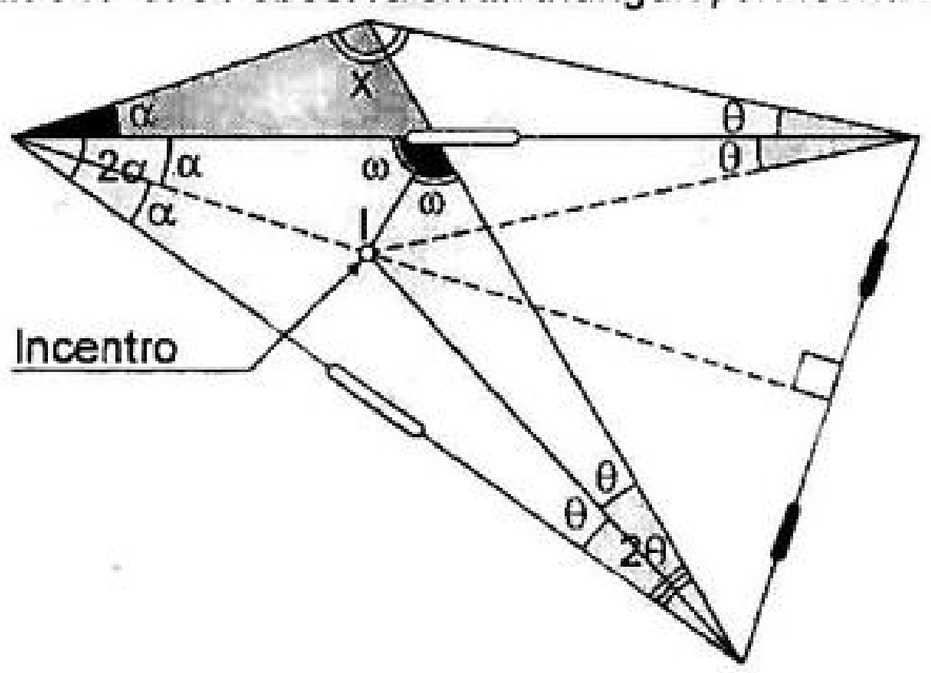
Paso N° 2. Empleando la siguiente propiedad que se cumple en los triángulos isósceles:



Para ello hacemos:

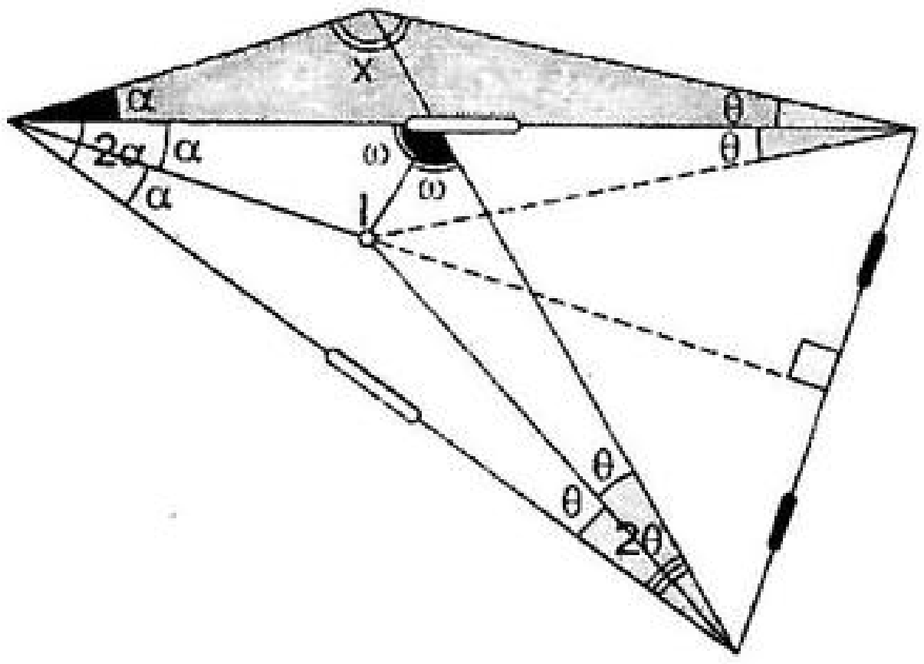


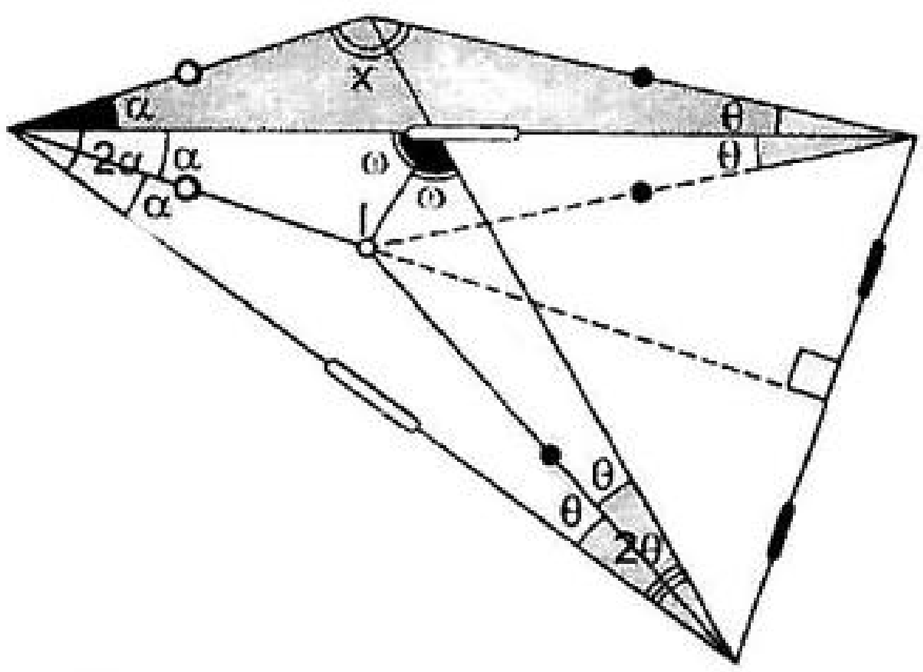
Paso N° 3. Se observa en un triángulo, el incentro:



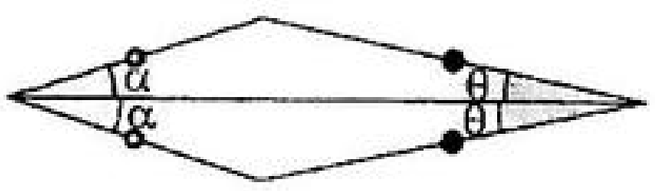
Scanned by CamScanner

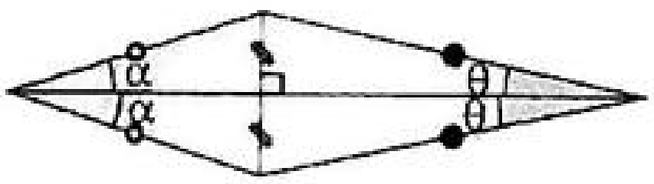
Paso N° 4. También observamos dos triángulos congruentes:

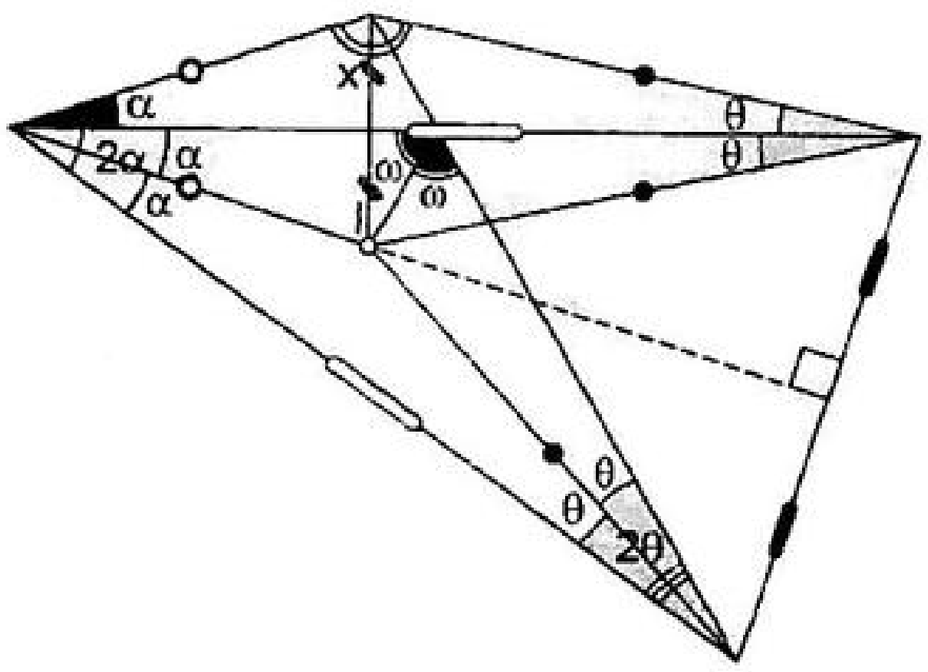




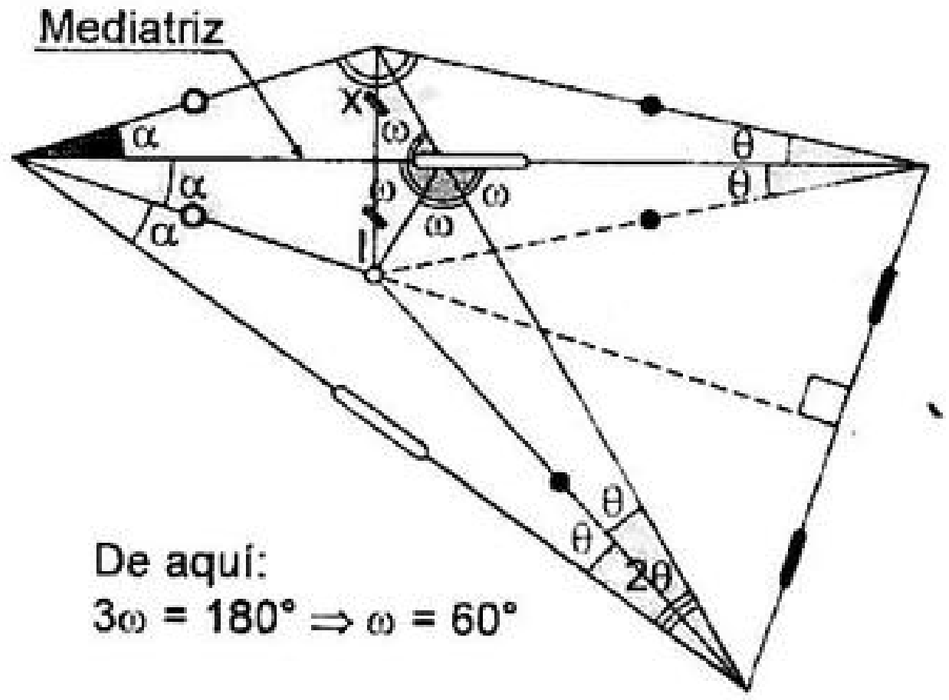
Paso N° 5. Se tiene la siguiente figura:





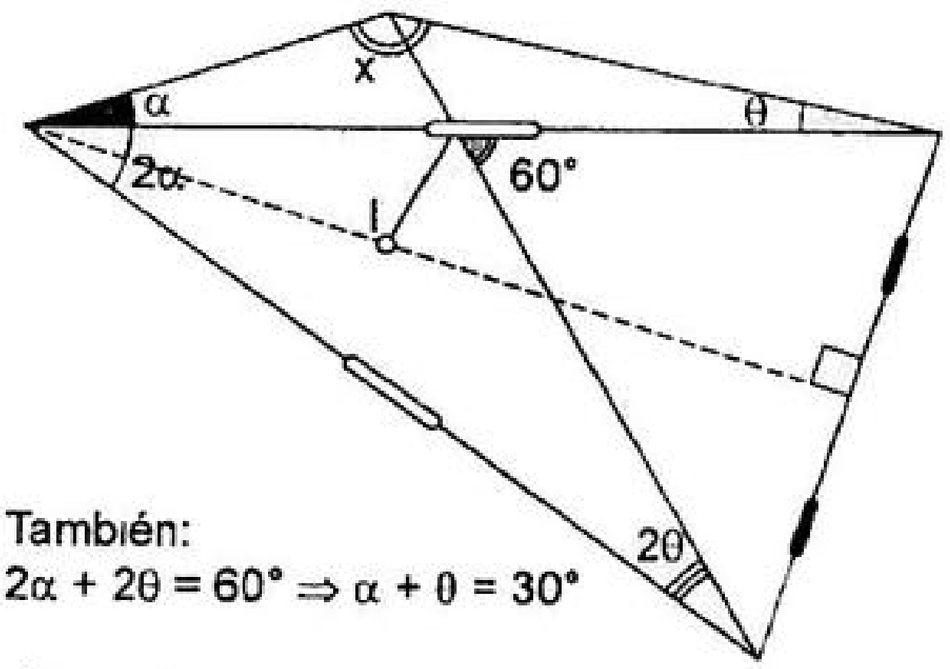


Paso N° 6. Ahora se obtiene:



De aquí:
$3\omega = 180° \Rightarrow \omega = 60°$

Paso N° 7.



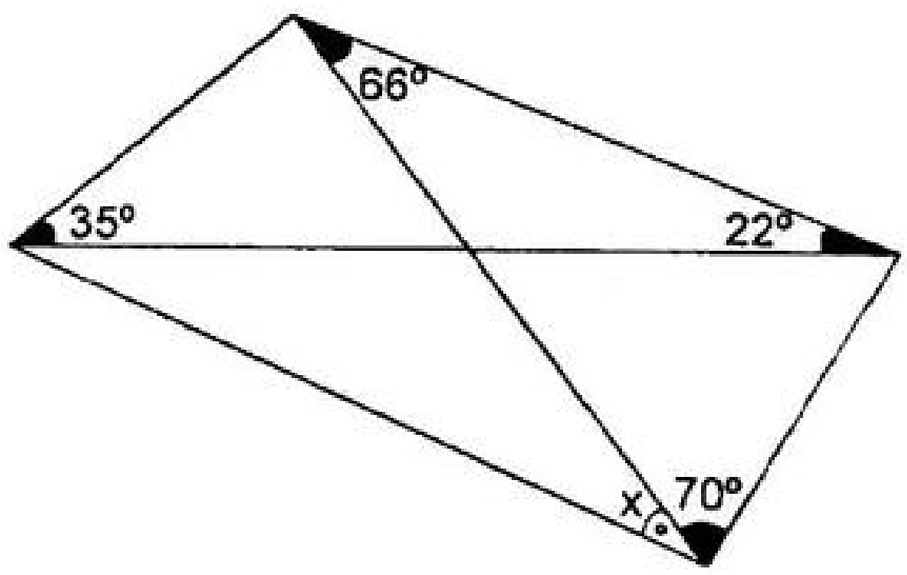
También:
$2\alpha + 2\theta = 60° \Rightarrow \alpha + \theta = 30°$

Luego tenemos en:

$x + \underbrace{\alpha + \theta}_{30°} = 180° \Rightarrow x + 30° = 180°$

$\therefore x = 150°$

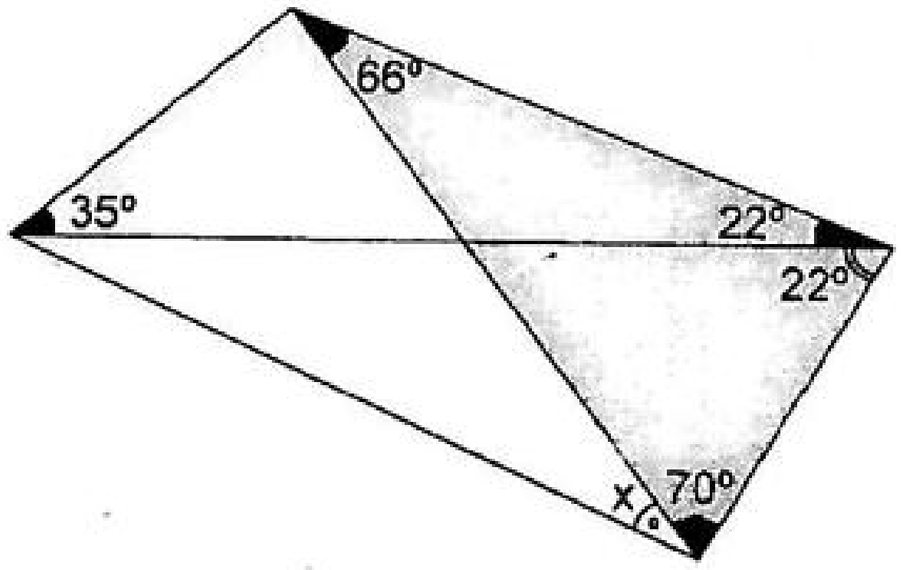
Problema 86. Calcular:

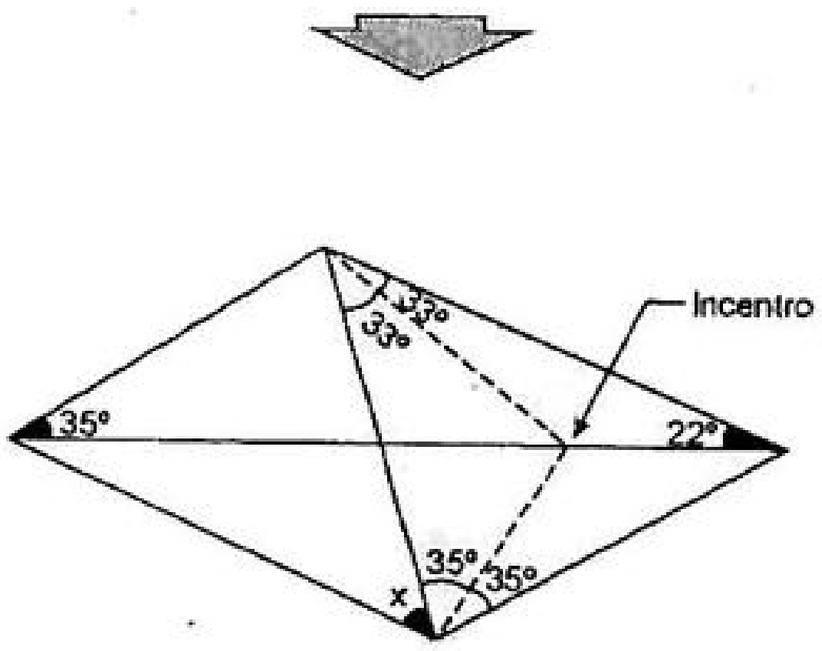


Scanned by CamScanner

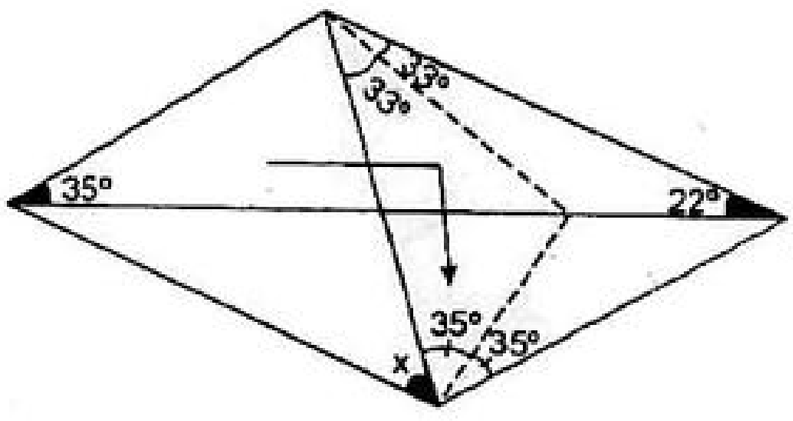
Resolución:

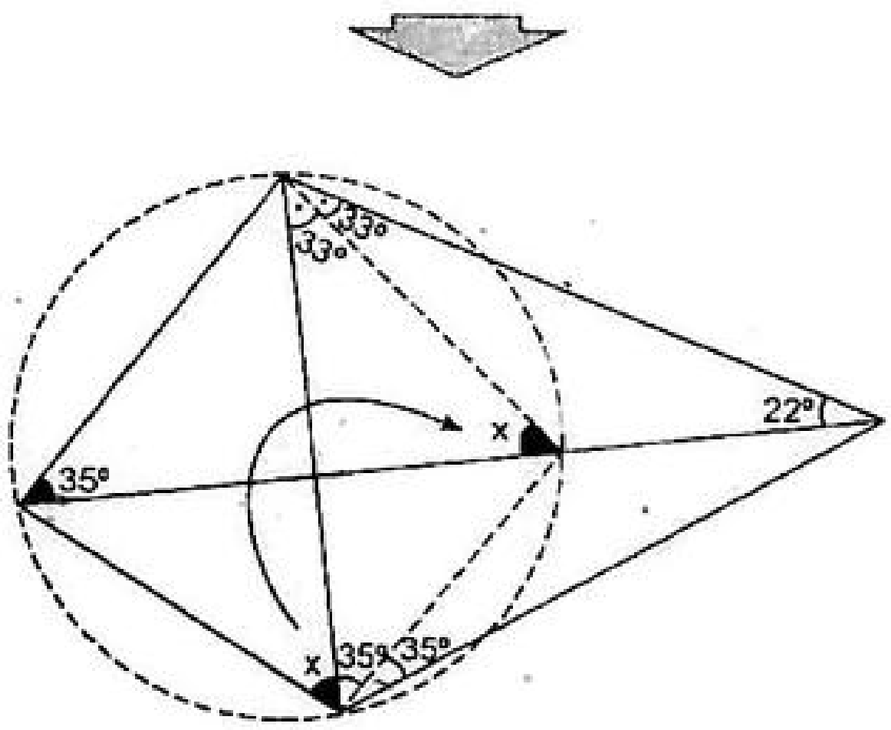
Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo en el triángulo sombreado para obtener su incentro.



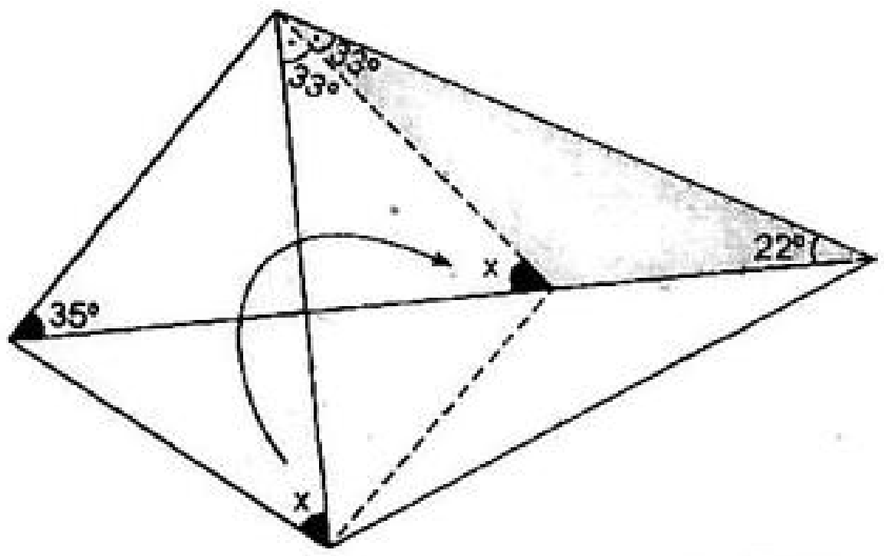


Paso N° 2. Se observa un cuadrilátero donde cumple la propiedad del pantalón o rebote.





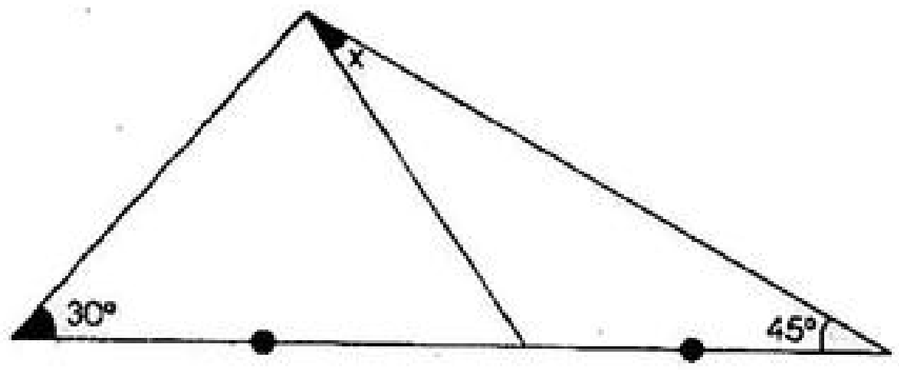
Paso N° 3. Se obtiene la siguiente figura.



$x = 33° + 22°$

$x = 55°$

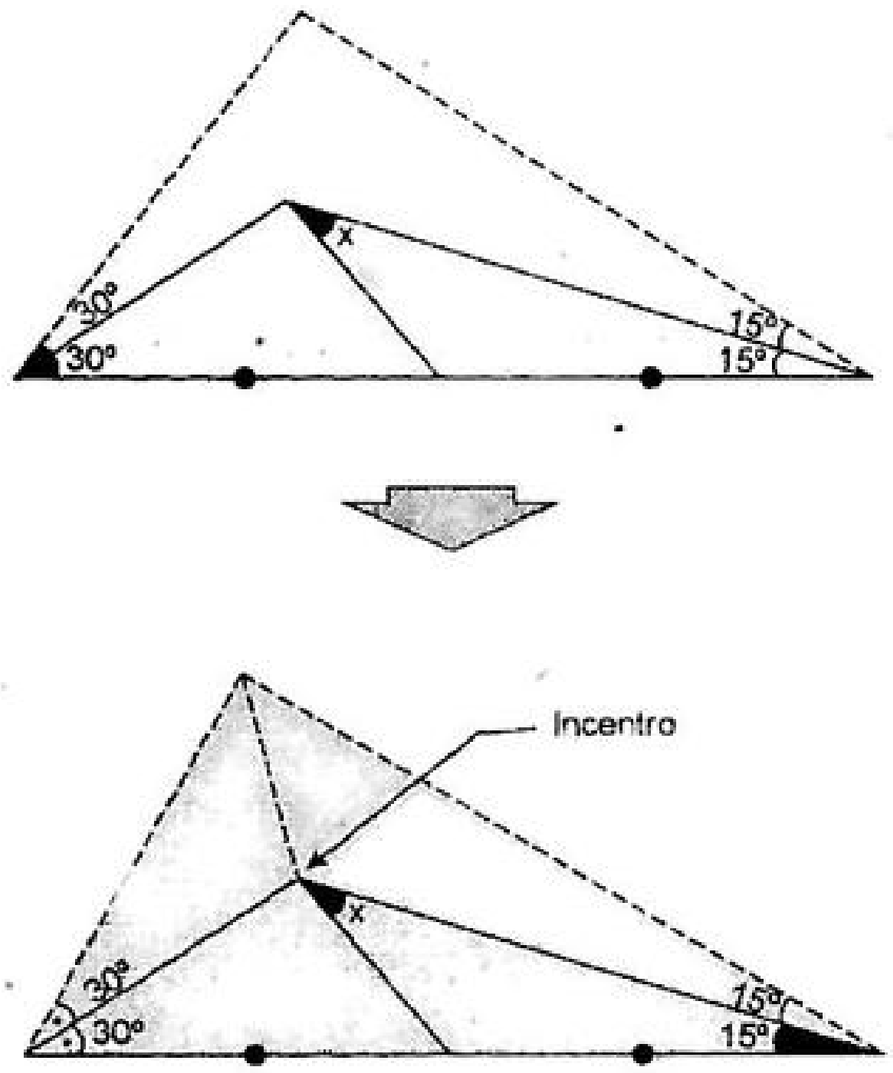
Problema 87. Calcular "x":



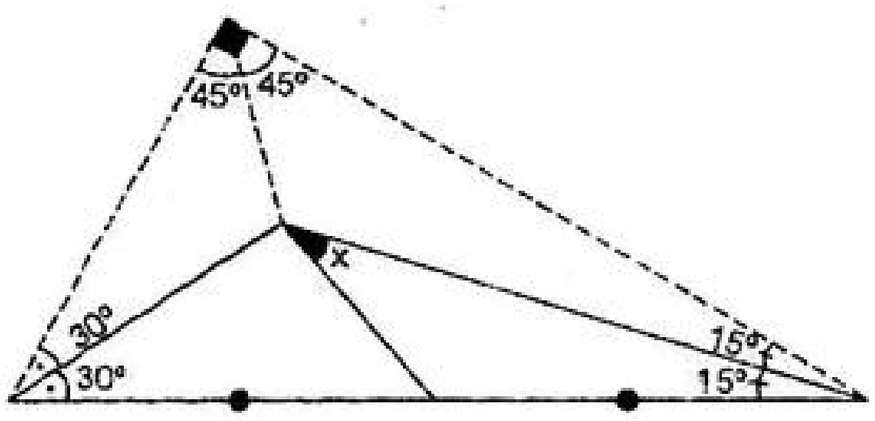
Scanned by CamScanner

Resolución:

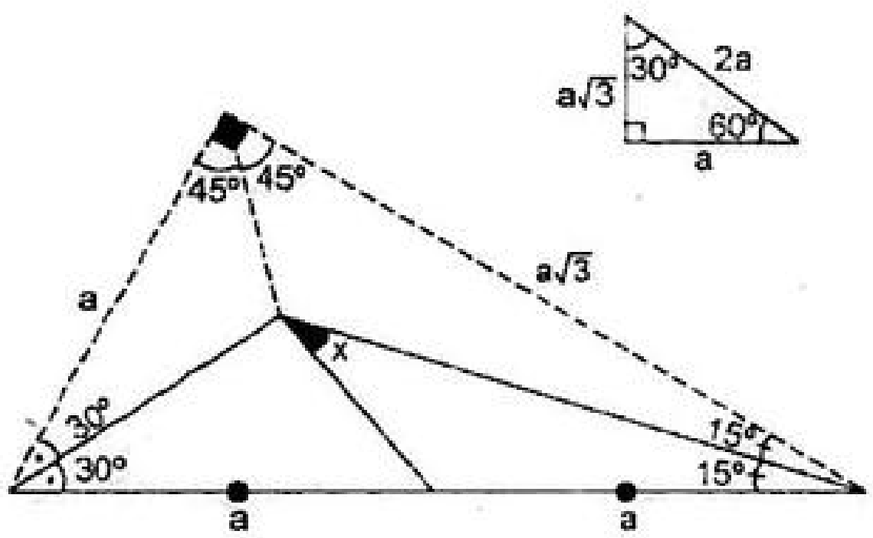
Paso N° 1. Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo donde observe un incentro.



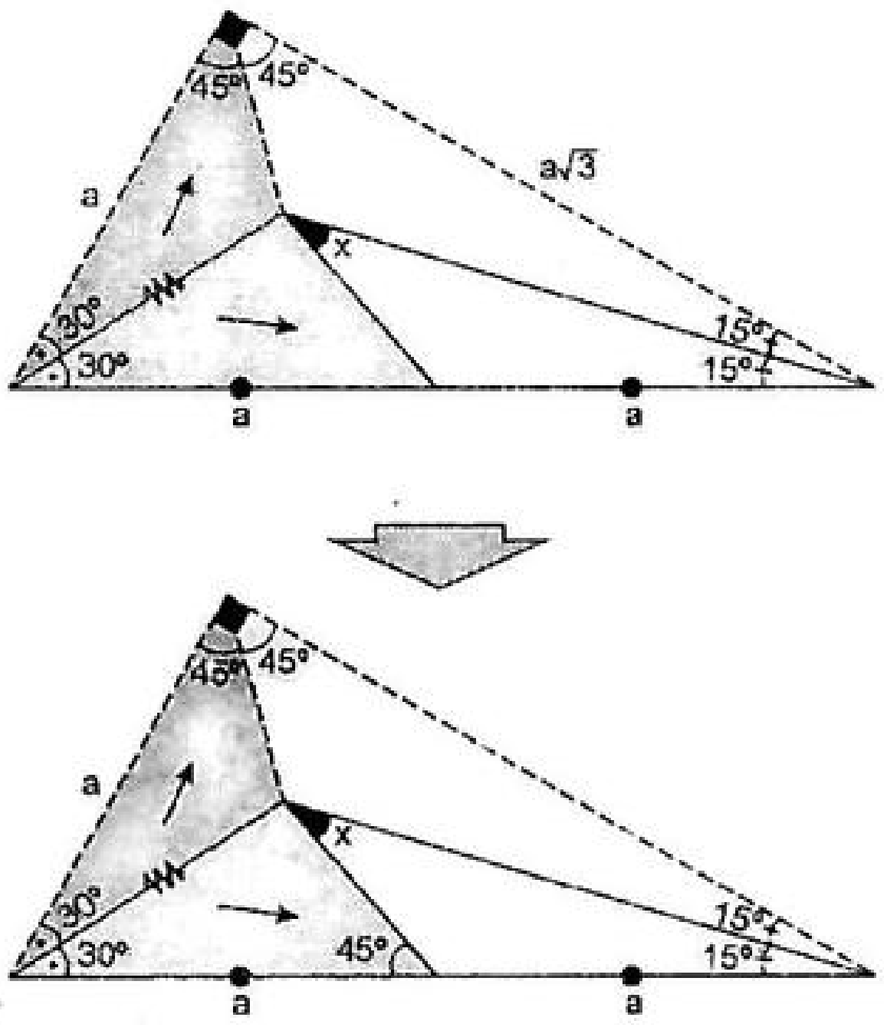
Paso N° 2. Se obtiene:



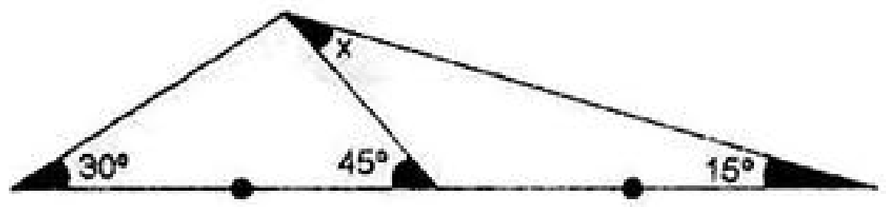
Paso N° 3. Sabemos que si cumple en el siguiente triángulo rectángulo.



Paso N° 4. Se observa dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)

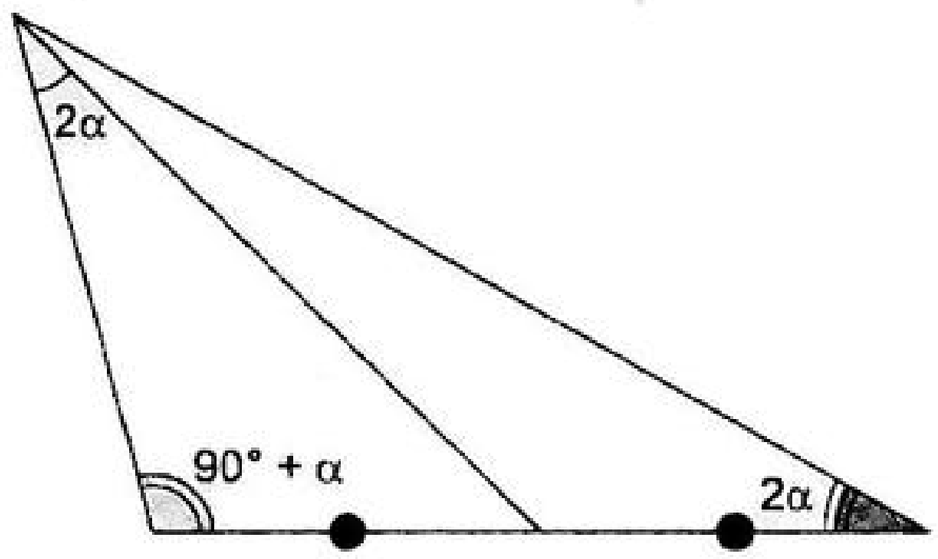


Paso N° 5. Obtenemos la siguiente figura



$45 = x + 15°$
$x = 30°$

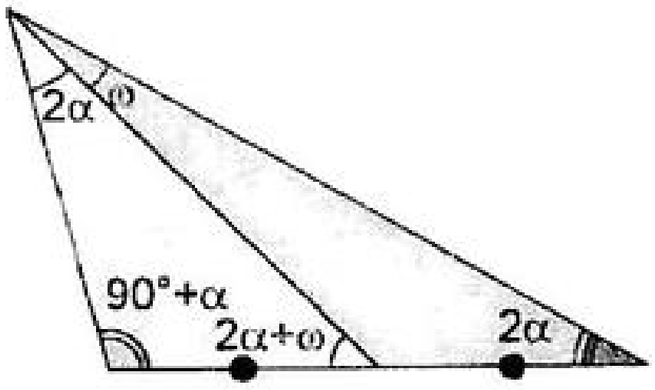
Problema 88. Caso general. Calcular x.



Scanned by CamScanner

Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:

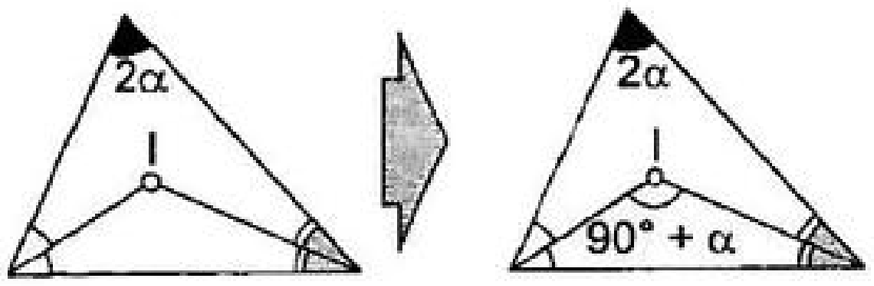


De aquí también se tiene:

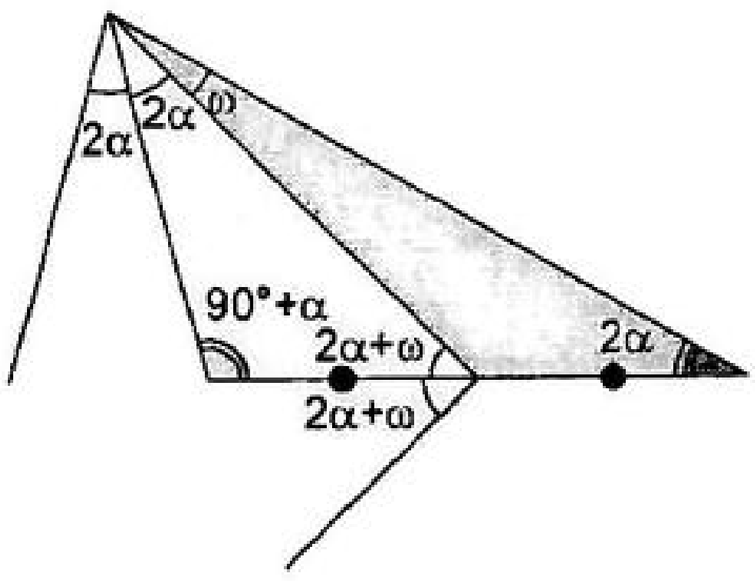
$2\alpha + 90° + \alpha + 2\alpha + \omega = 180°$

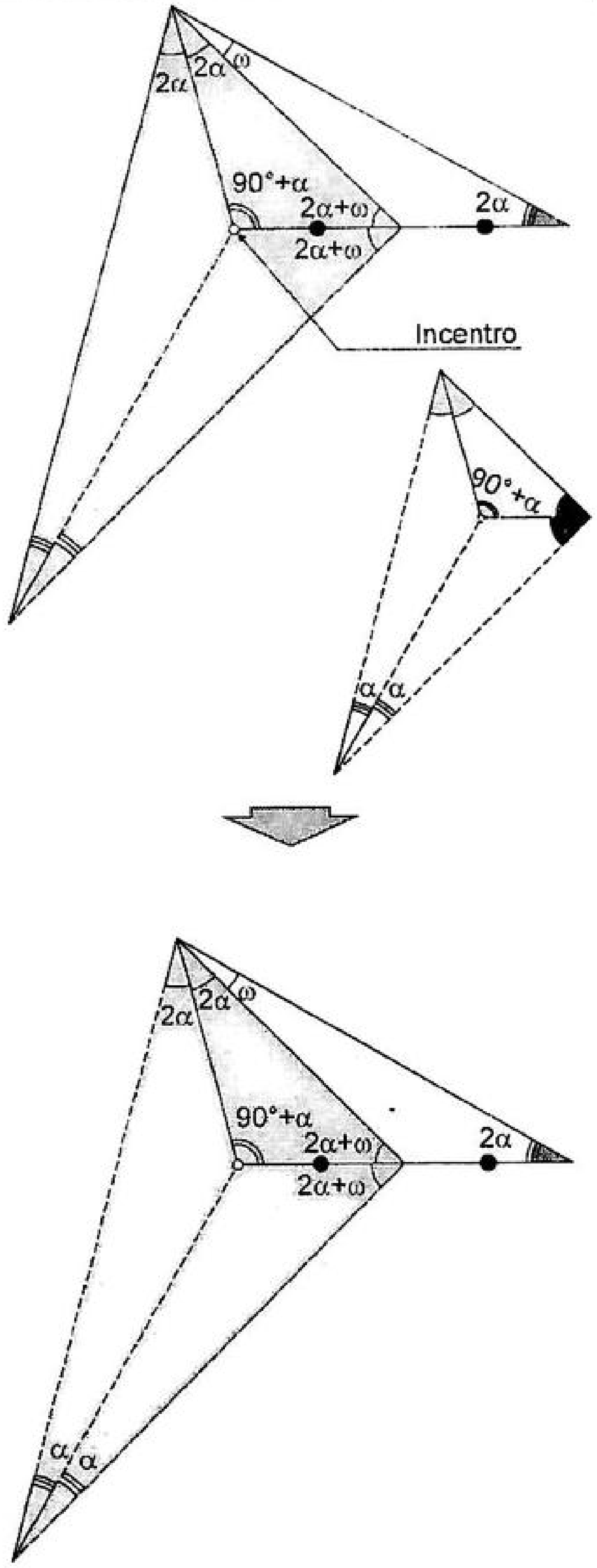
$\Rightarrow 5\alpha + \omega = 90°$

Paso N° 2. Ahora empleamos la siguiente propiedad del incentro:



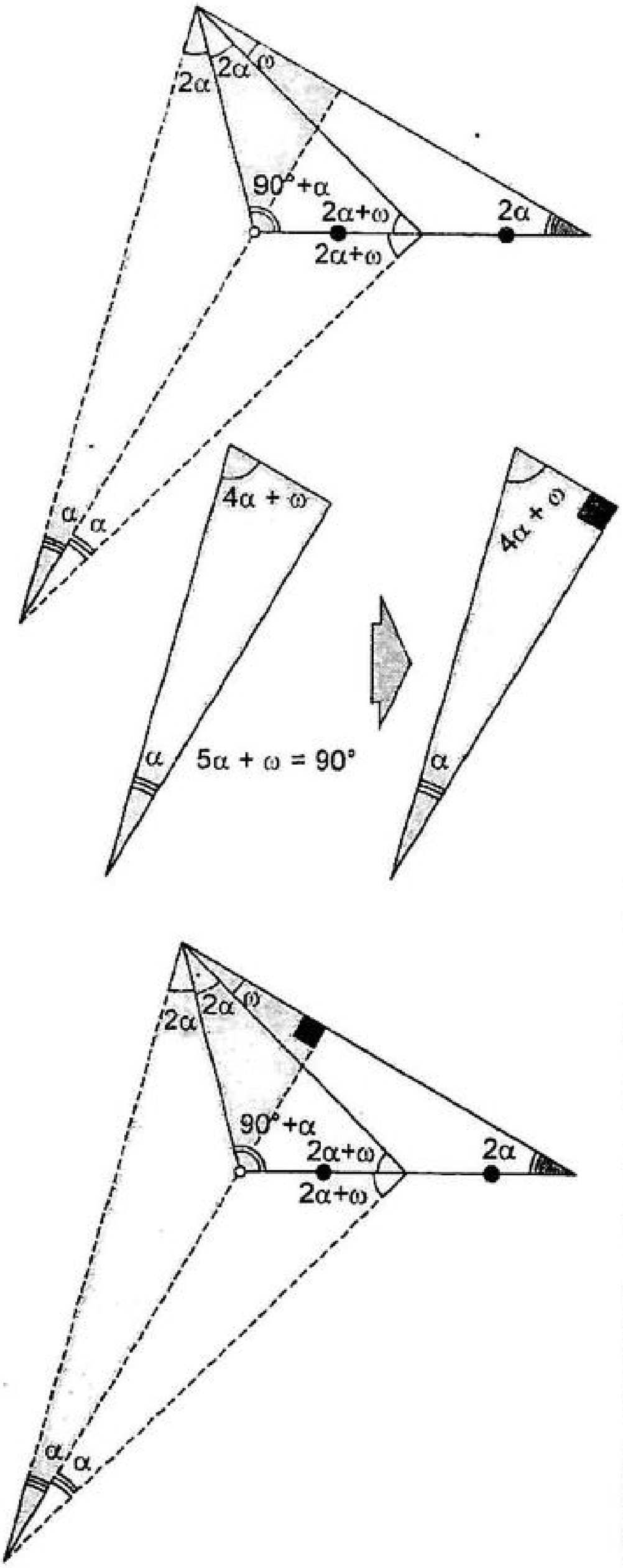
Y realizamos el siguiente trazo:



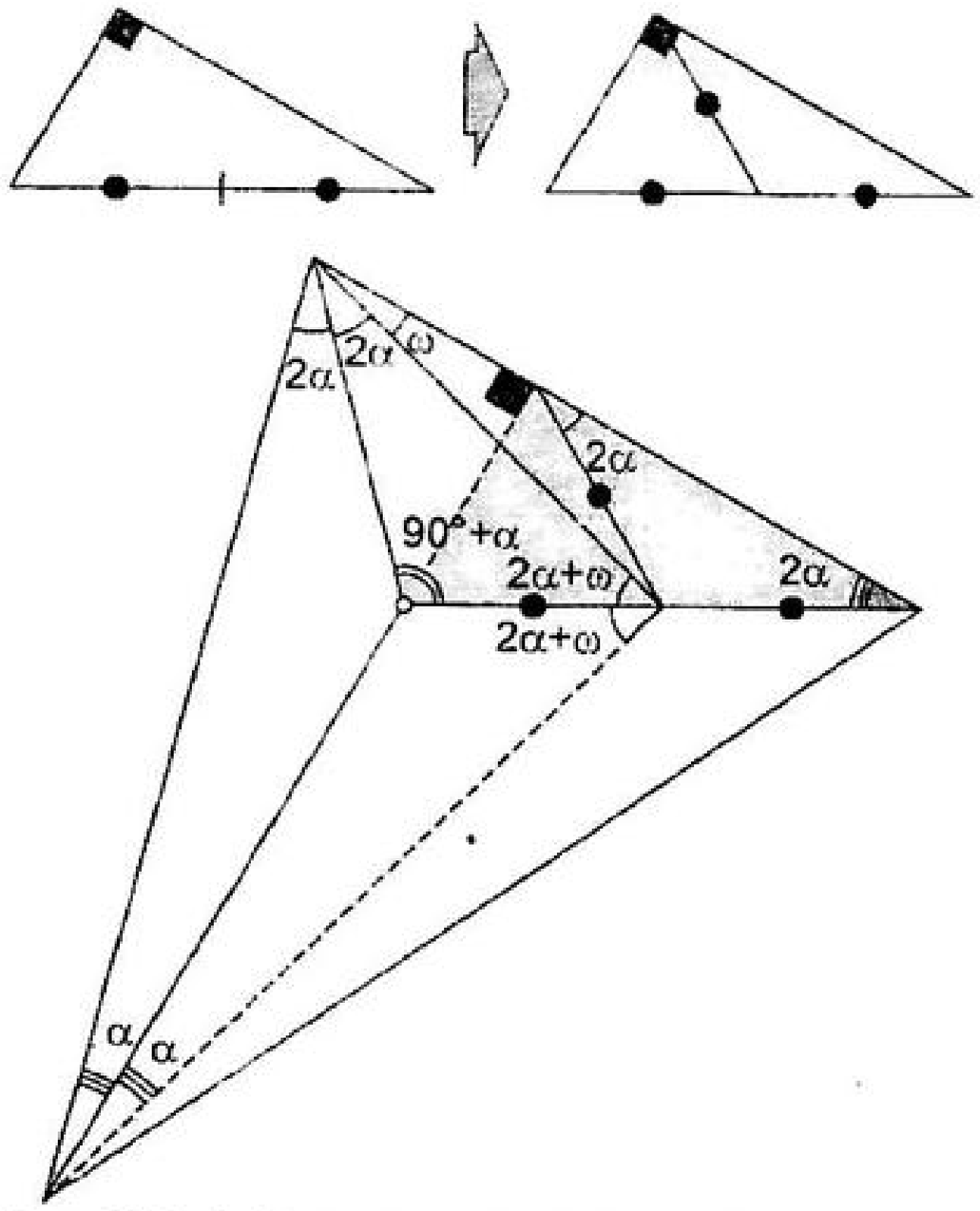


Scanned by CamScanner

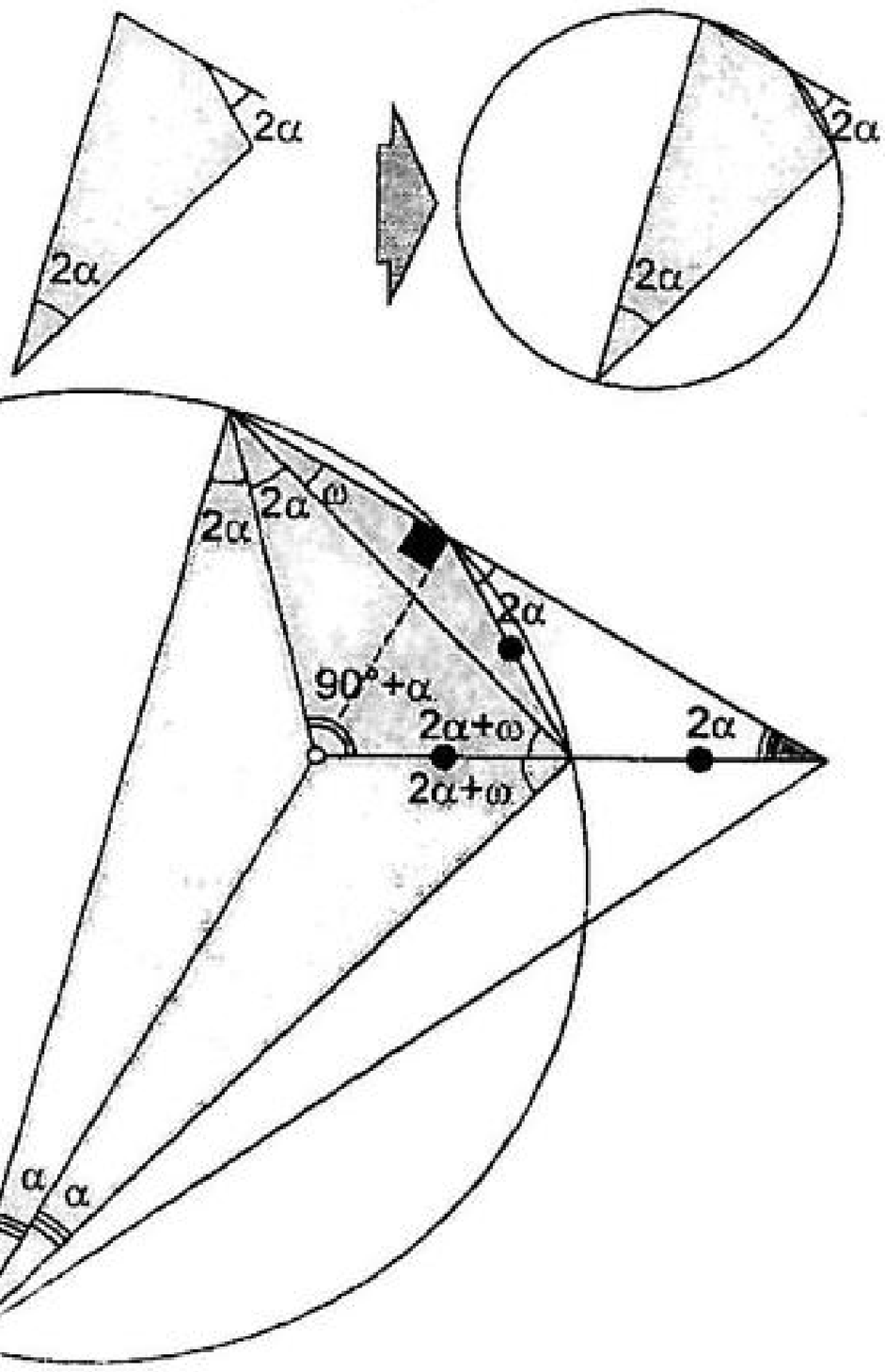
Paso N° 3. Ahora empleamos la relación obtenida en el primer paso:



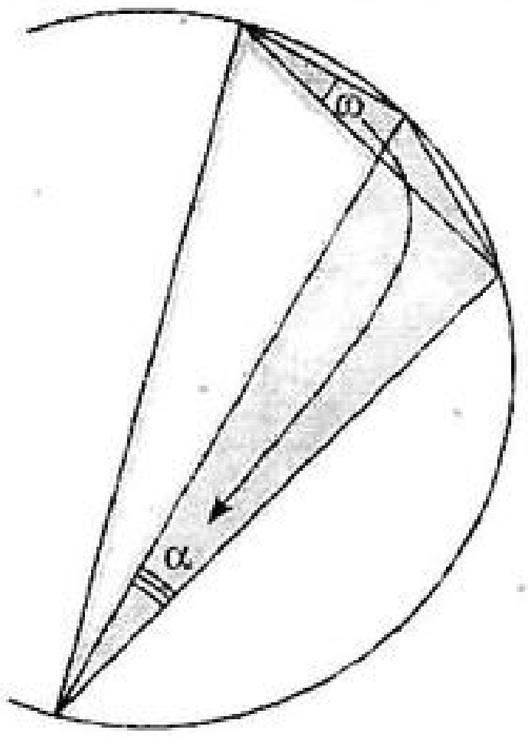
Paso N° 4. Aplicamos la siguiente propiedad:



Paso N° 4 Aplicamos la siguiente propiedad:

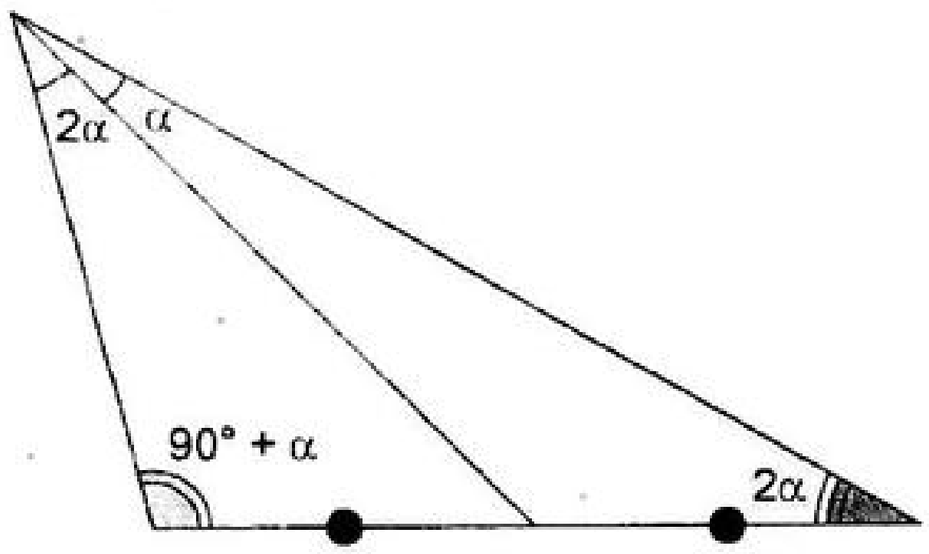


Scanned by CamScanner



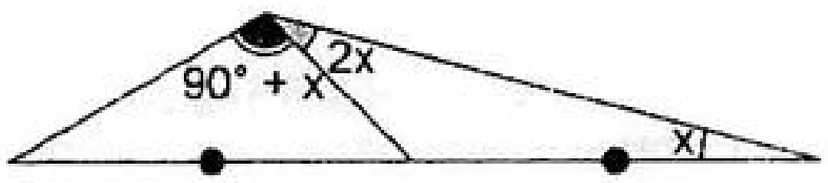
De aquí:
$\alpha = \omega$

Paso N° 6. Obtenemos la siguiente figura:



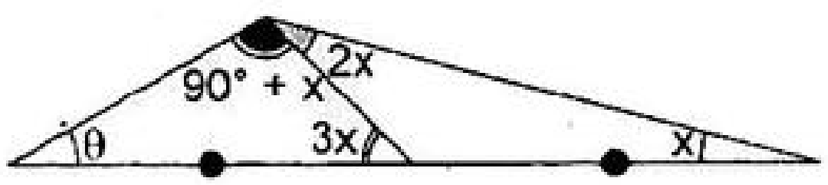
$\Rightarrow 2\alpha + \alpha + 90° + \alpha = 180°$
$6\alpha = 90°$
$\alpha = 15°$

Problema 89. Calcular x.

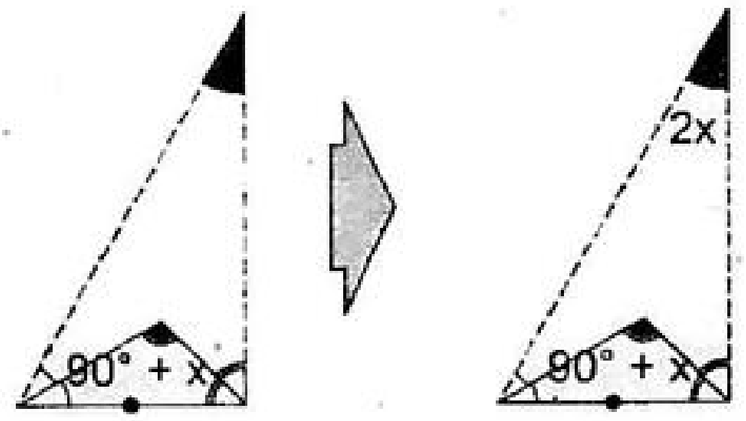


Resolución:

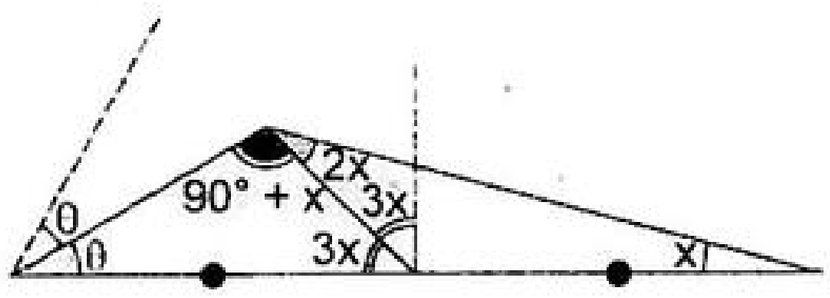
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos del triángulo:

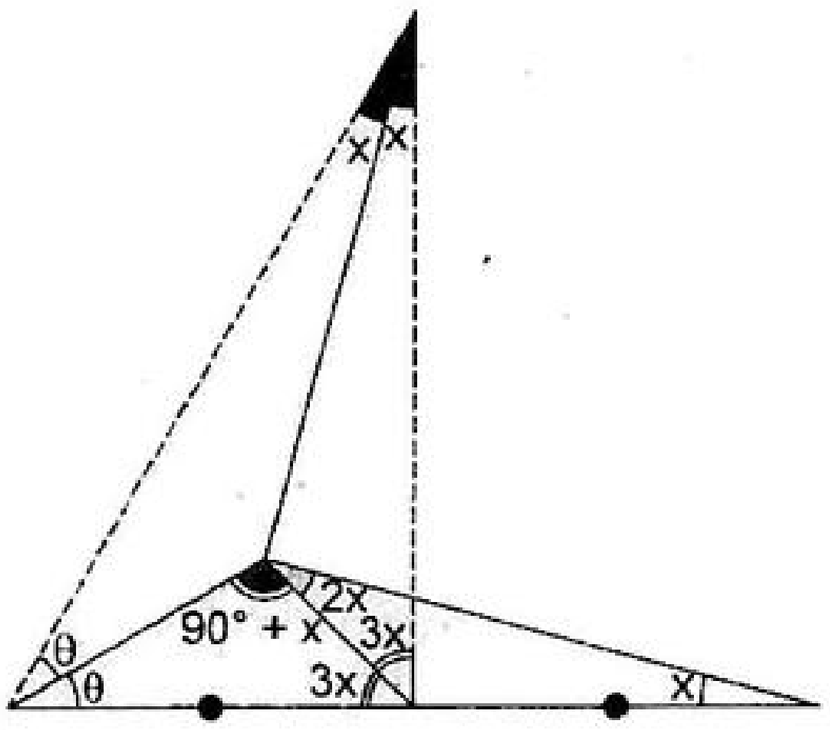


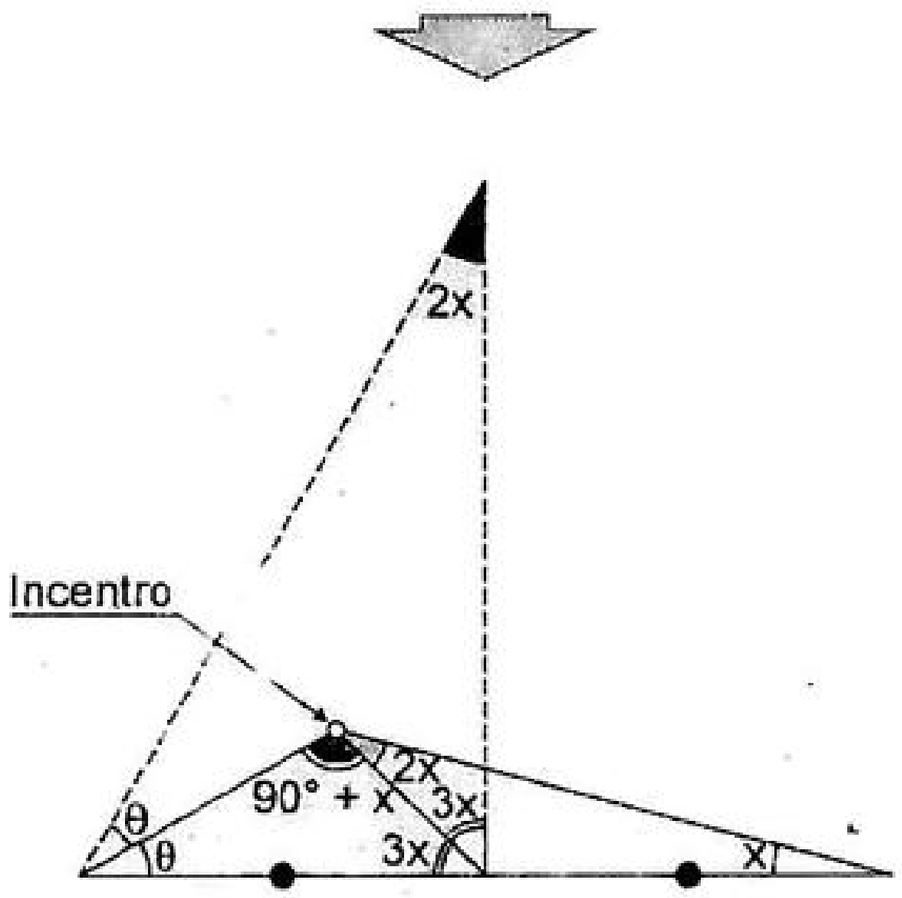
Paso N° 2. Observamos en el triángulo el ángulo de 90° + x, entonces empleamos la siguiente propiedad del incentro:



Ahora realizamos el siguiente trazo:

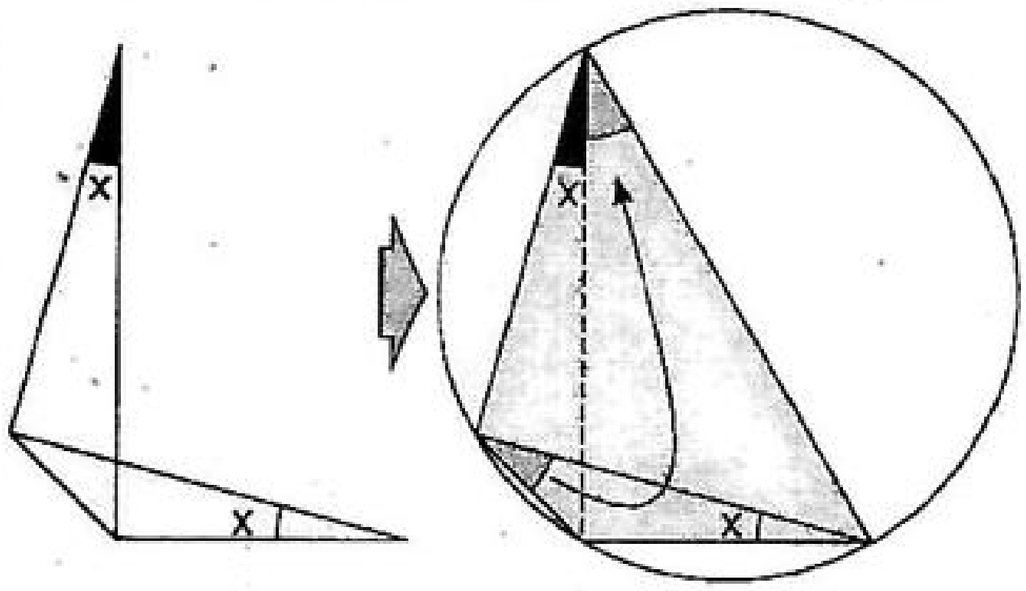


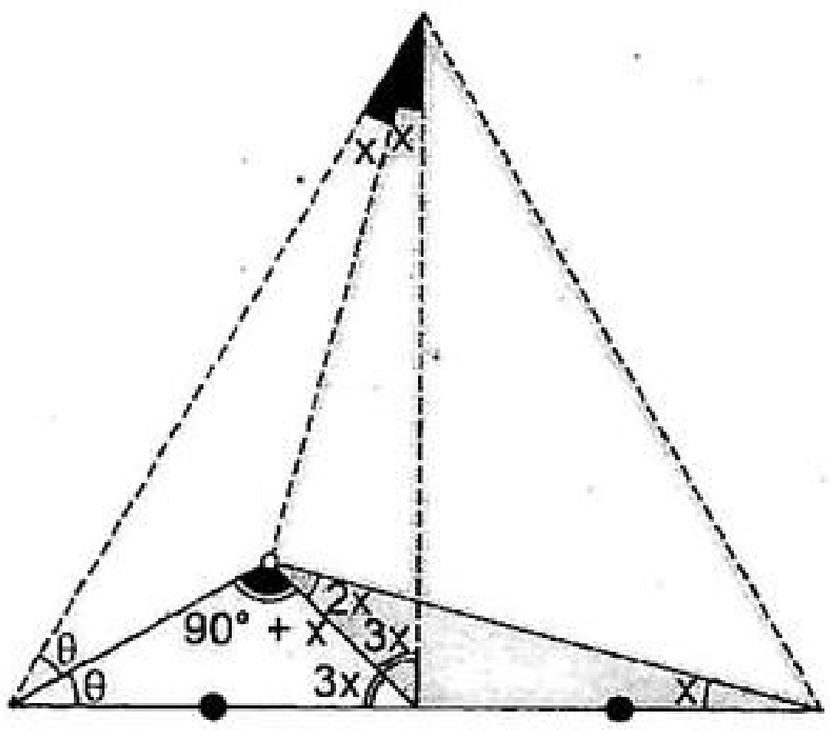


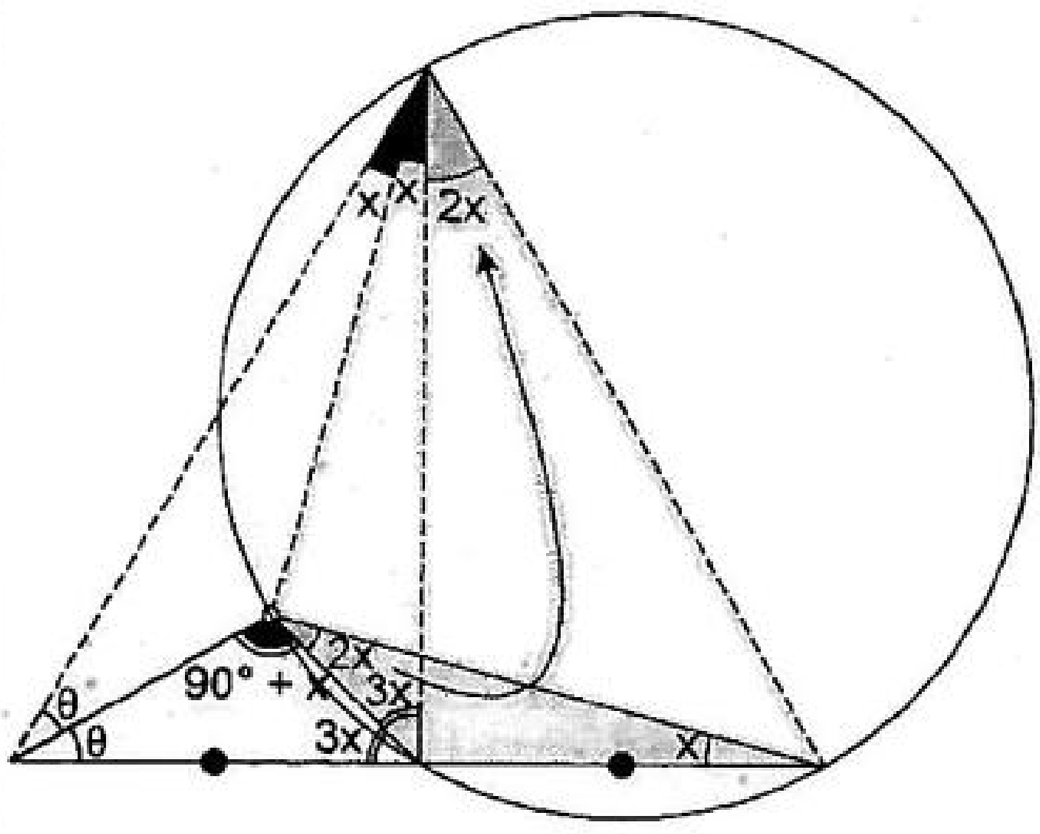


Scanned by CamScanner

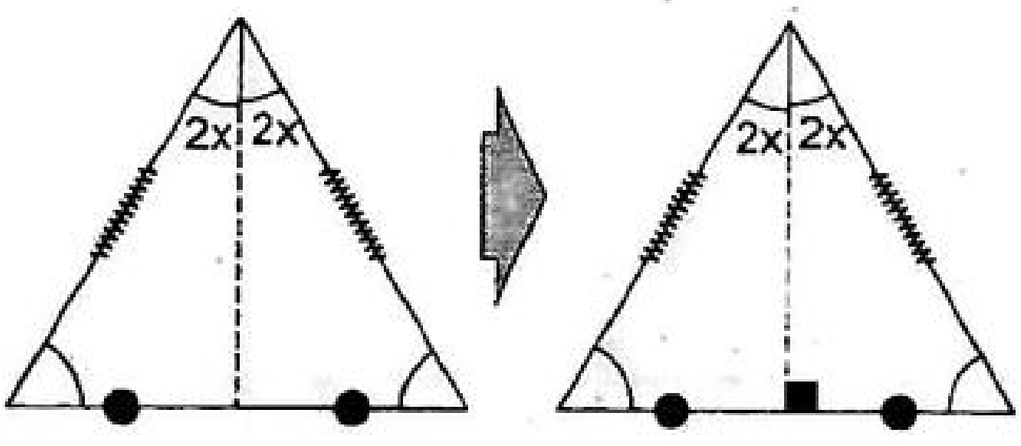
Paso N° 3. Ahora se observa la siguiente figura:

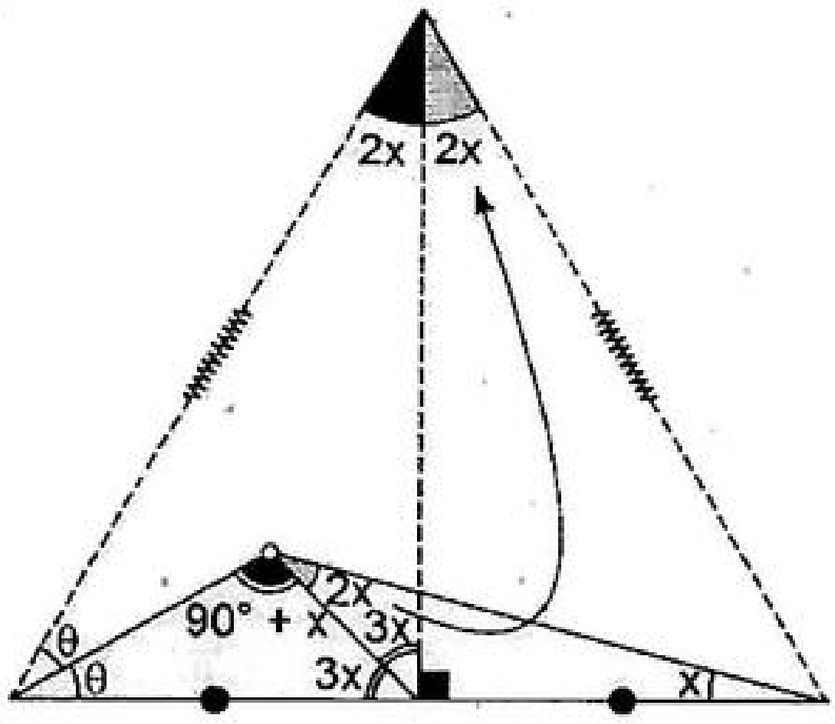






Paso N° 4. Observamos la siguiente figura:



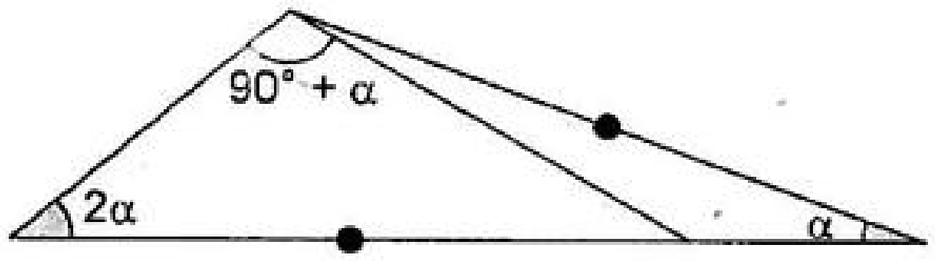


$\therefore\ 3x + 3x = 90°$

$6x = 90°$

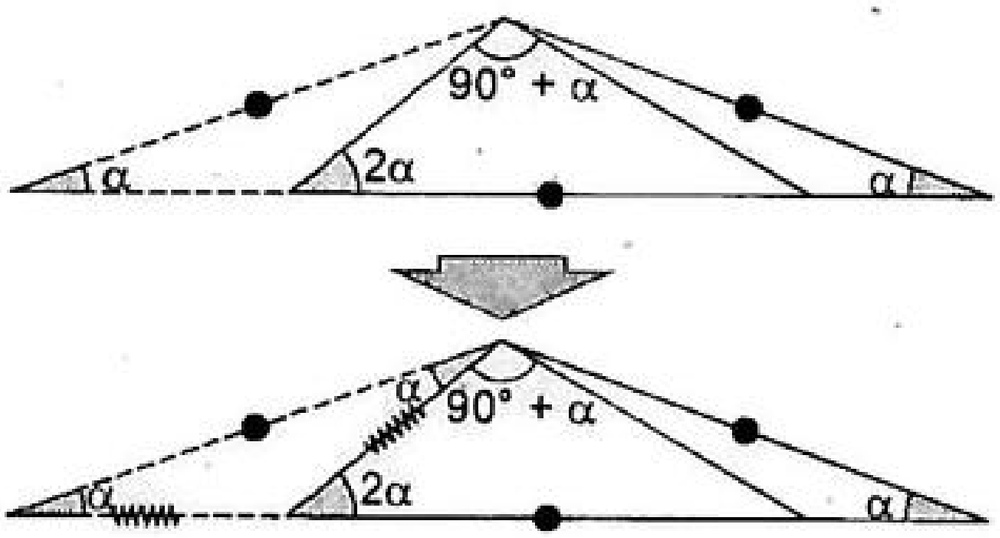
$x = 15°$

Problema 90. Calcular x.

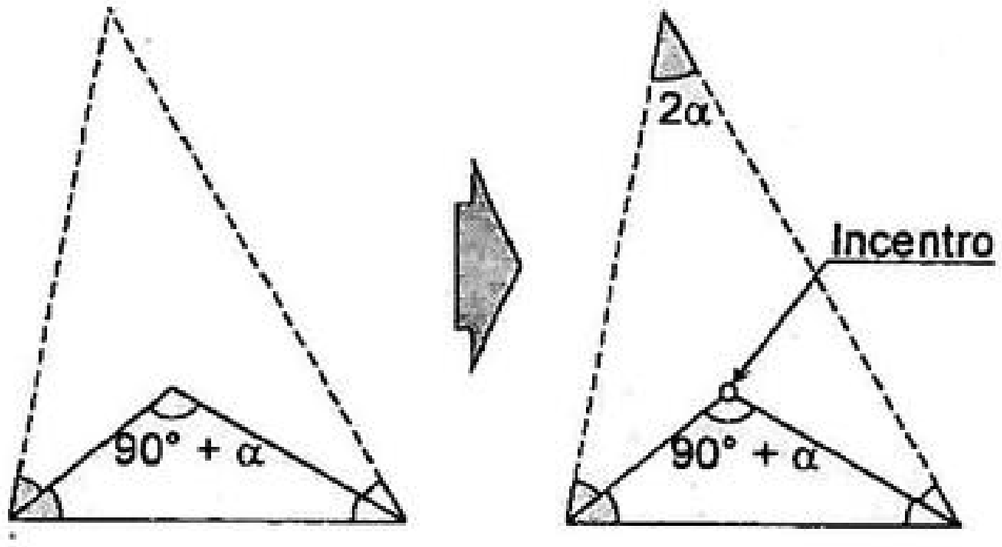


Resolución:

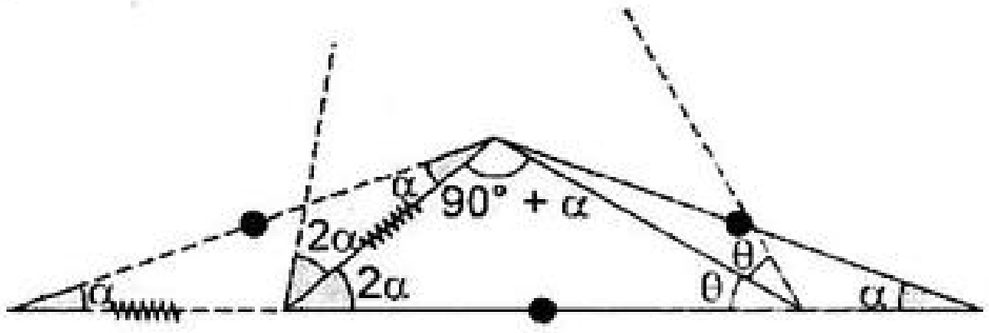
Paso N° 1. Empleamos el primer criterio de construcción:

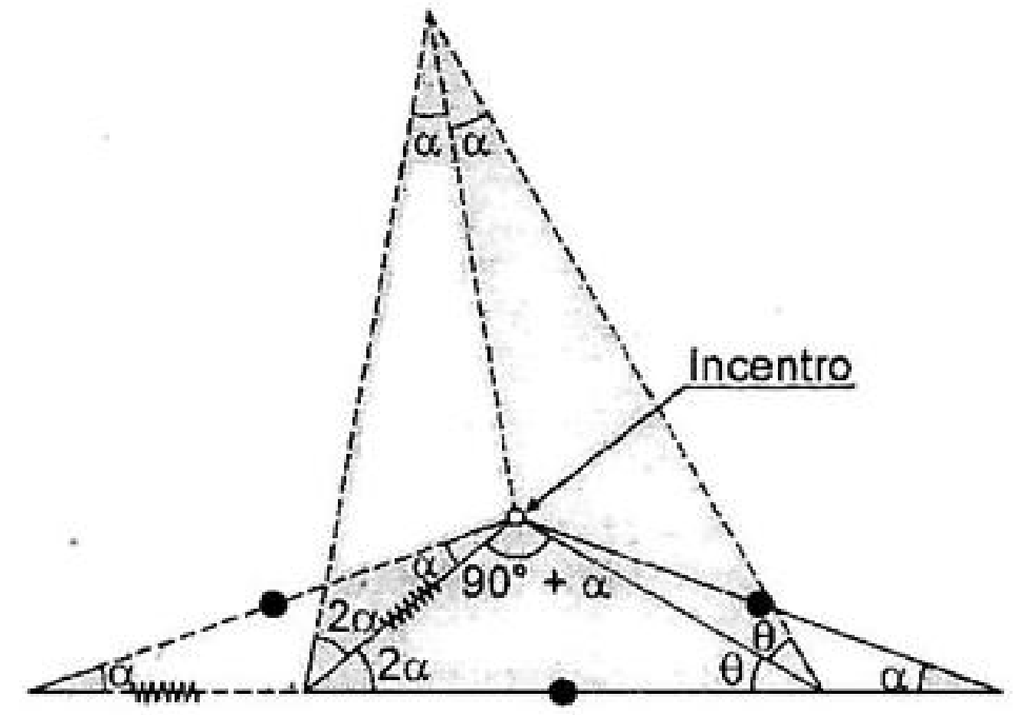


Paso N° 2. observamos en el triángulo un ángulo de 90° + x, entonces empleamos la propiedad que se cumple cuando se tiene el incentro:

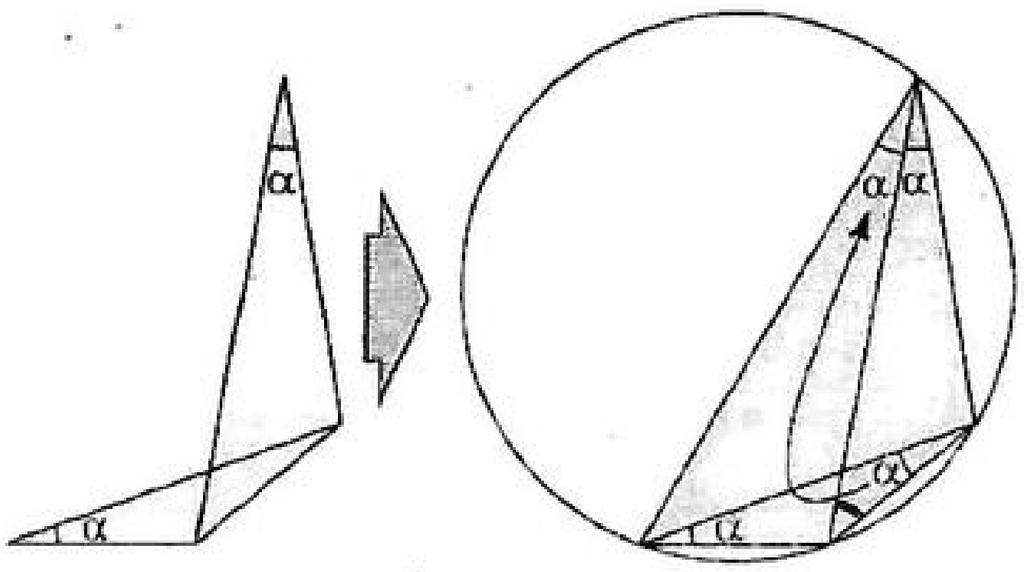


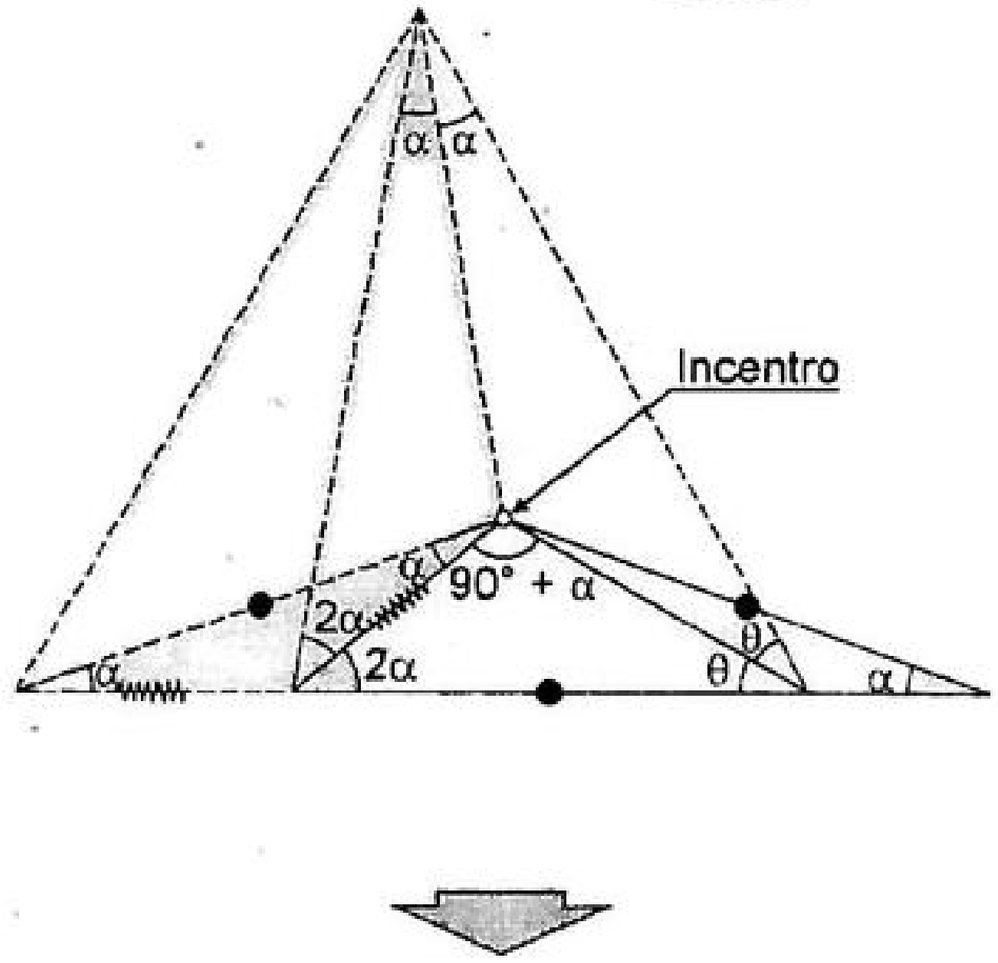
Scanned by CamScanner

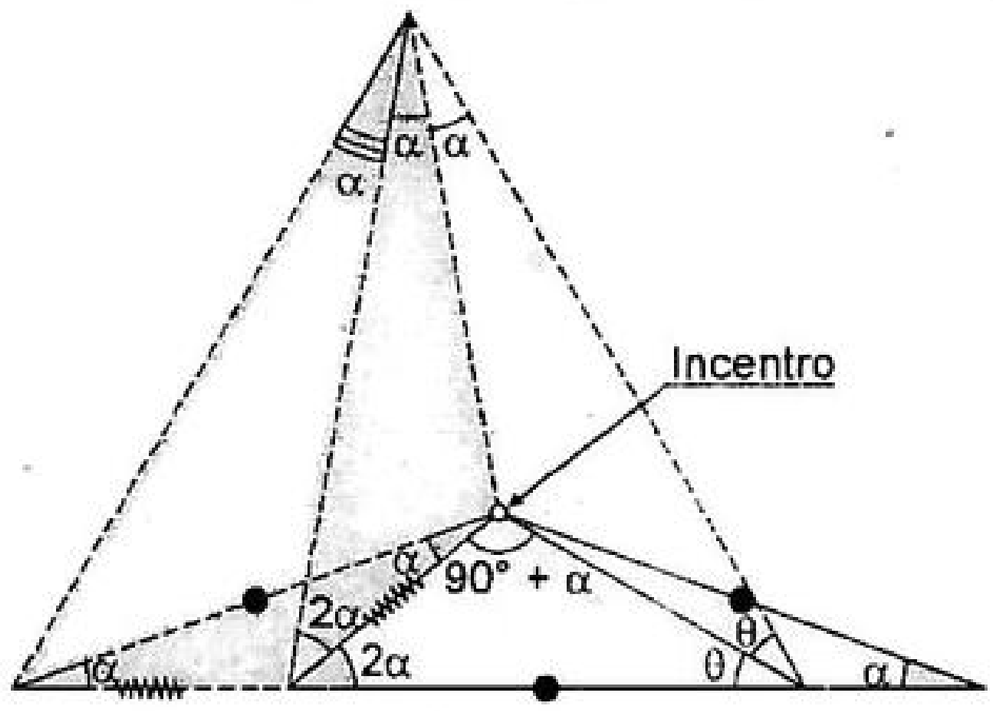




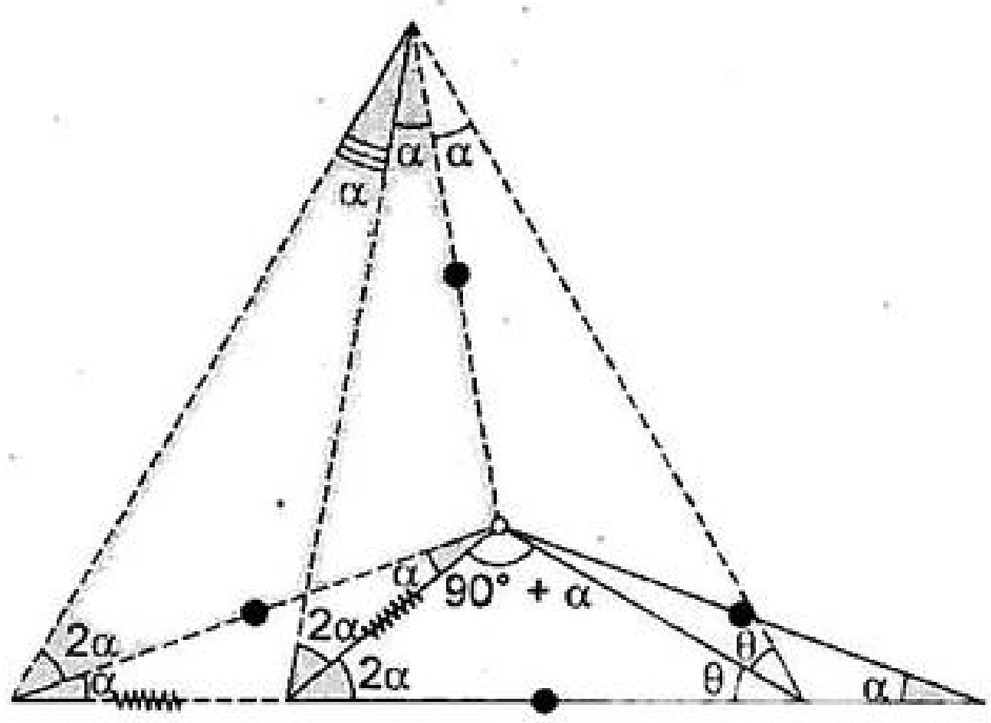
Paso N° 3. Observamos la siguiente figura:



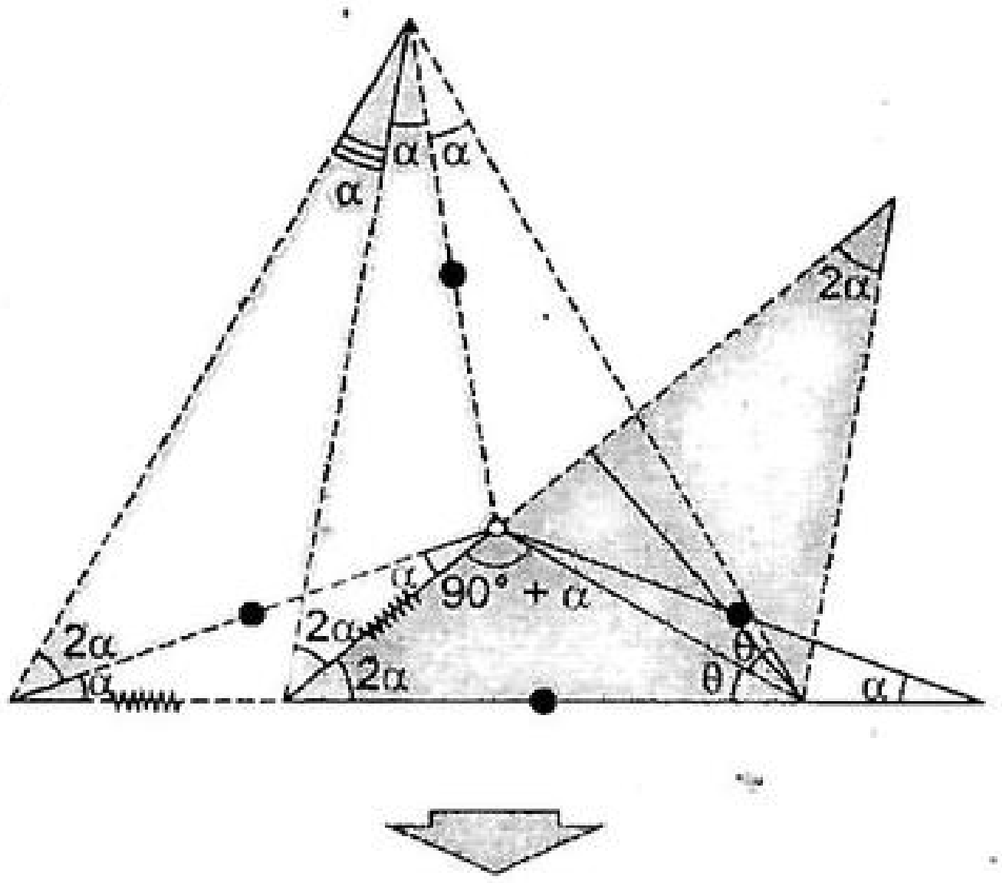




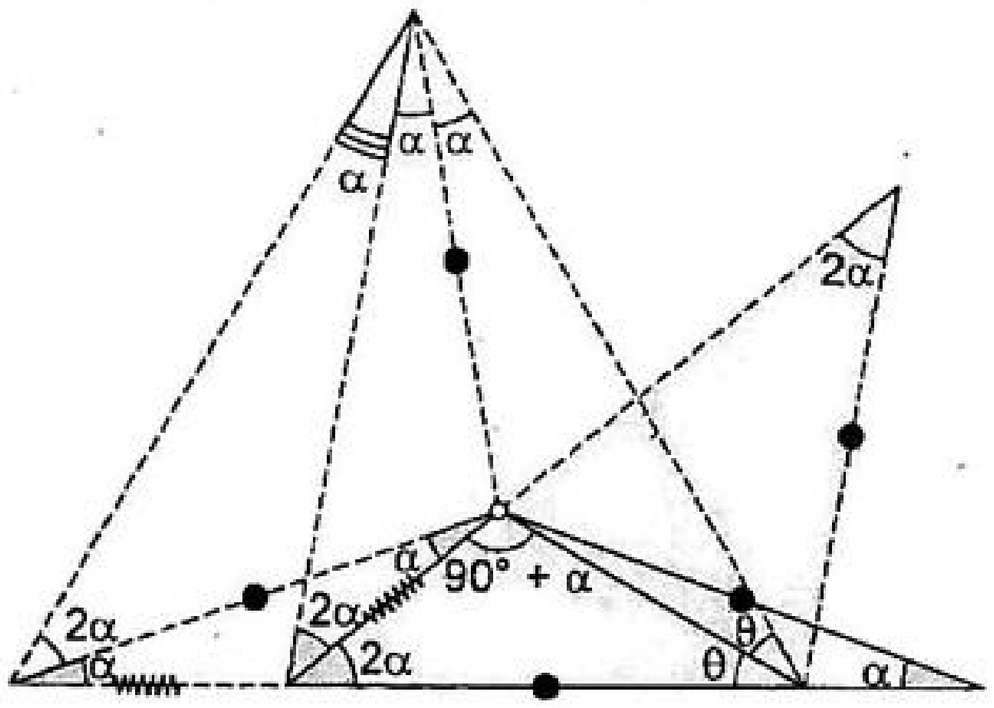
Paso N° 4. Se observa un triángulo isósceles:

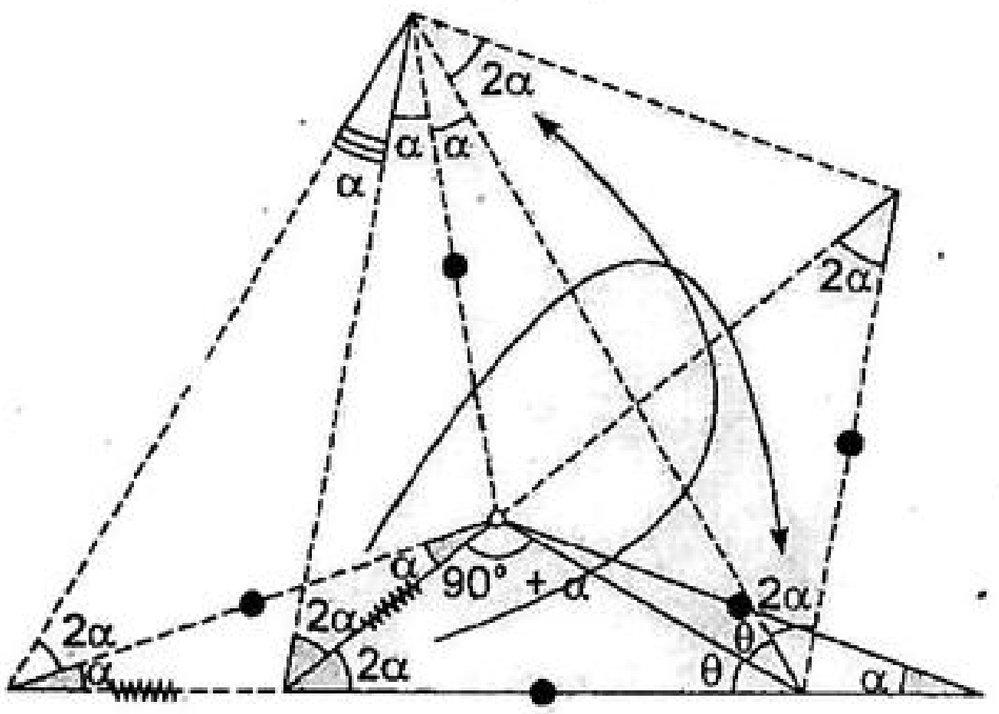


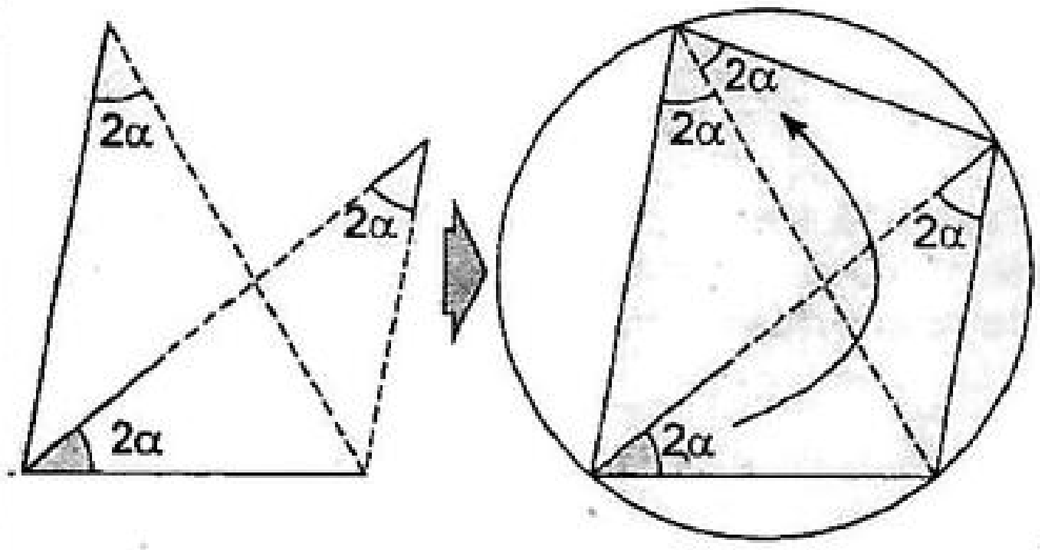
Paso N° 5. Realizamos el siguiente trazo para obtener un cuadrilátero donde se obserfva la propiedad del rebote o pantalón:



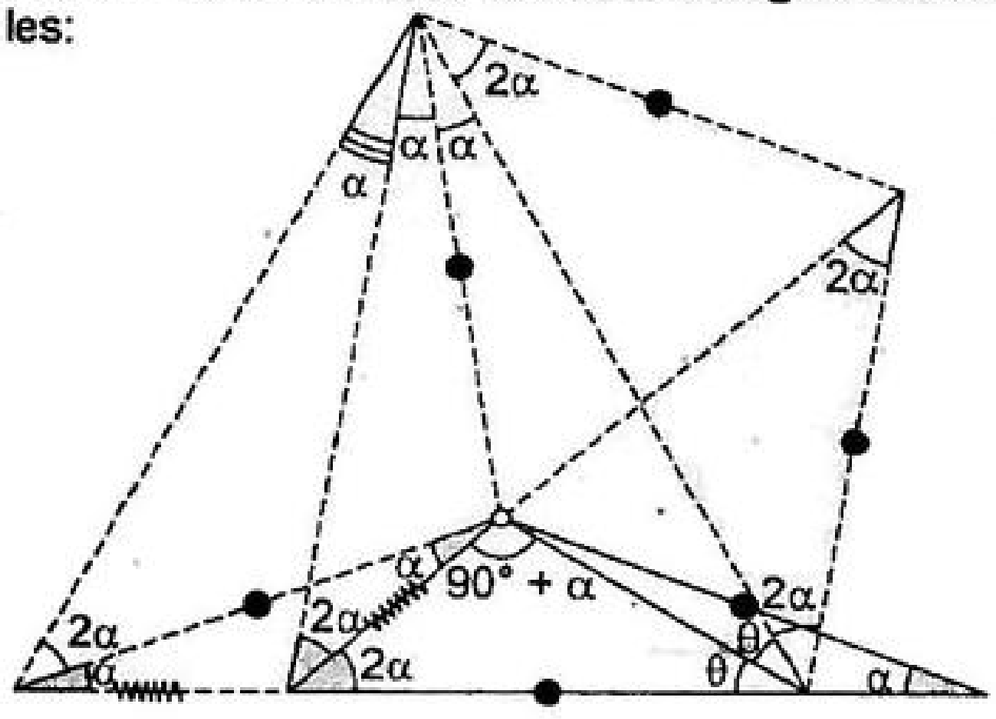
Scanned by CamScanner



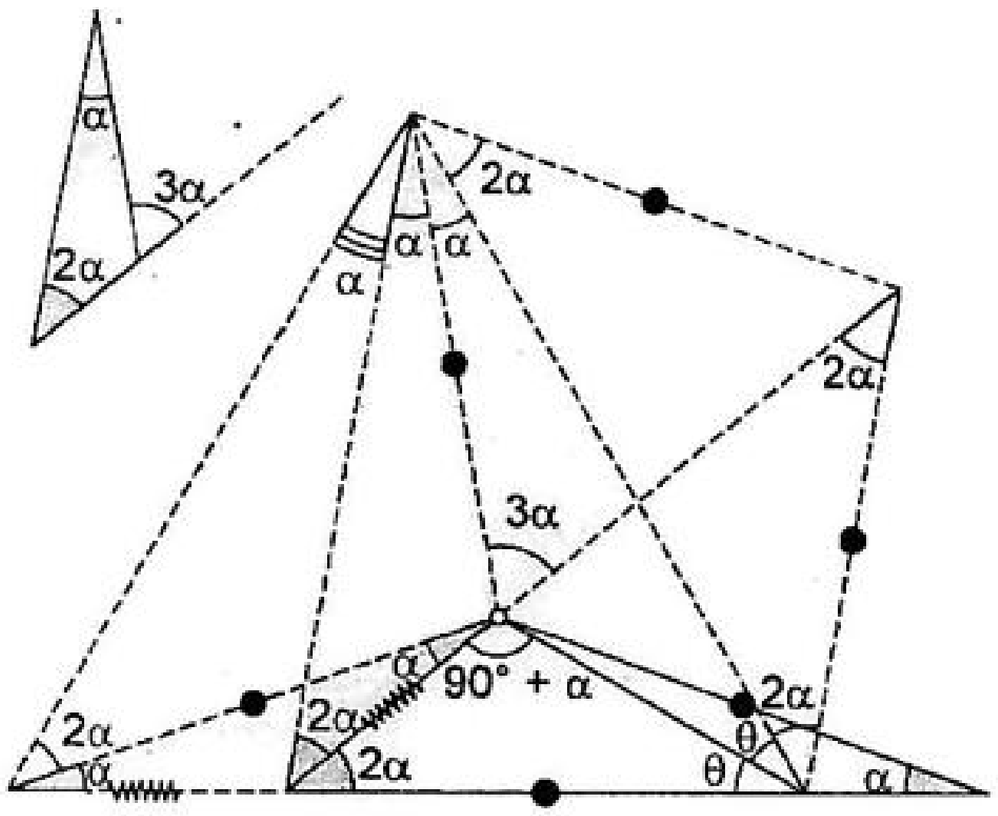




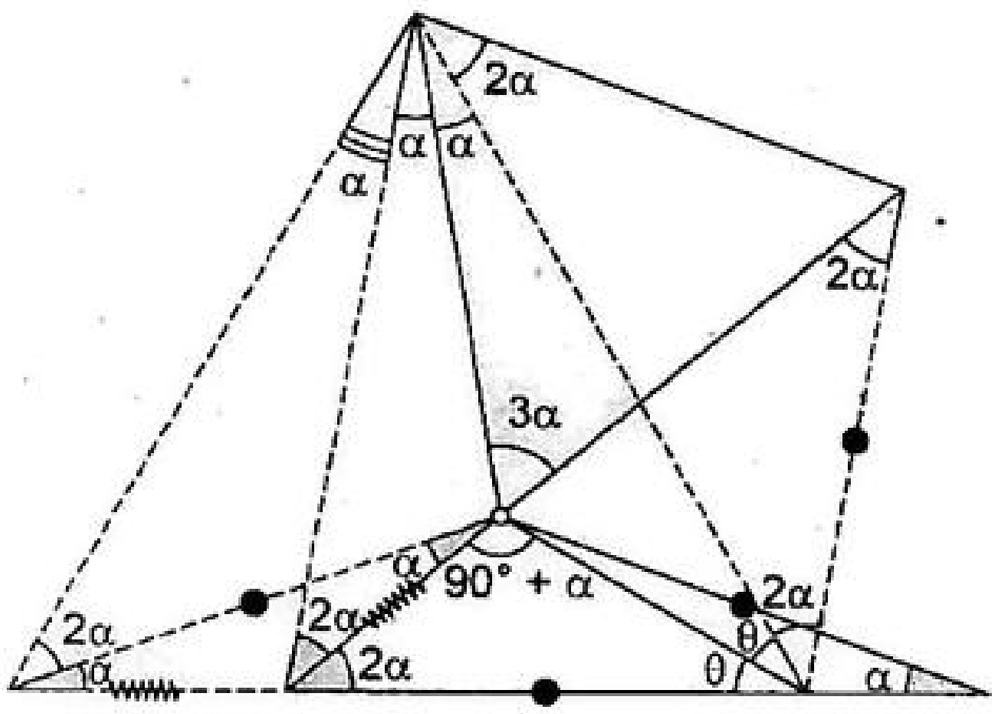
Paso N° 6. Se observa un nuevo triángulo isósceles:

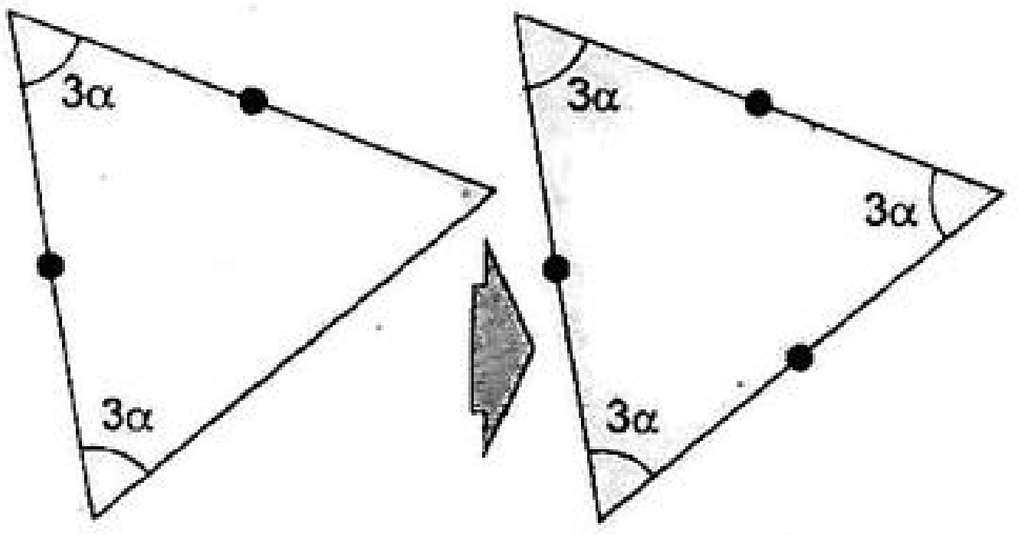


Paso N° 7. También observamos el siguiente ángulo:



Paso N° 8. Ahora obtenemos un triángulo isósceles, donde cumple también que es equiláterp:



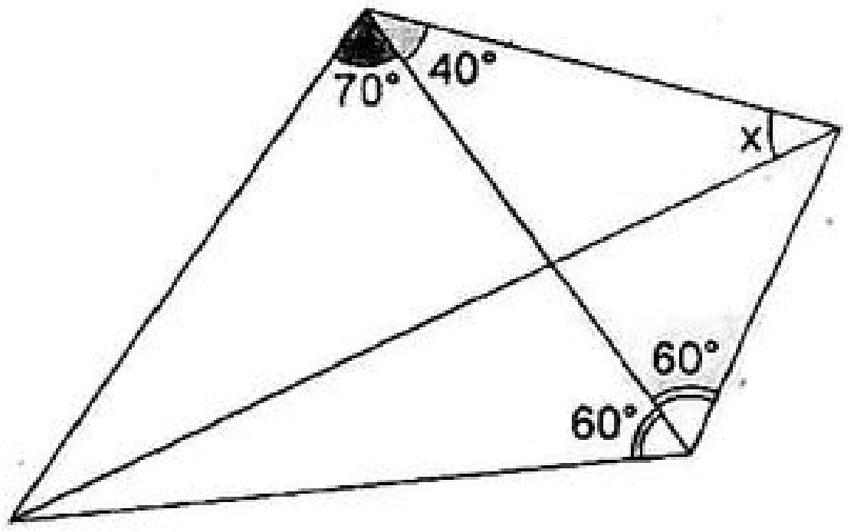


$\therefore\ 3\alpha = 60°$

$\alpha = 20°$

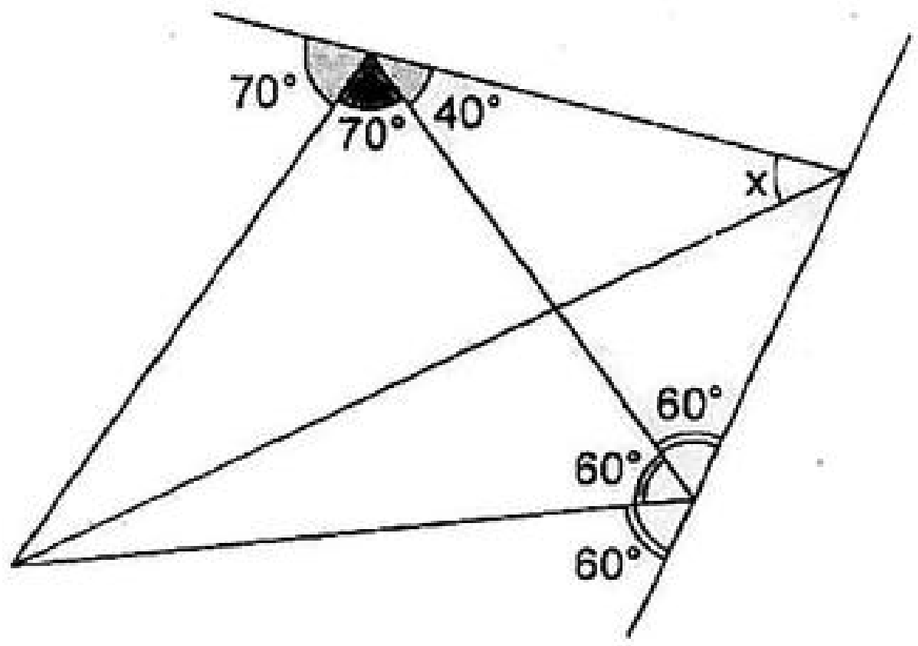
Scanned by CamScanner

Problema 91. Calcular x.

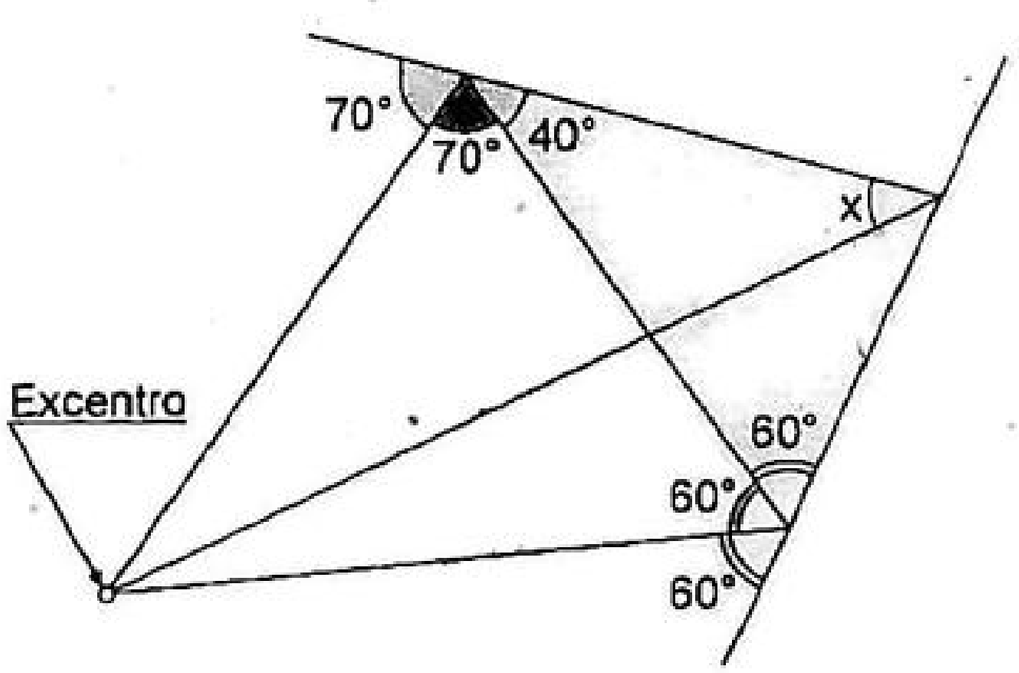


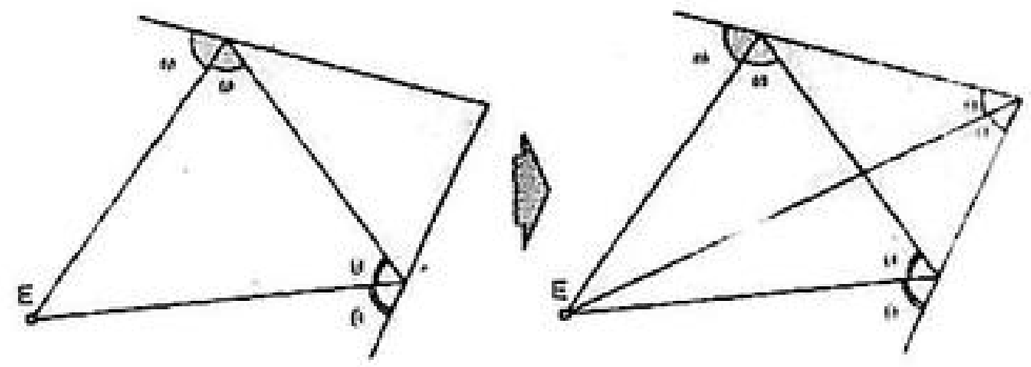
Resolución:

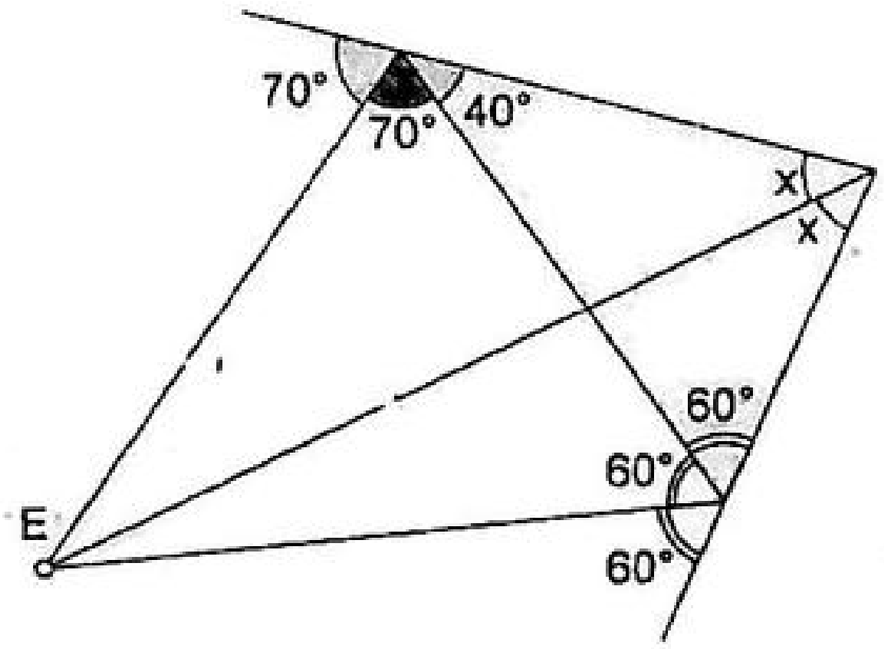
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos en la figura:



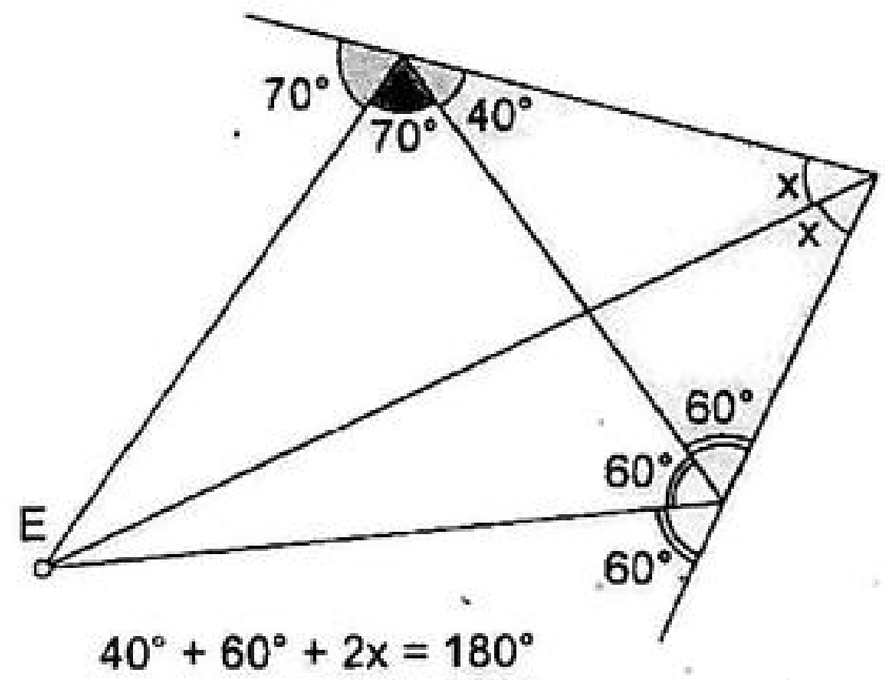
Paso N° 2. Observamos bisectrices exteriores en la figura, se ubica el excentro:





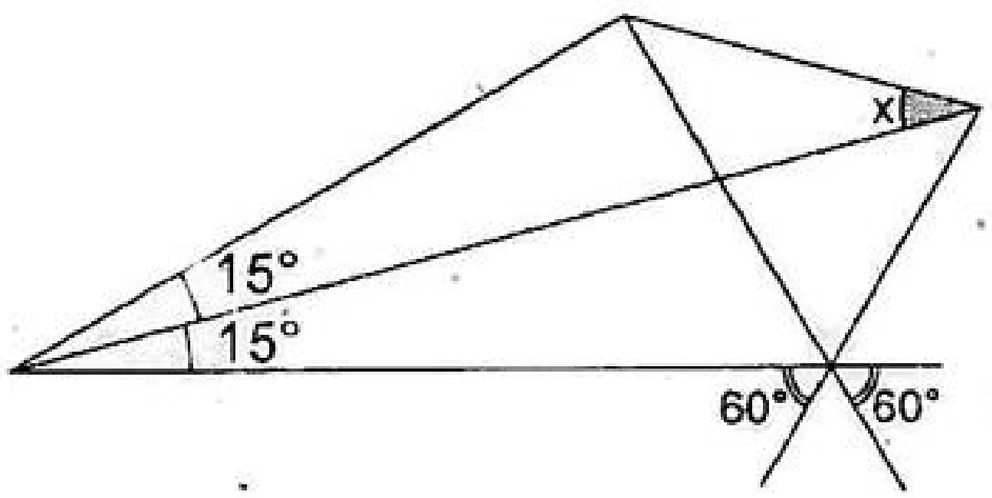


Paso N° 3. Se obtiene un triángulo donde cumple:



$$40° + 60° + 2x = 180°$$
$$2x = 100°$$
$$x = 50°$$

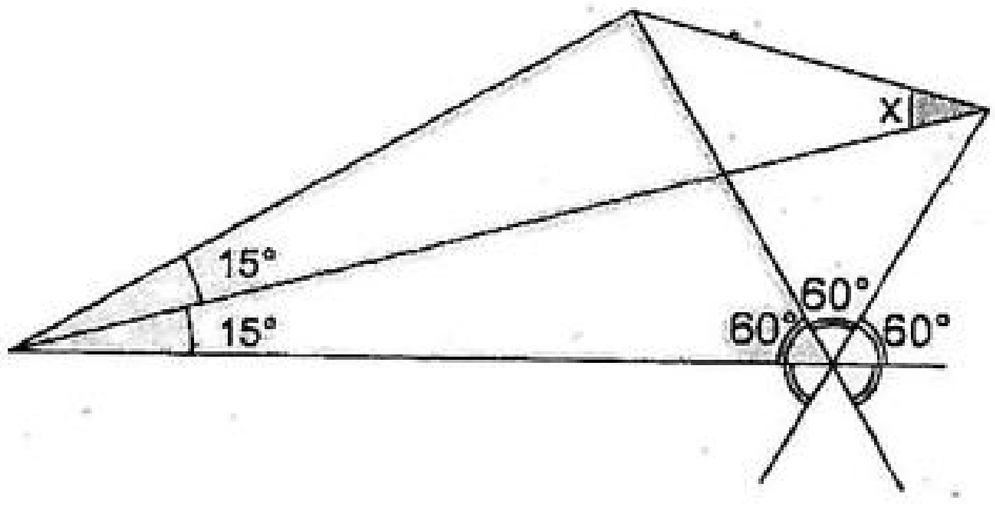
Problema 92. Calcular x.



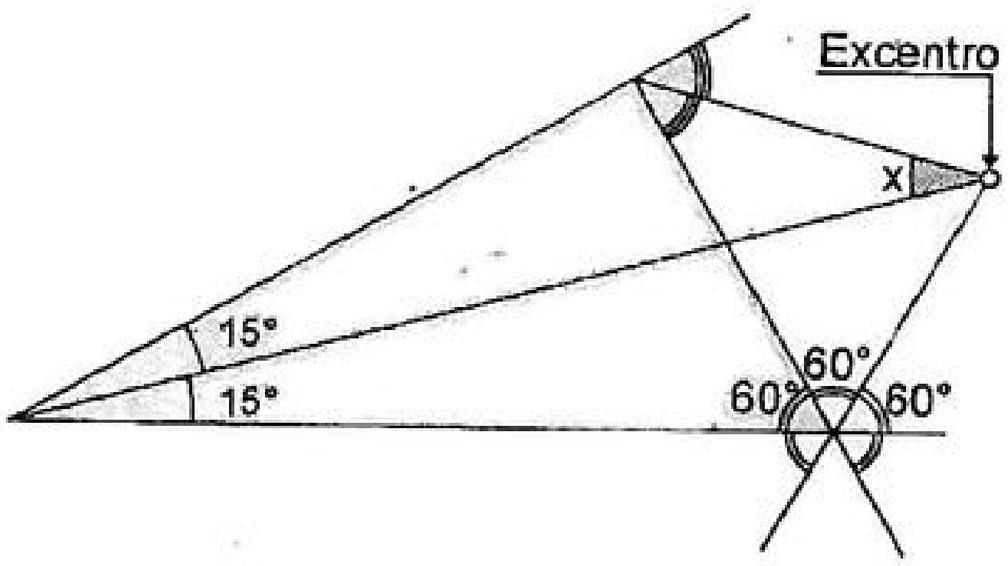
Scanned by CamScanner

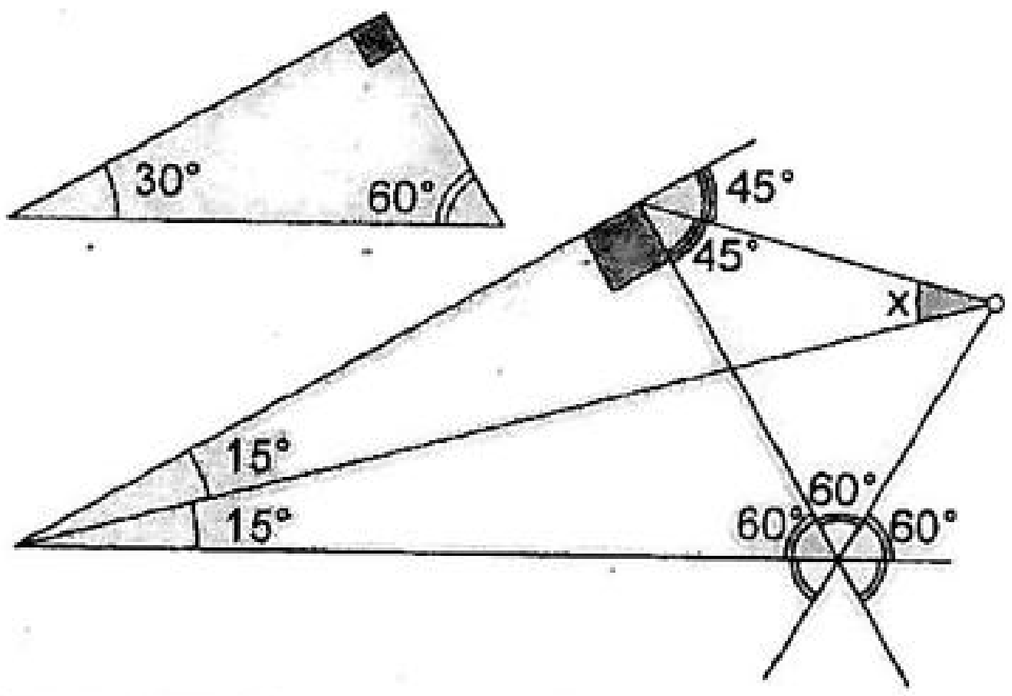
Resolución:

Paso N° 1. Observamos en la figura una bisectriz interior y una exterior:

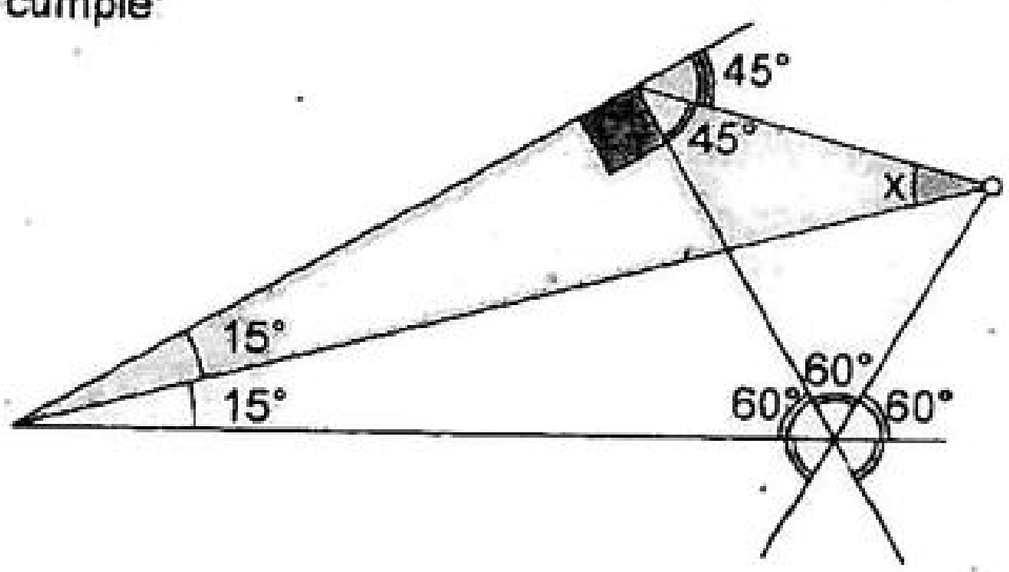


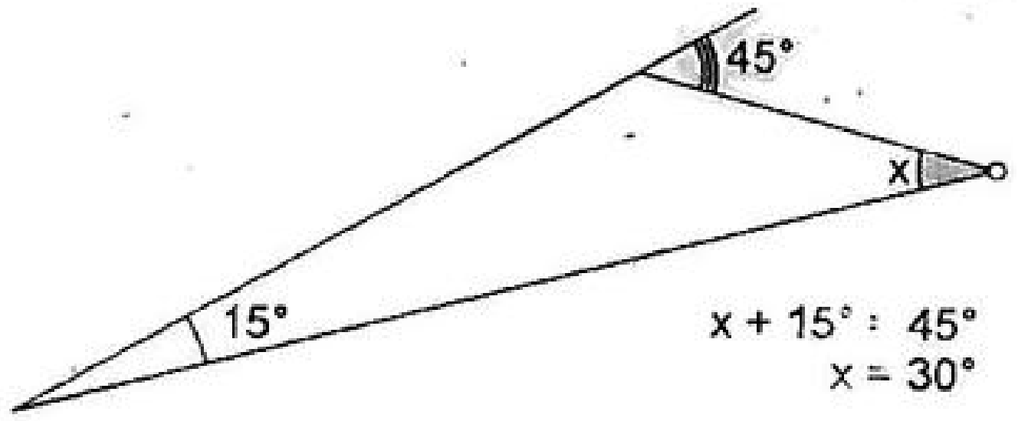
Paso N° 2. Se obtiene en la figura el excentro:





Paso N° 3. Tenemos las siguiente figura, donde cumple:

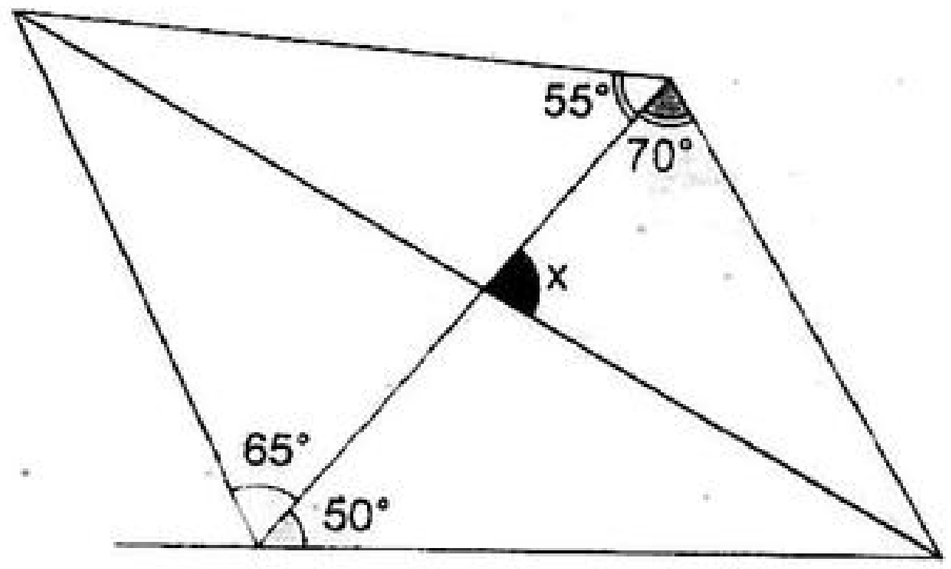




$x + 15° = 45°$

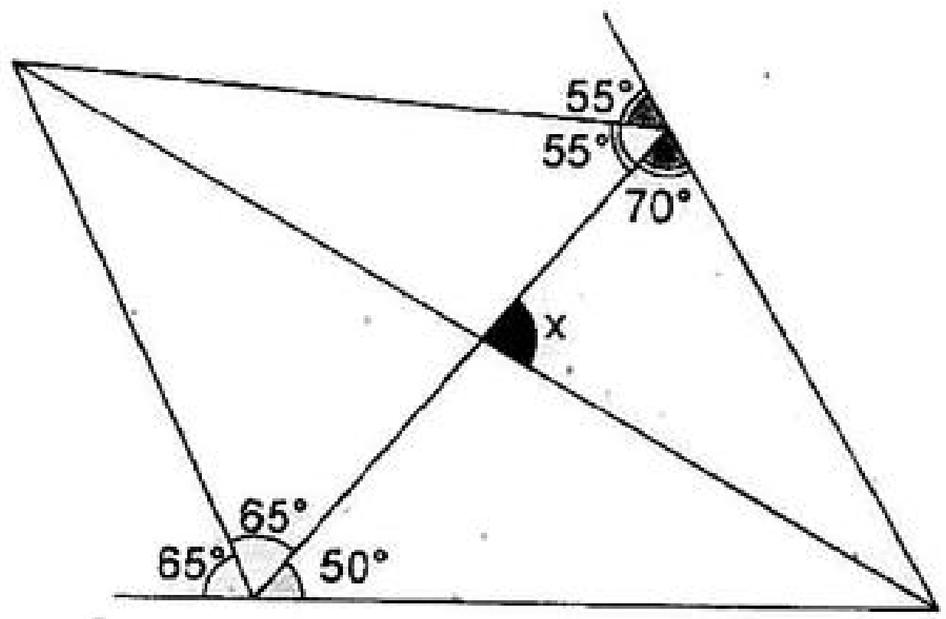
$x = 30°$

Problema 93. Calcular x.

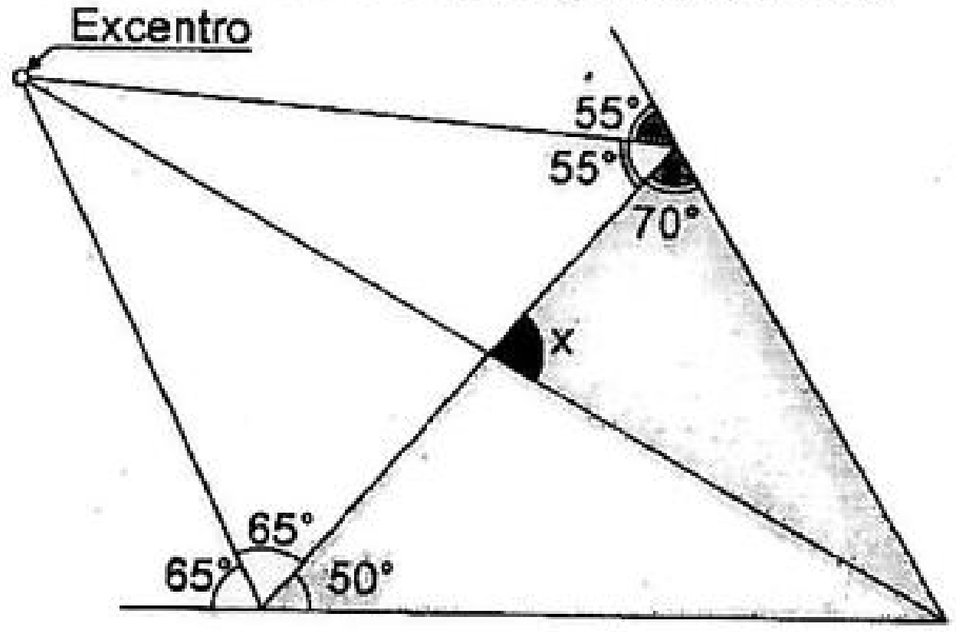


Resolución:

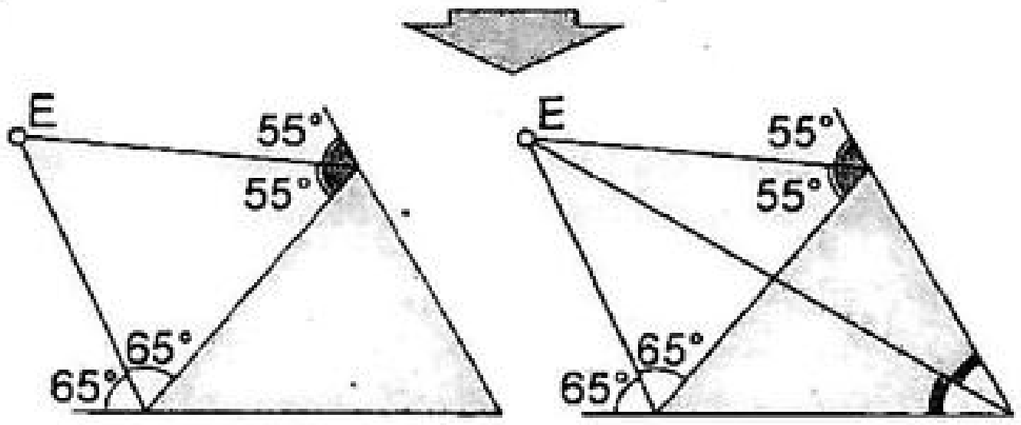
Paso N° 1. Completamos los ángulos internos de la figura:

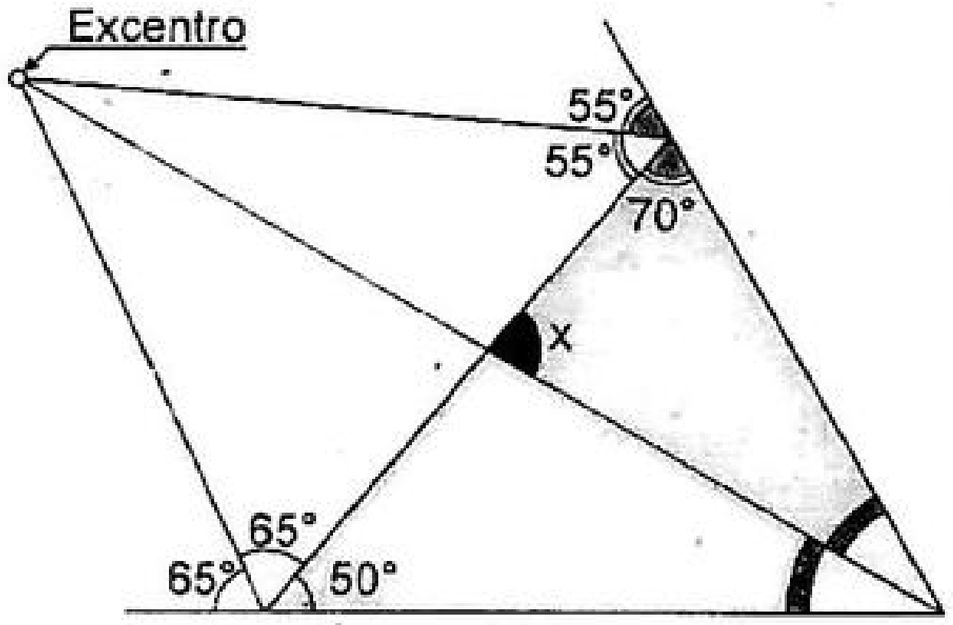


Paso N° 2. Se obtiene en la figura el excentro:

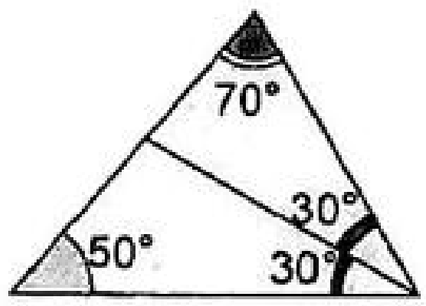


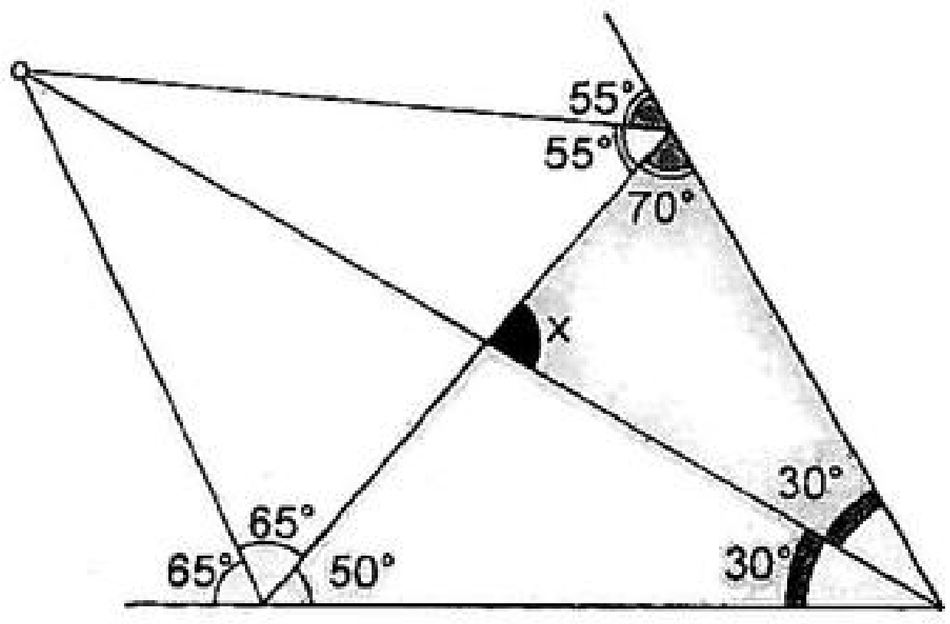
Scanned by CamScanner

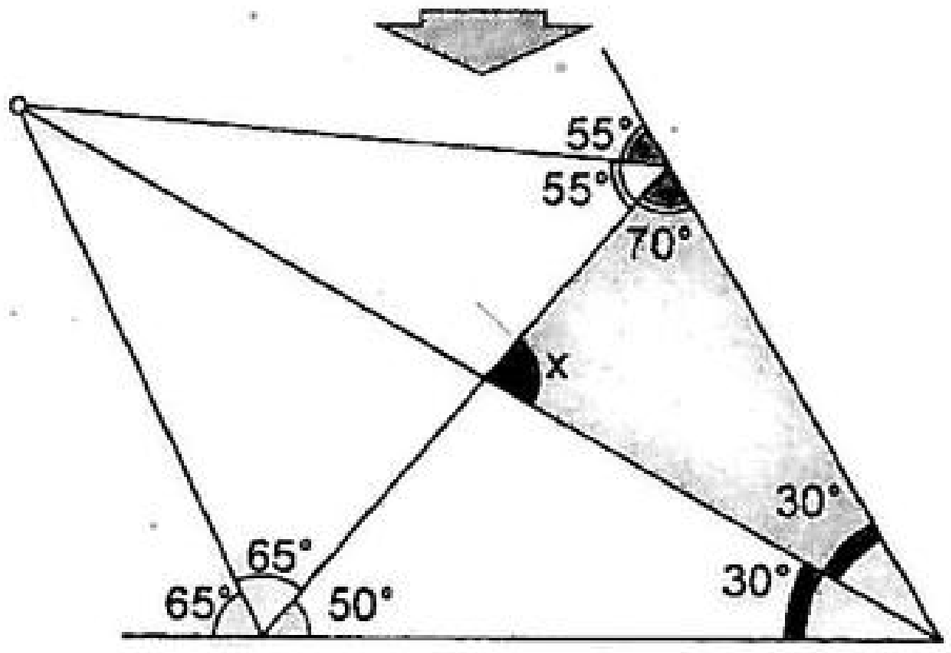




Paso N° 3. Tenemos:



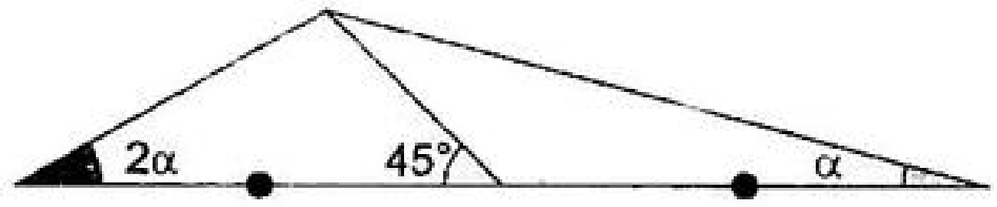




$\therefore x + 70° + 30° = 180°$

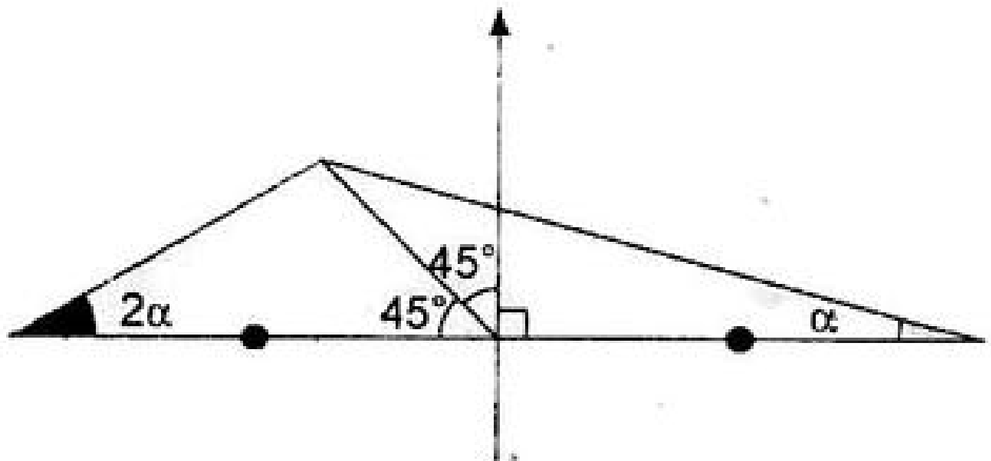
$x = 80°$

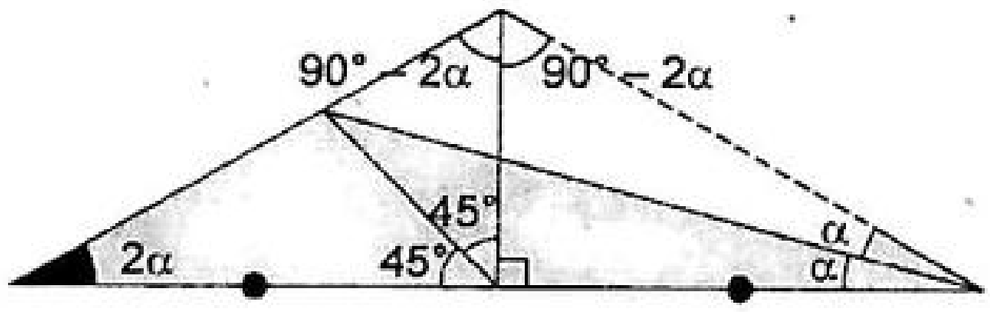
Problema 94. Calcular x.



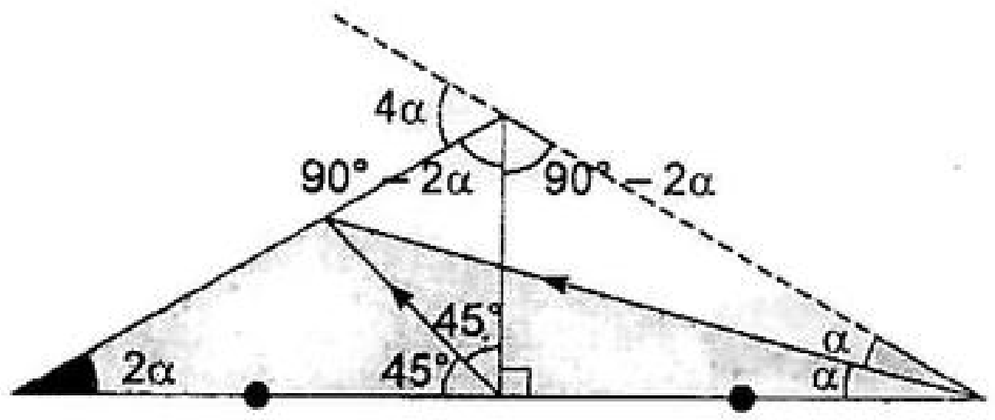
Resolución:

Paso N° 1. Trazamos la perpendicular en al figura, para obtener la mediatriz:

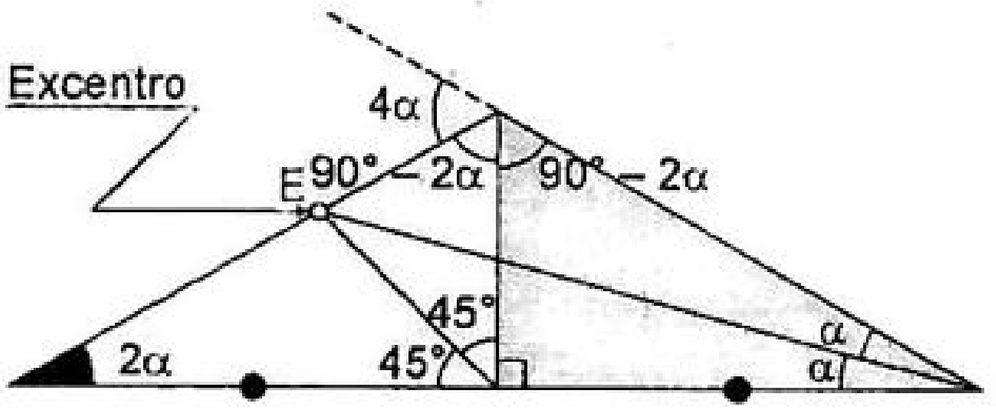




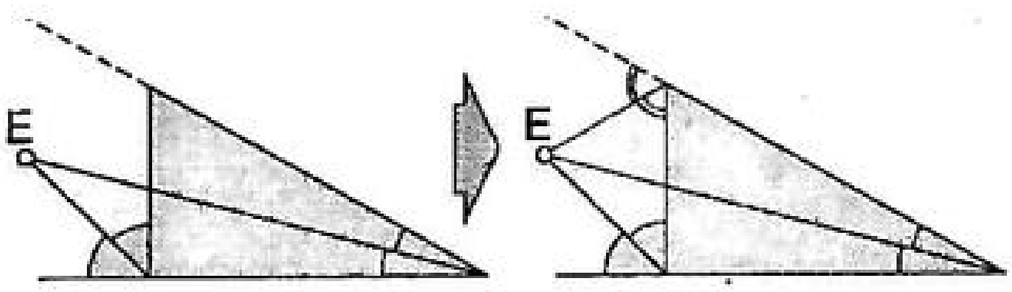
Paso N° 2. Ahora se observa en la figura una bisectriz interior y una exterior:

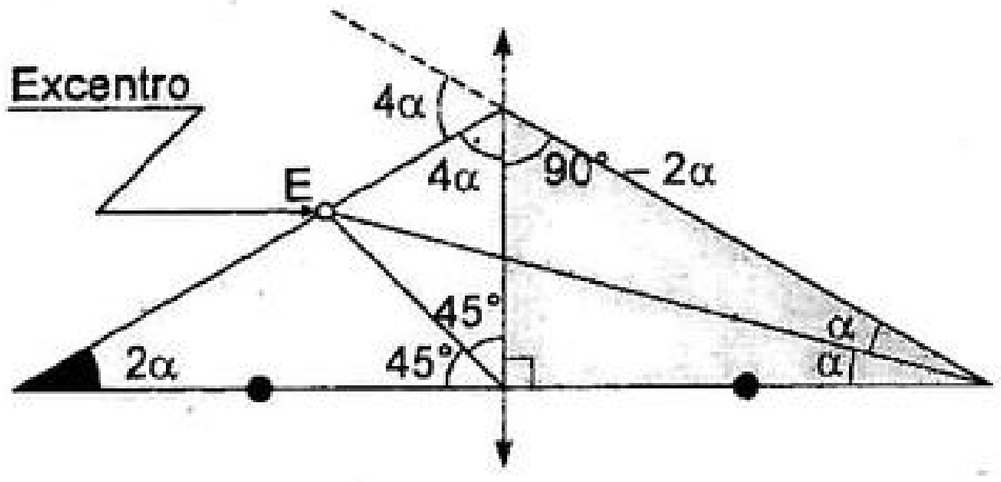


Paso N° 3. Obtenemos el incentro, donde cumple:

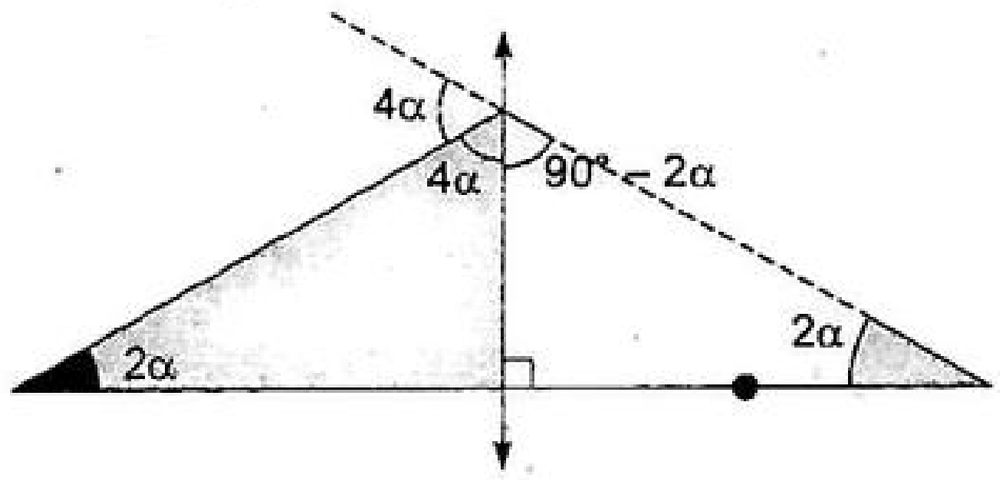


Scanned by CamScanner



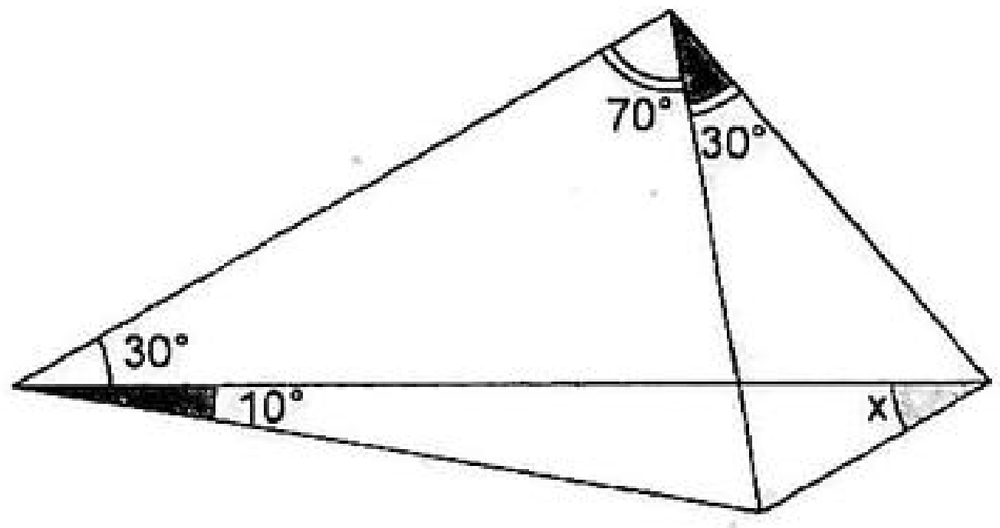


Paso N° 4. Ahora tenemos la siguiente figura, donde cumple:



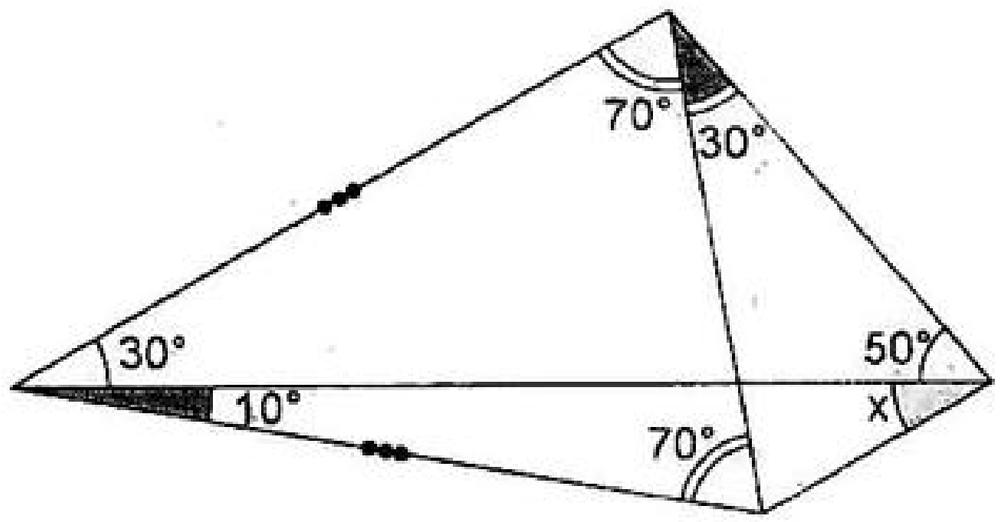
$$\therefore\ 2\alpha + 4\alpha = 90°$$
$$6\alpha = 90°$$
$$\alpha = 15°$$

Problema 95. Calcular x.

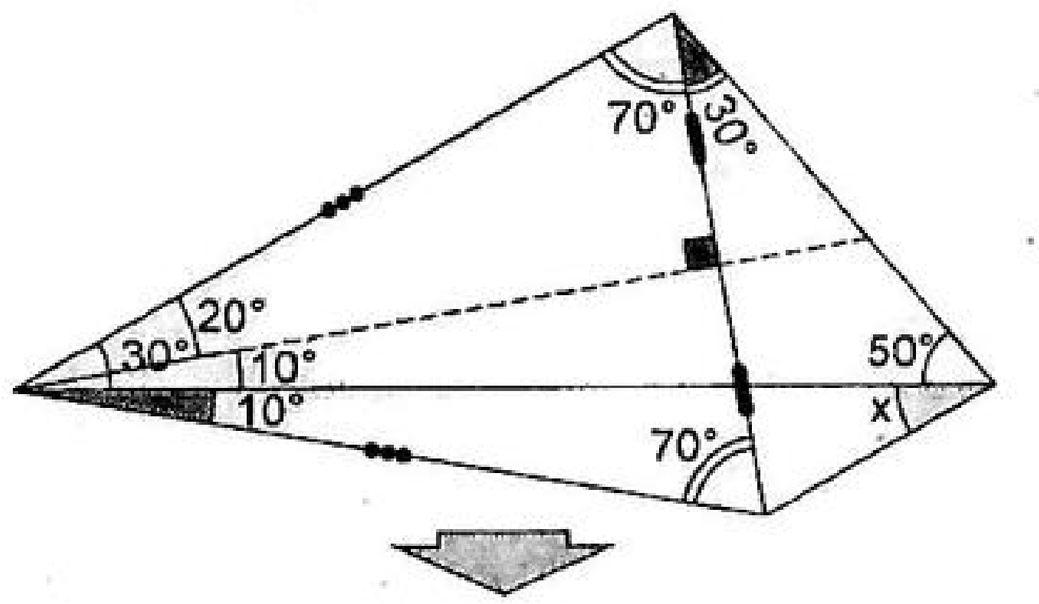


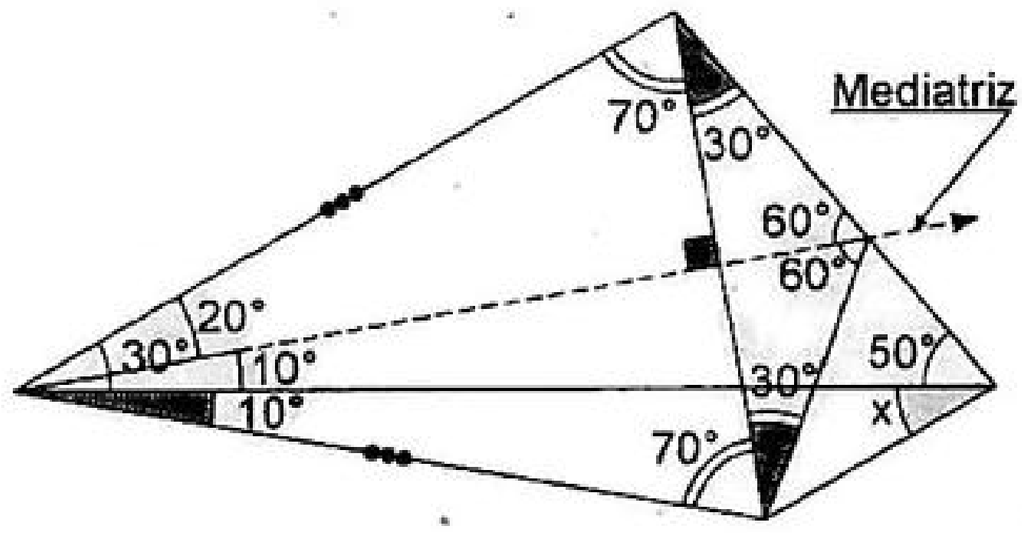
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos que se observan en un triángulo isósceles:

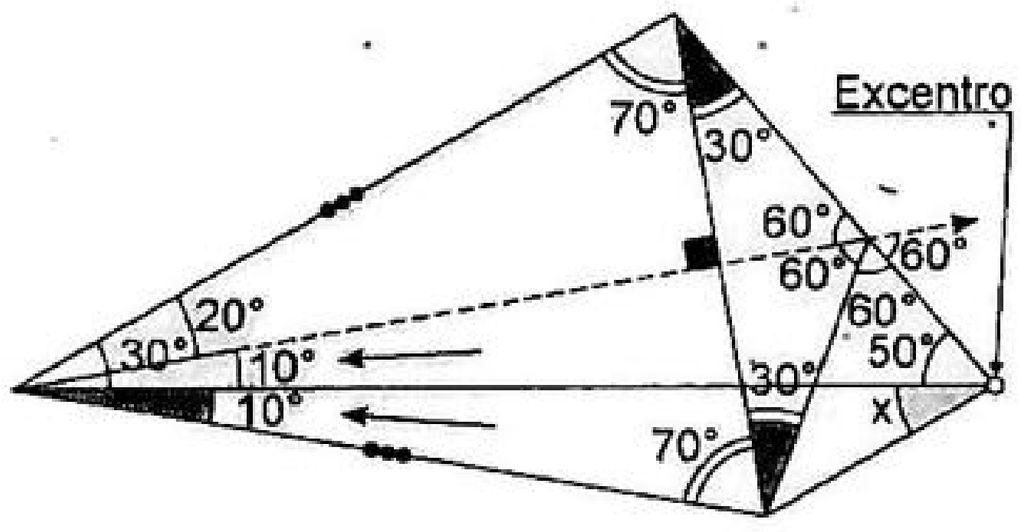


Paso N° 2. Se emplean las propiedades que se cumplen en un triángulo isósceles:

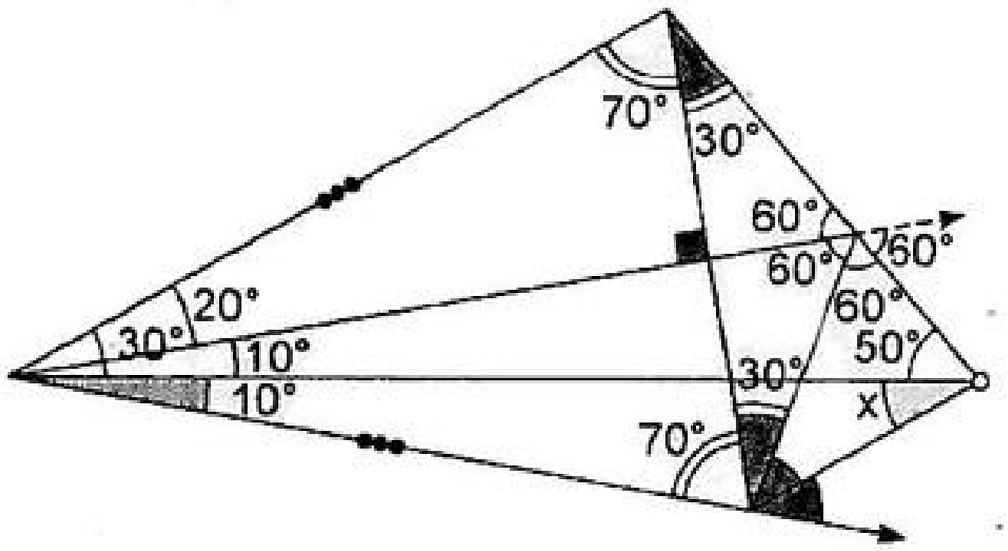




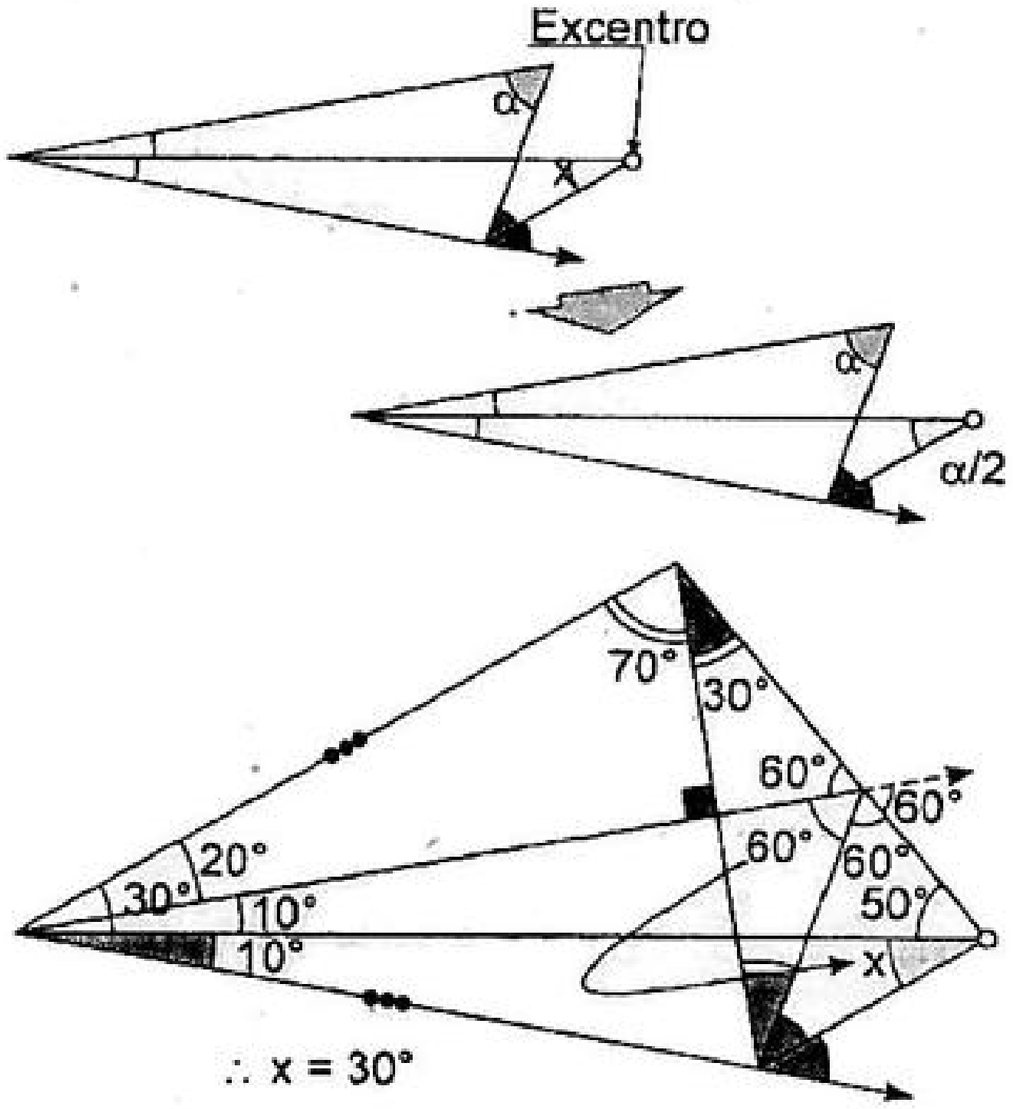
Paso N° 3. Se observa en la figura el excentro, así:



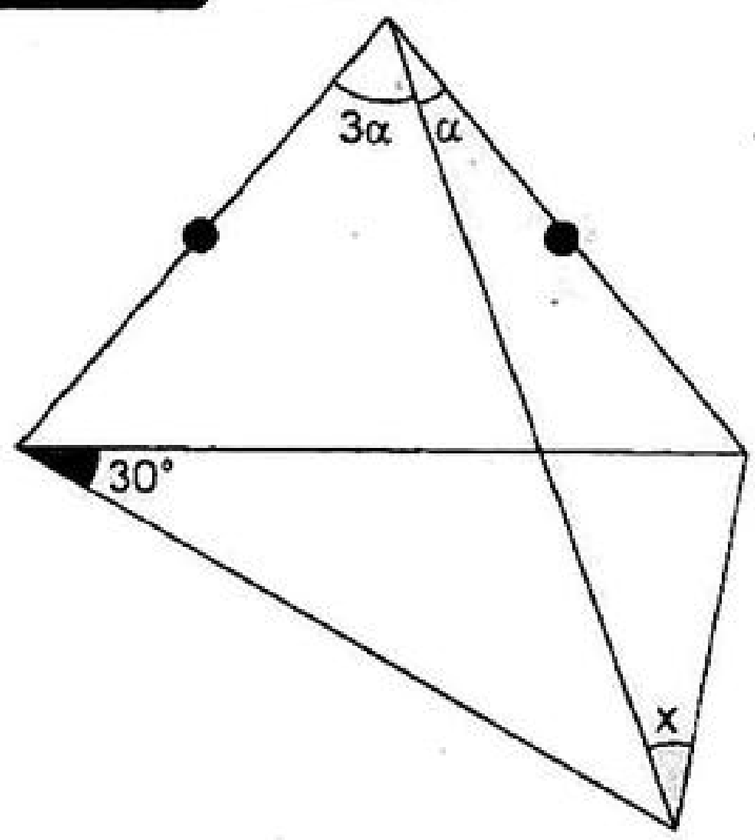
Scanned by CamScanner



Paso N° 4. Se obtiene la siguiente figura y se aplica la propiedad del excentro:

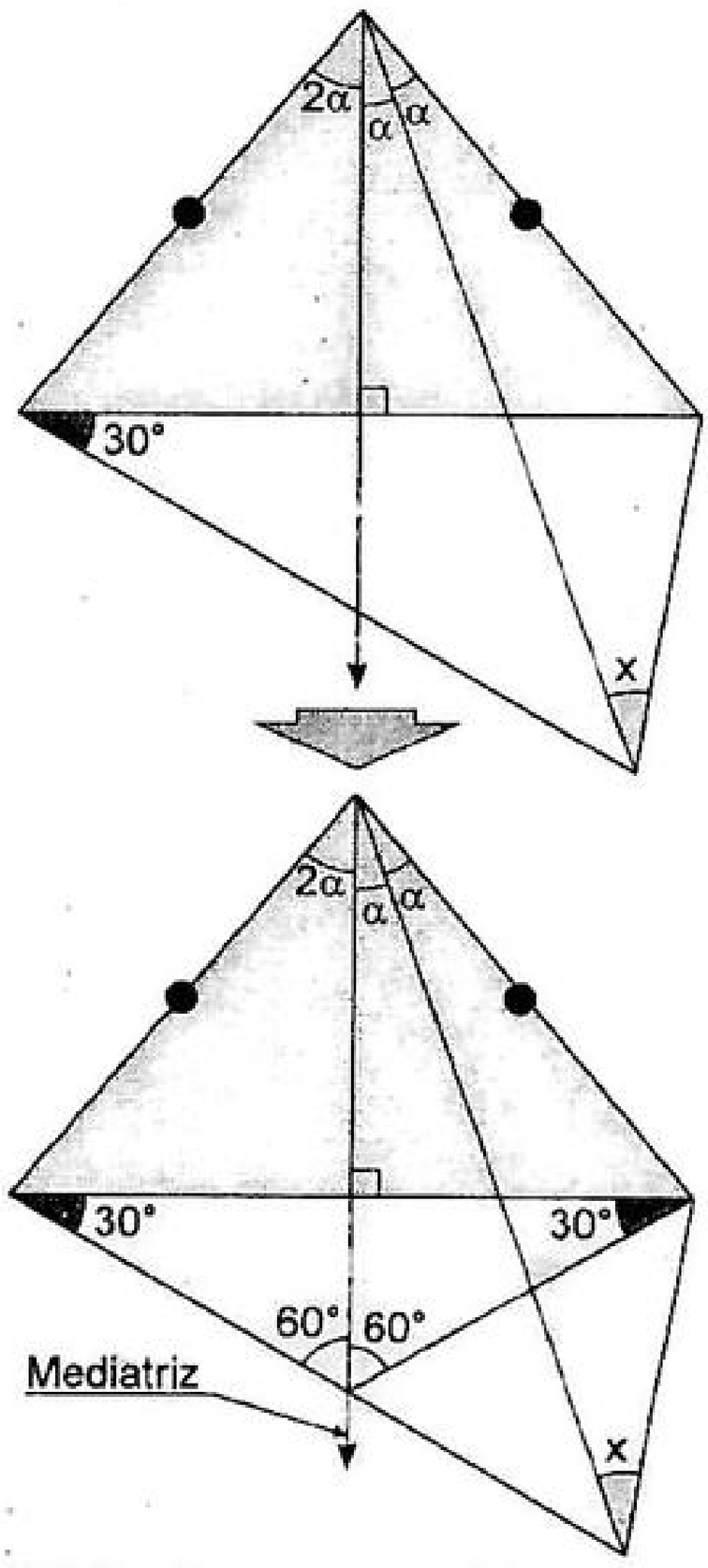


Problema 96. Calcular x.

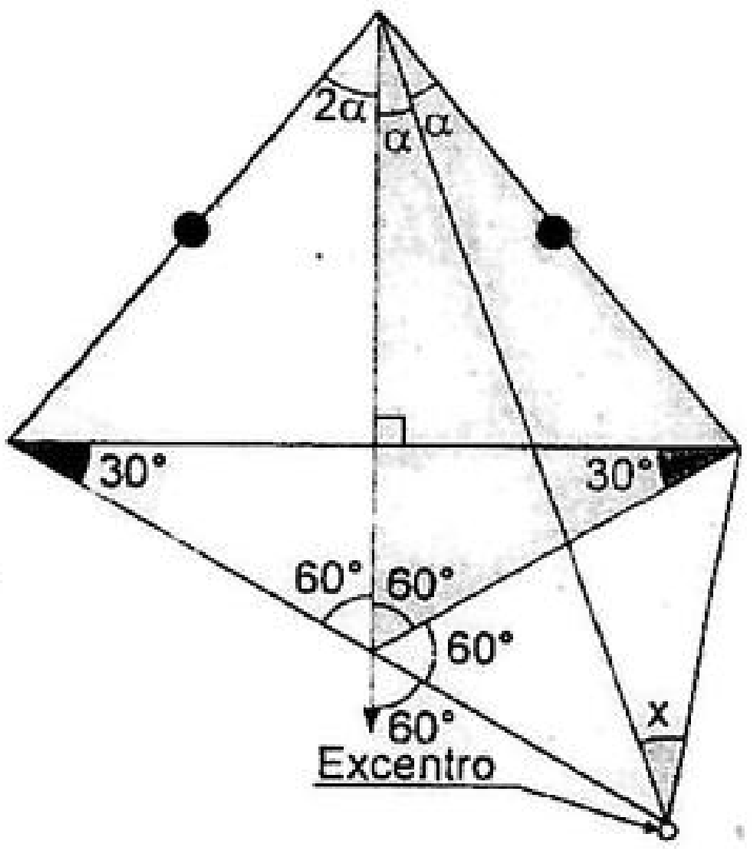


Resolución:

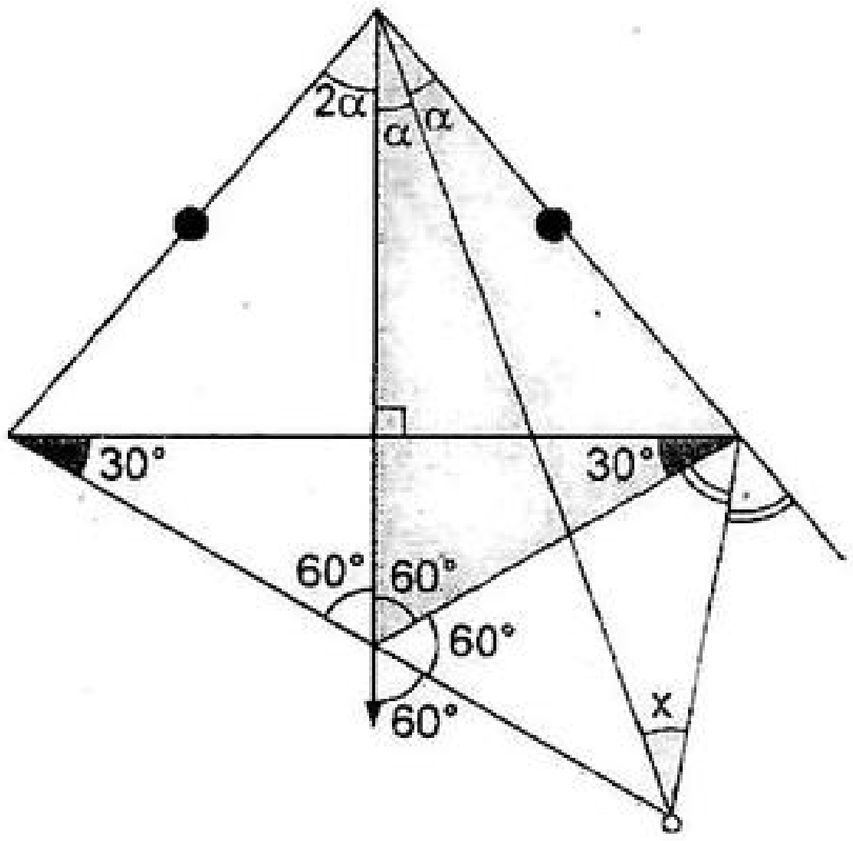
Paso N° 1. Empleamos las propiedades que se cumplen en un triángulo isósceles:



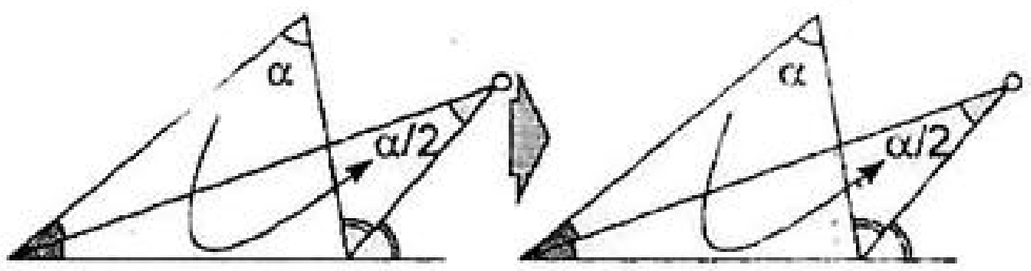
Paso N° 2. Se observa que se obtiene el excentro, así:

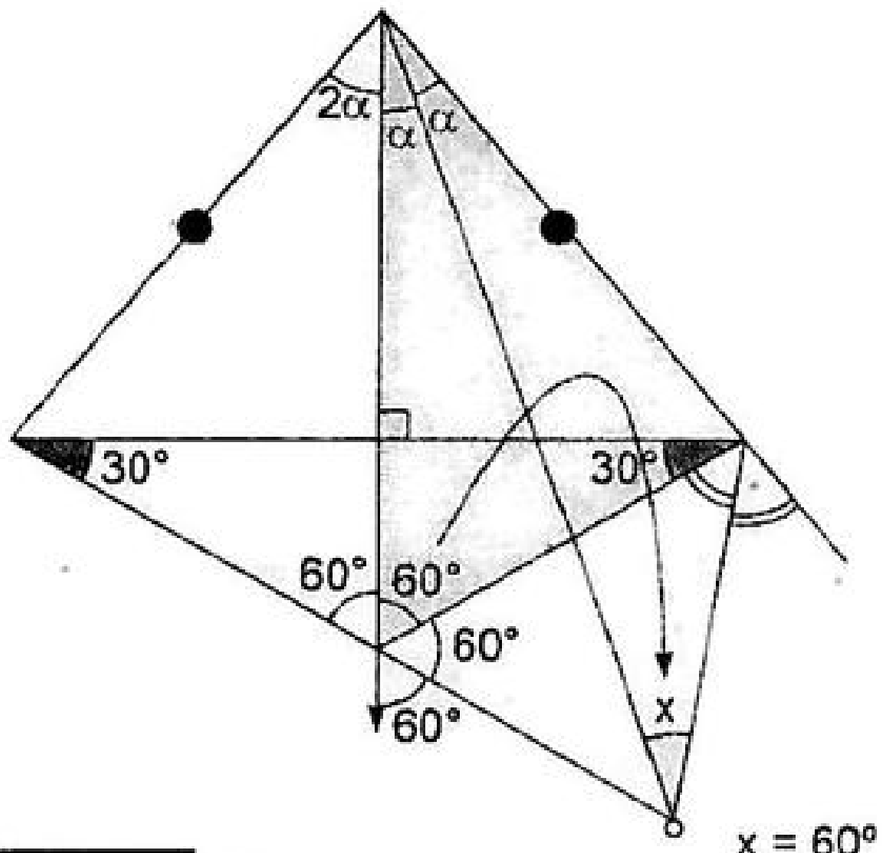


Scanned by CamScanner



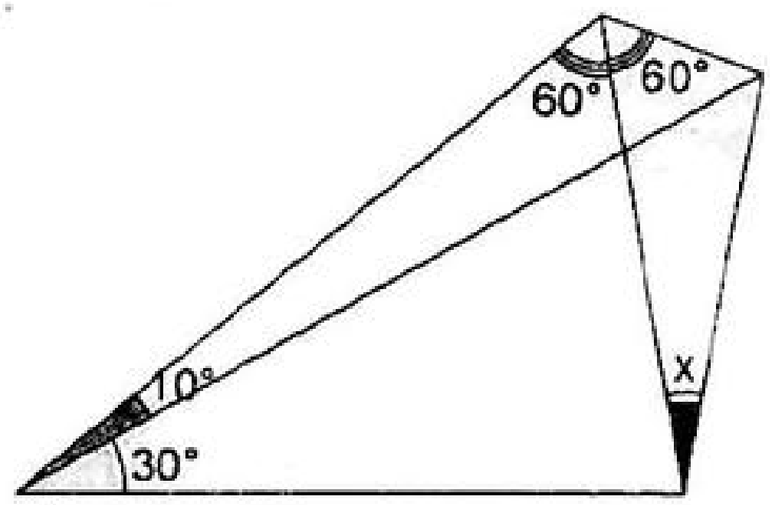
Paso N° 3. Aquí se cumple la siguiente propiedad





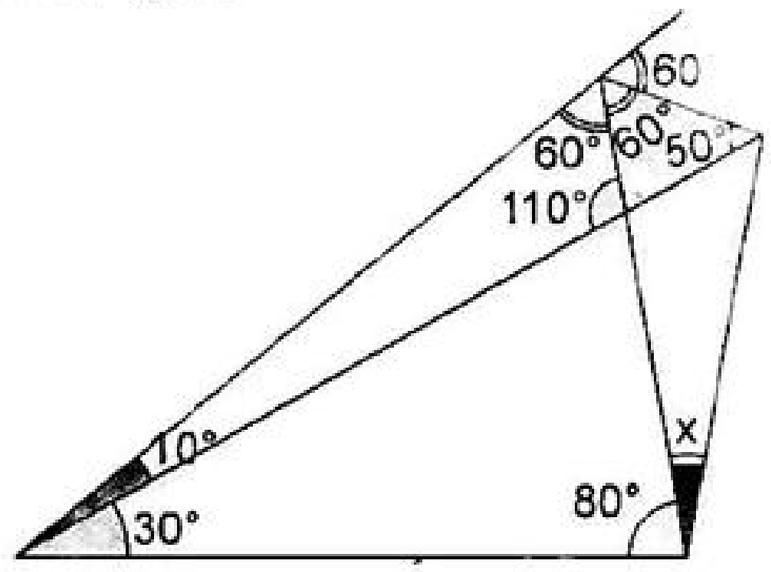
$x = 60°$

Problema 97. Calcular x.

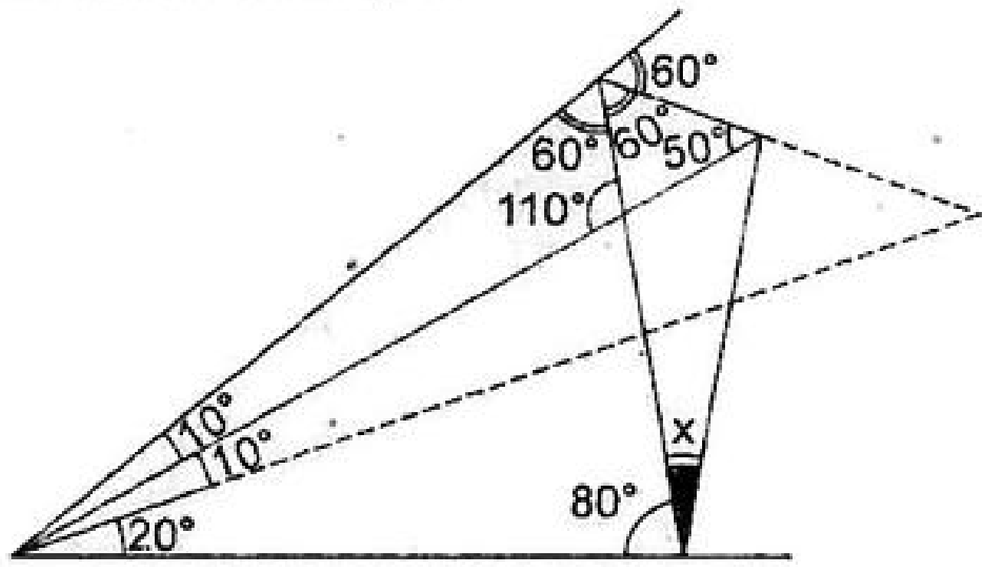


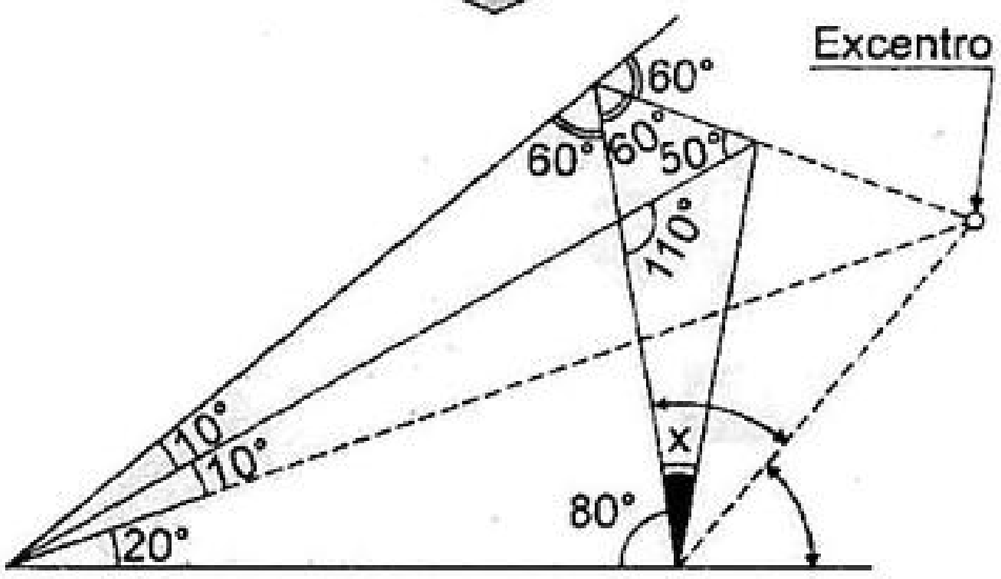
Resolución:

Paso N° 1. Completamos los ángulos internos y externos en la figura:

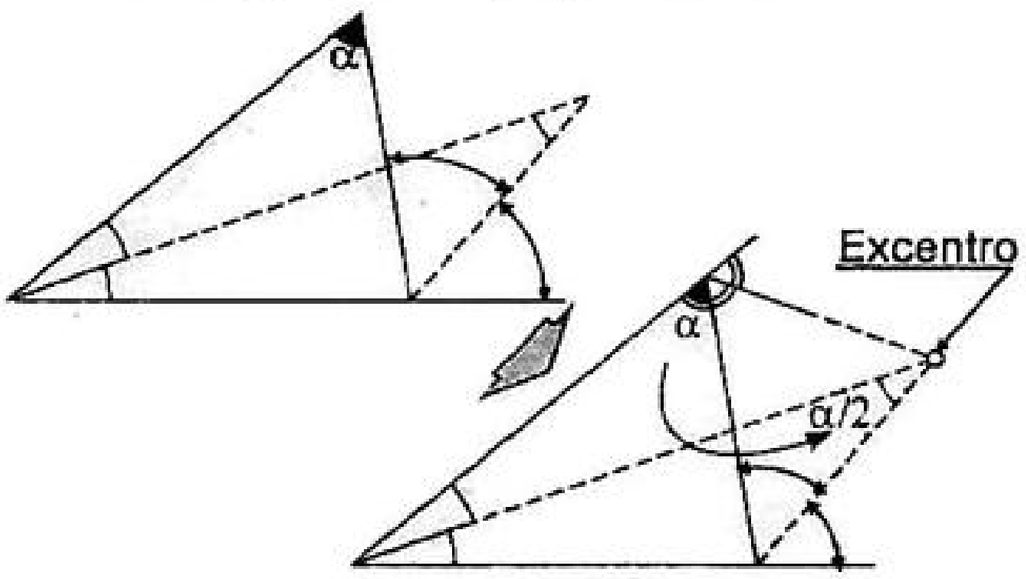


Paso N° 2. Realizamos los siguientes trazos para obtener el excentro, así:

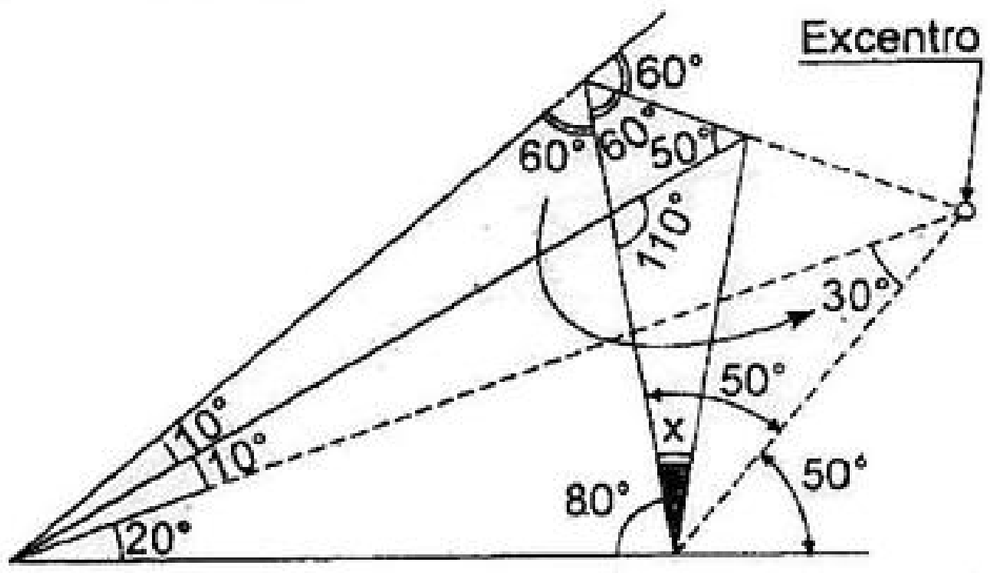




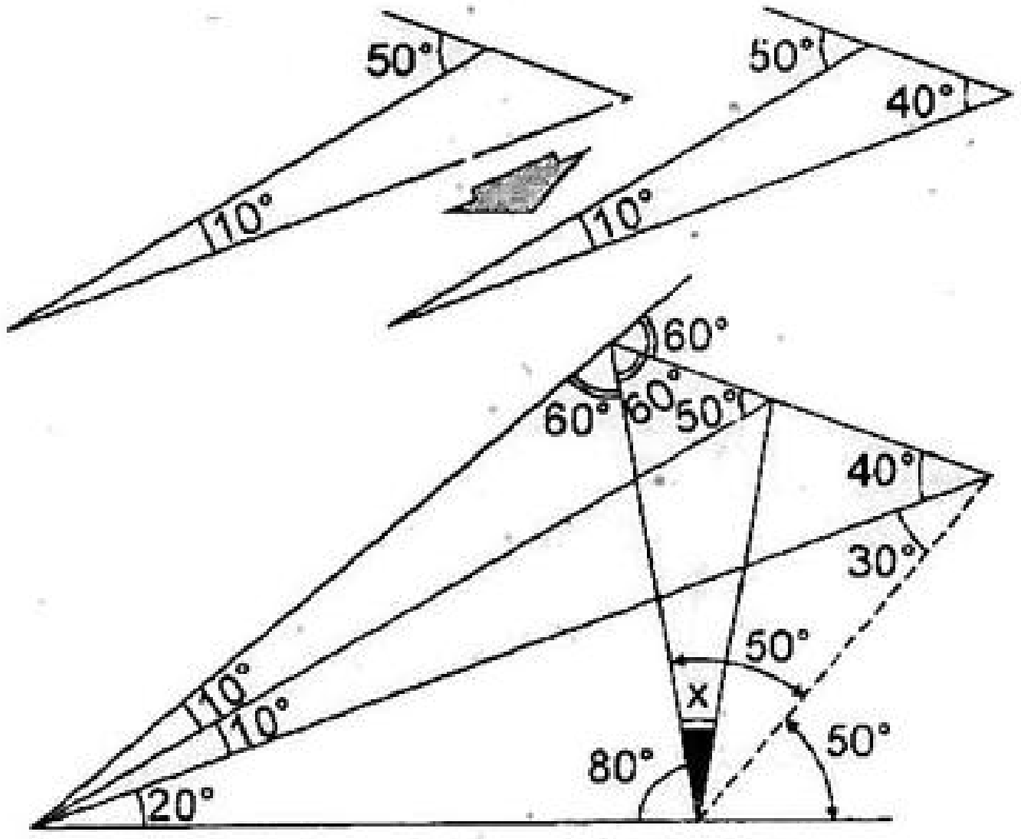
Paso N° 3. Aplicamos la propiedad del excentro:



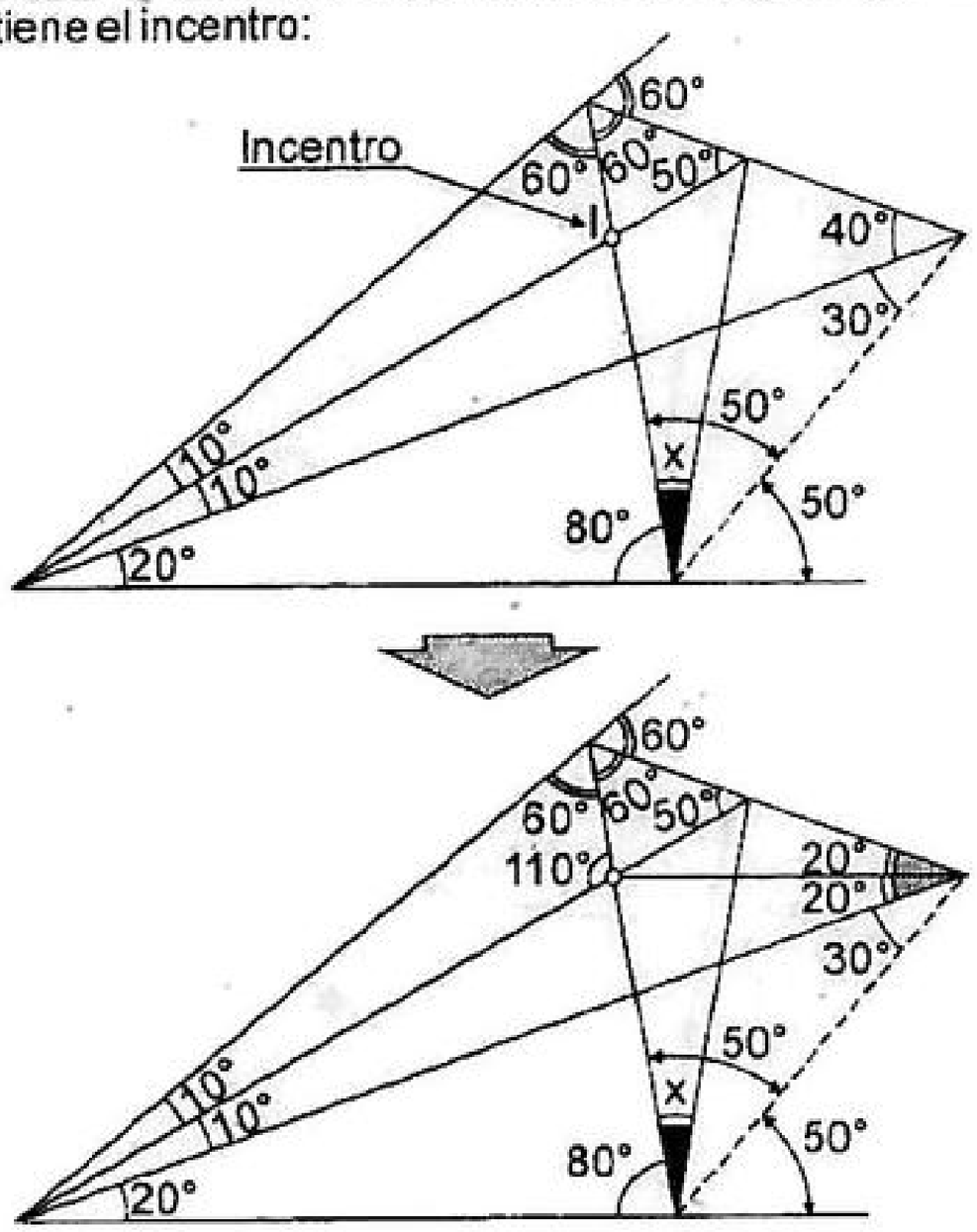
Scanned by CamScanner



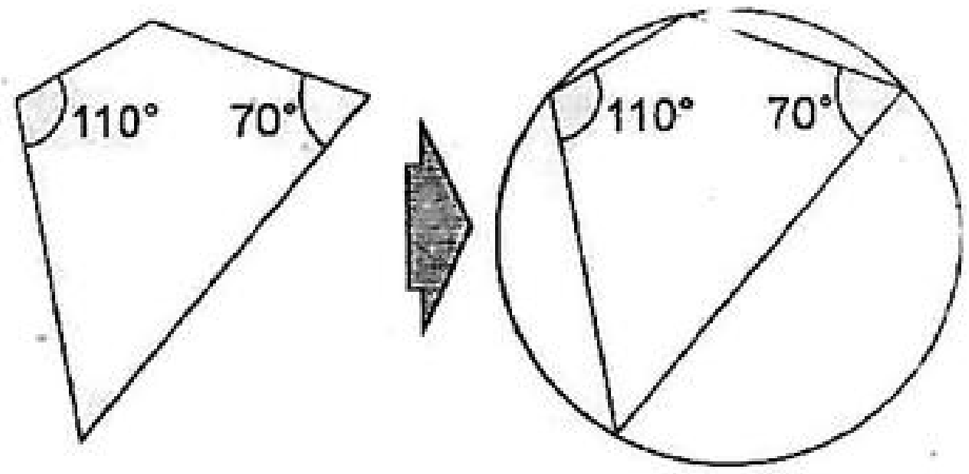
Paso N° 4. También tenemos:

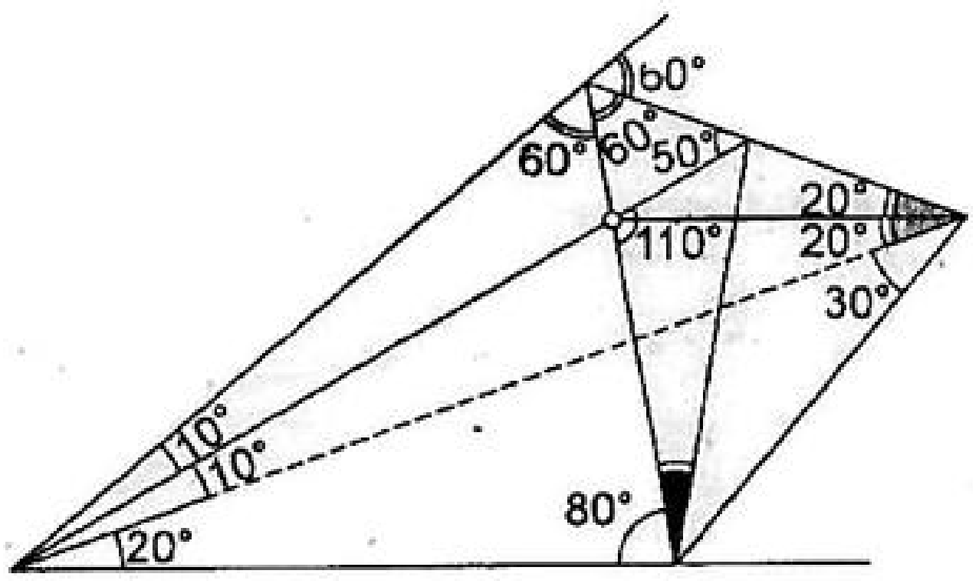


Paso N° 5. Ahora observamos en la figura que se tiene el incentro:

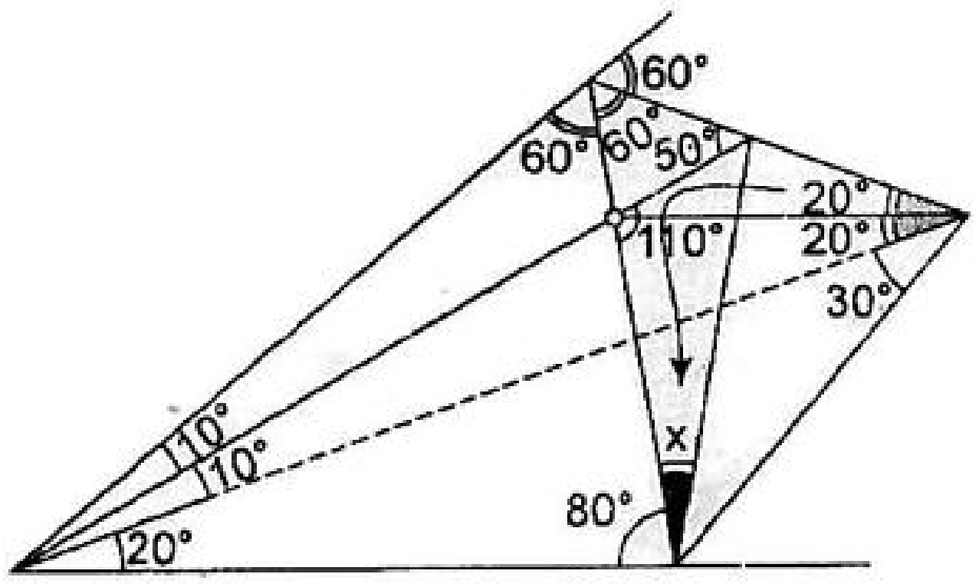


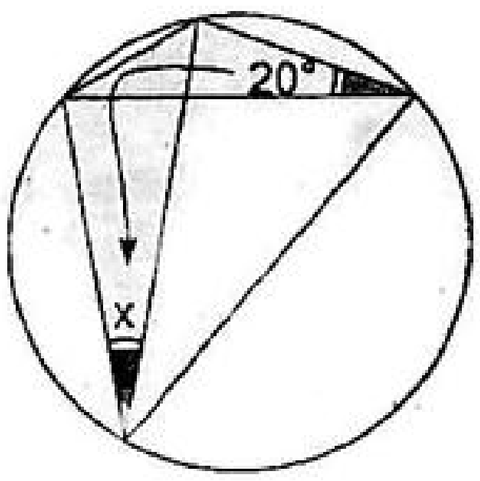
Paso N° 6. Se obtiene un cuadrilátero inscriptible donde cumple:





Paso N° 7. Entonces en dicho cuadrilátero se cumple la propiedad de pantalón o rebote:

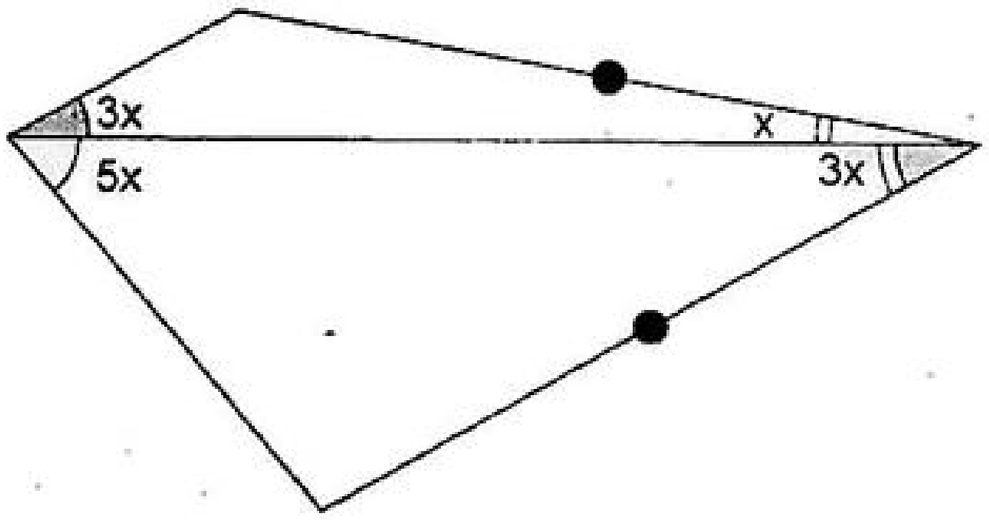




$\Rightarrow x = 20°$

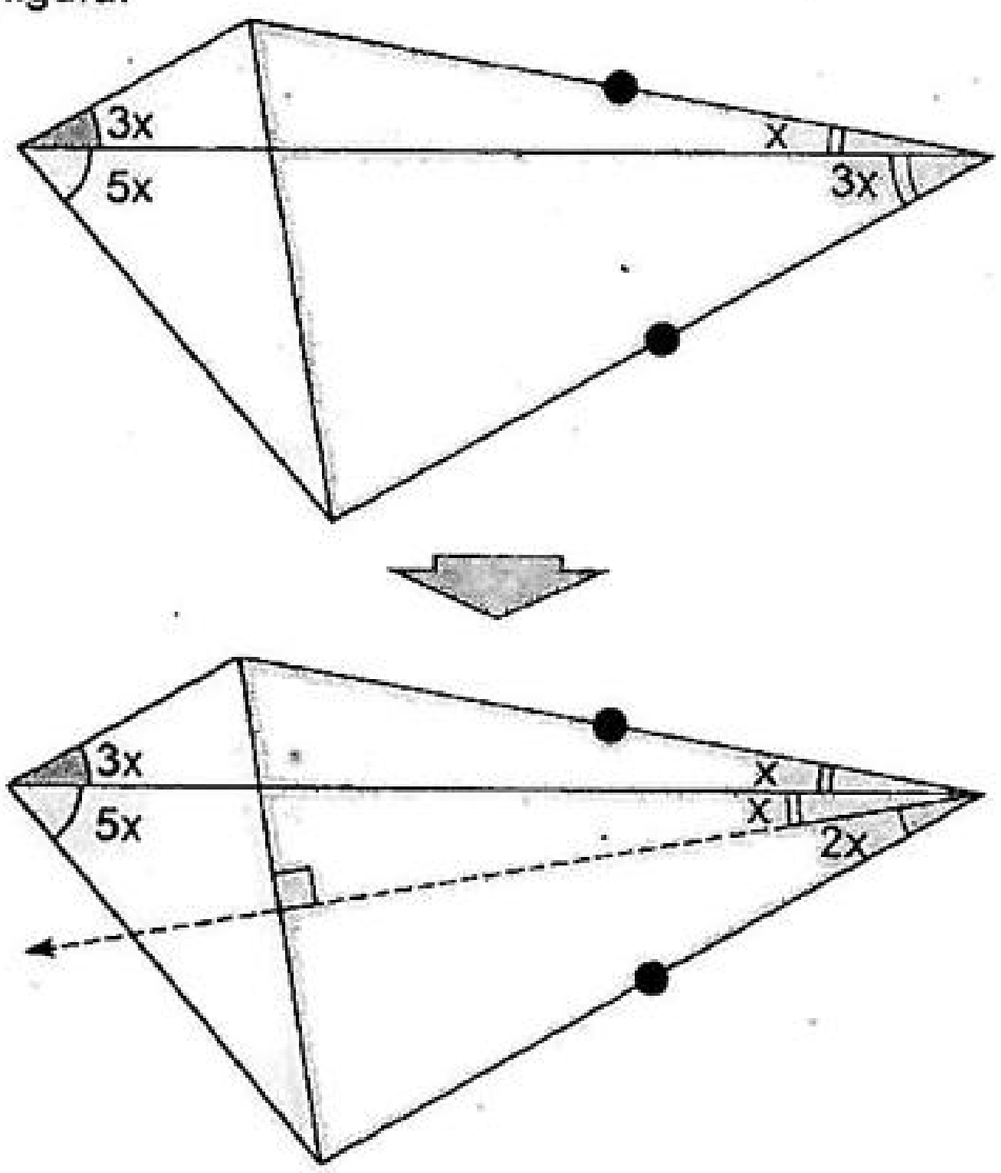
Scanned by CamScanner

Problema 98. Calcular x.

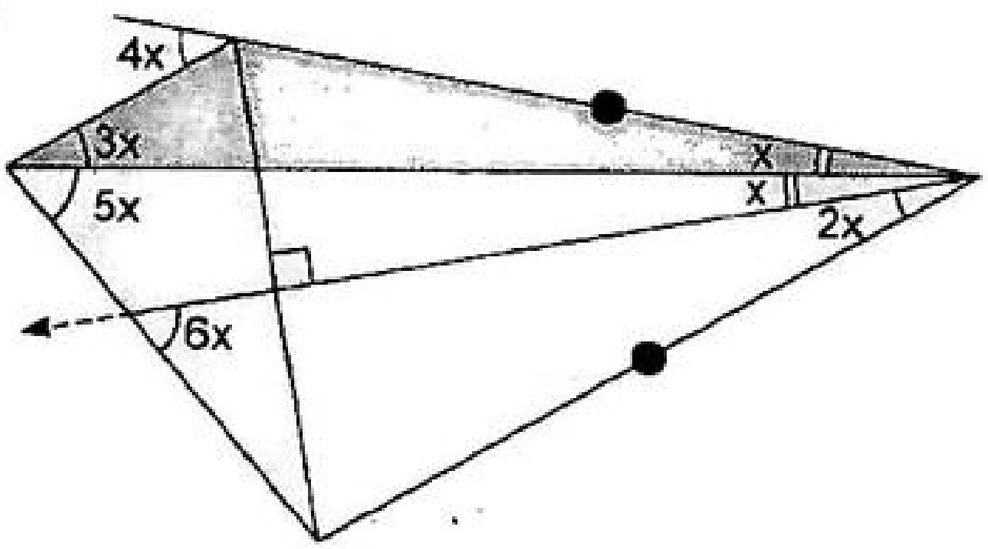


Resolución:

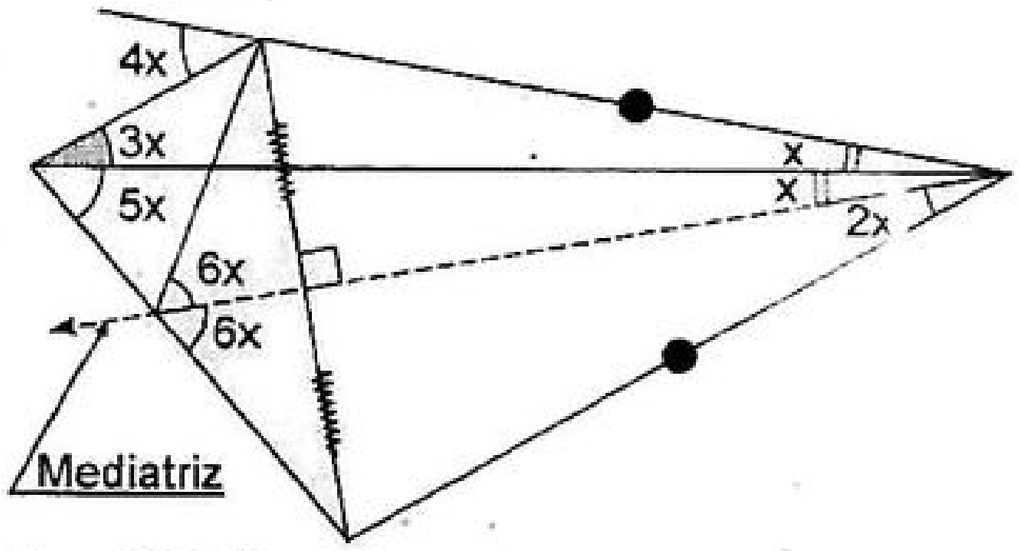
Paso N° 1. Formamos un triángulo isósceles en la figura:



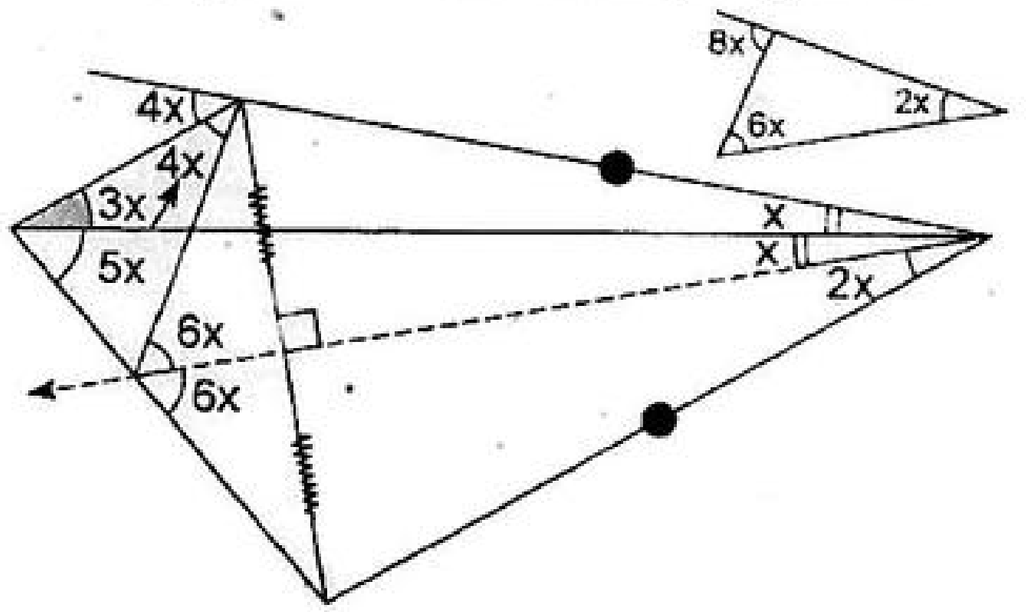
Paso N° 2. Se observa los siguientes ángulos exteriores:



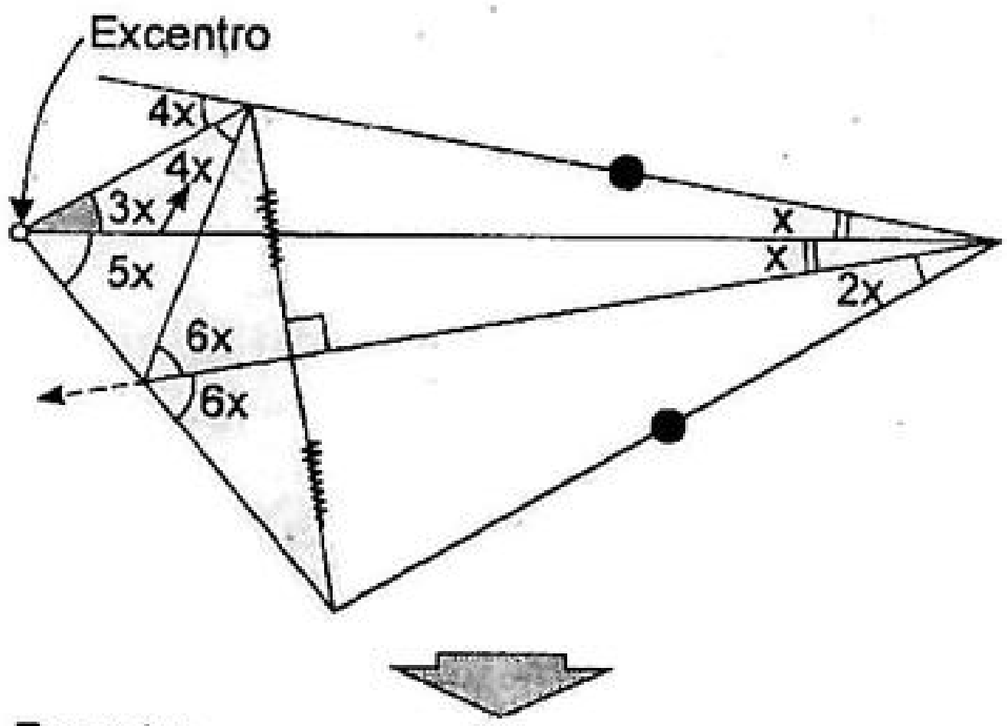
Paso N° 3. Ahora observemos la recta mediatriz donde cumple:

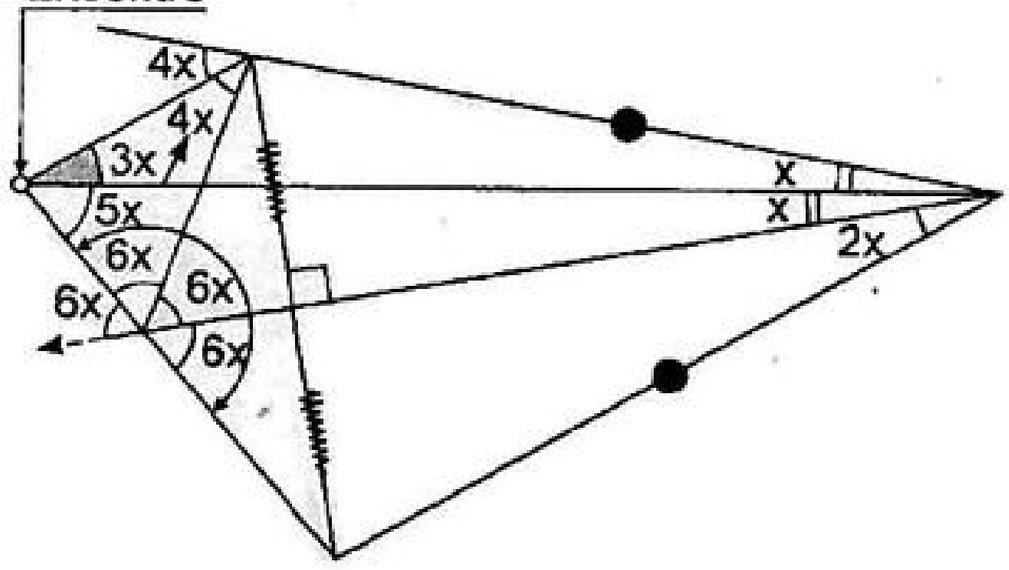


Paso N° 4. También se observa la siguiente propiedad del ángulo exterior de un triángulo, y se tiene:



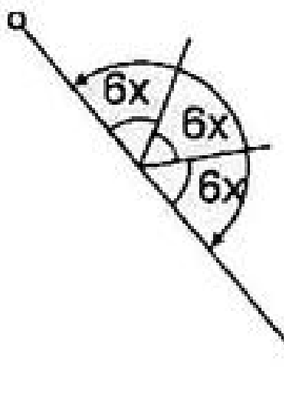
Paso N° 5. Se obtiene el excentro:





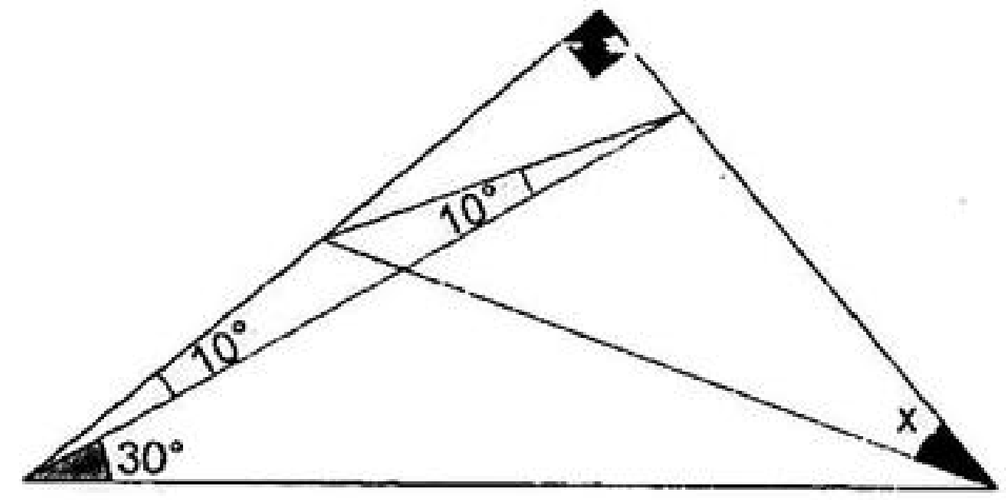
Scanned by CamScanner

Aquí se cumple:



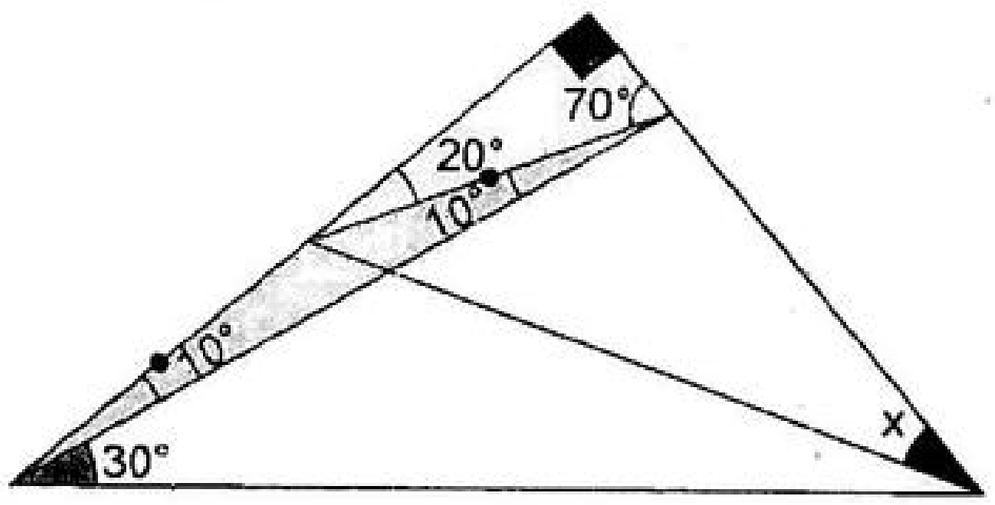
$$6x + 6x + 6x = 180°$$
$$18x = 180°$$
$$x = 10°$$

Problema 99. Calcular x.

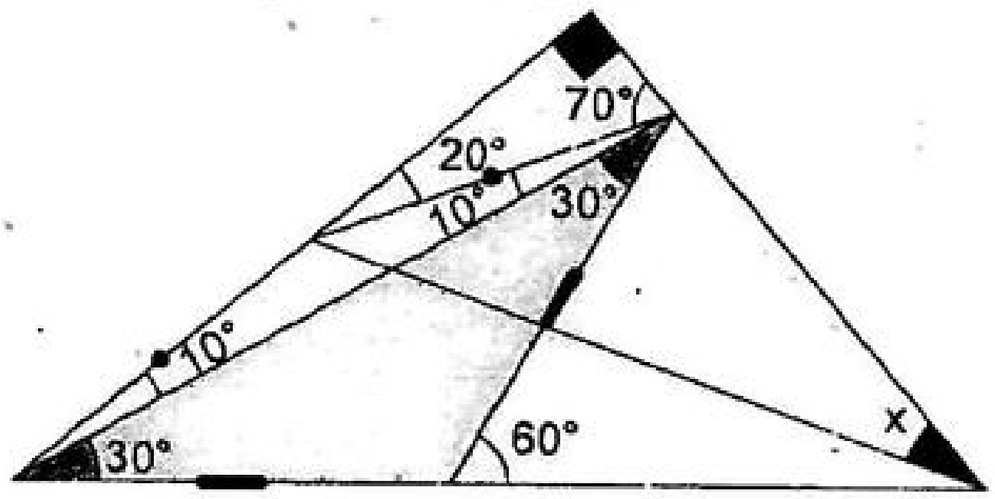


Resolución:

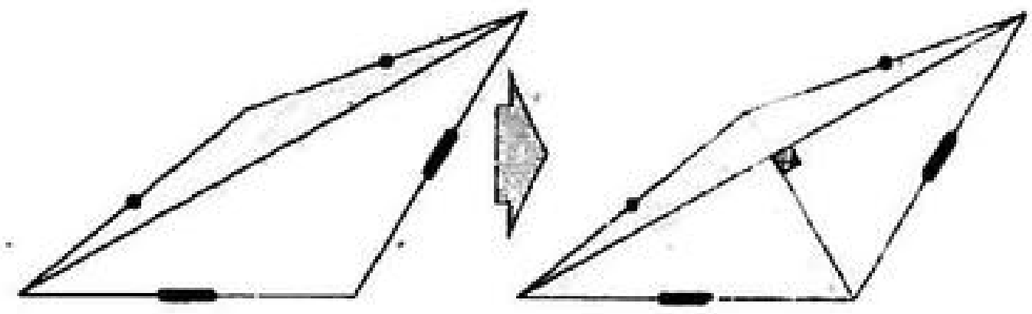
Paso N° 1. Completamos ángulos internos y externos en la figura, así:

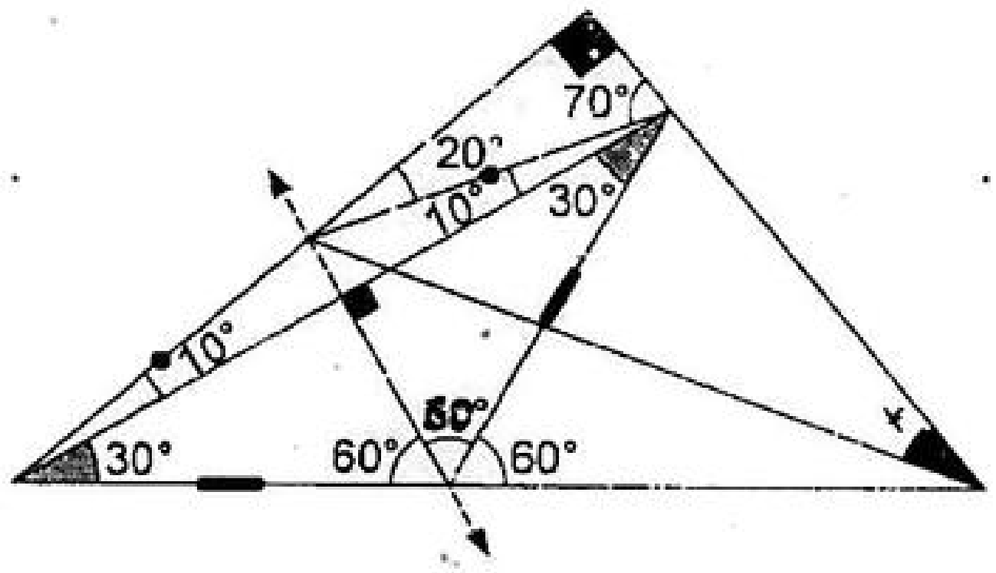


Paso N° 2. Realizamos el siguiente trazo, para obtener un triángulo isósceles, así:

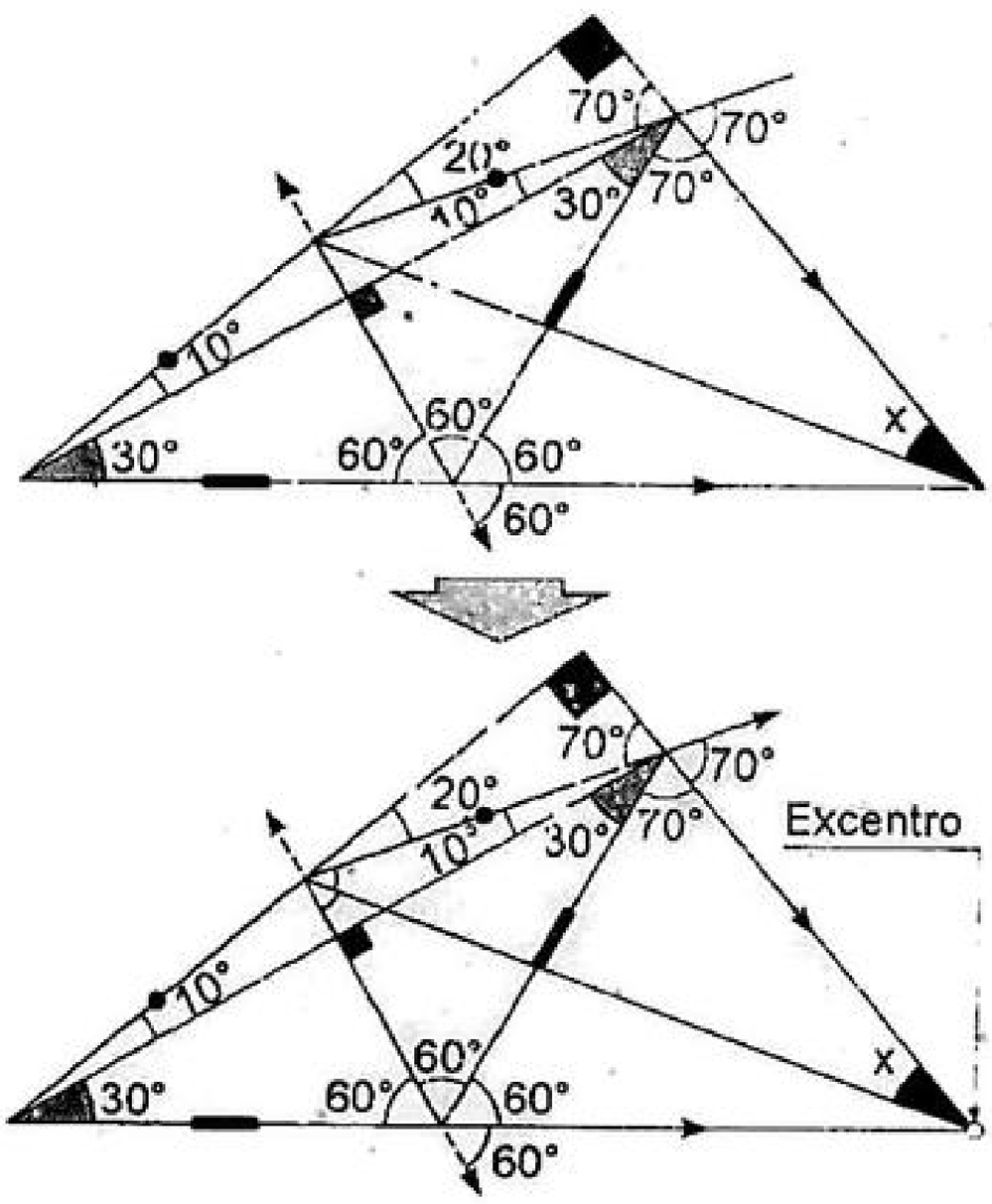


Paso N° 3. Se obtiene la recta mediatriz:

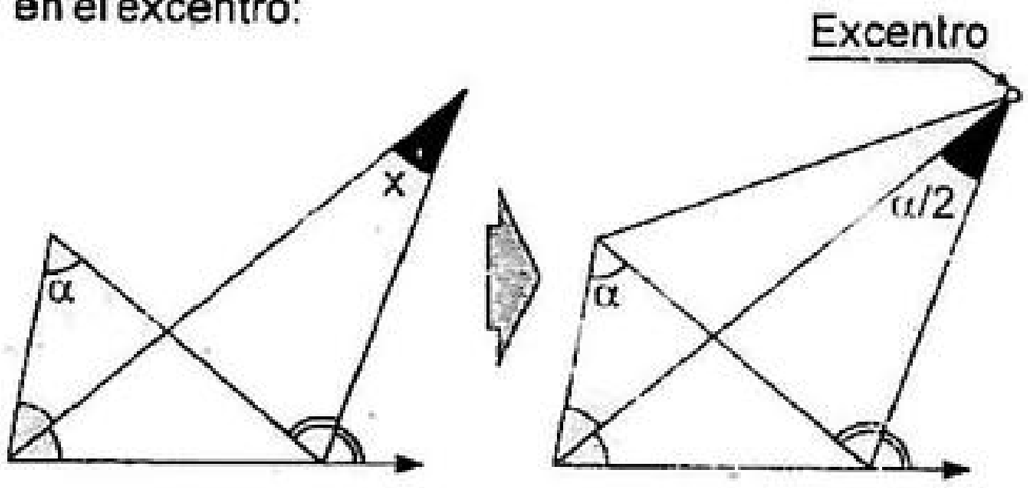




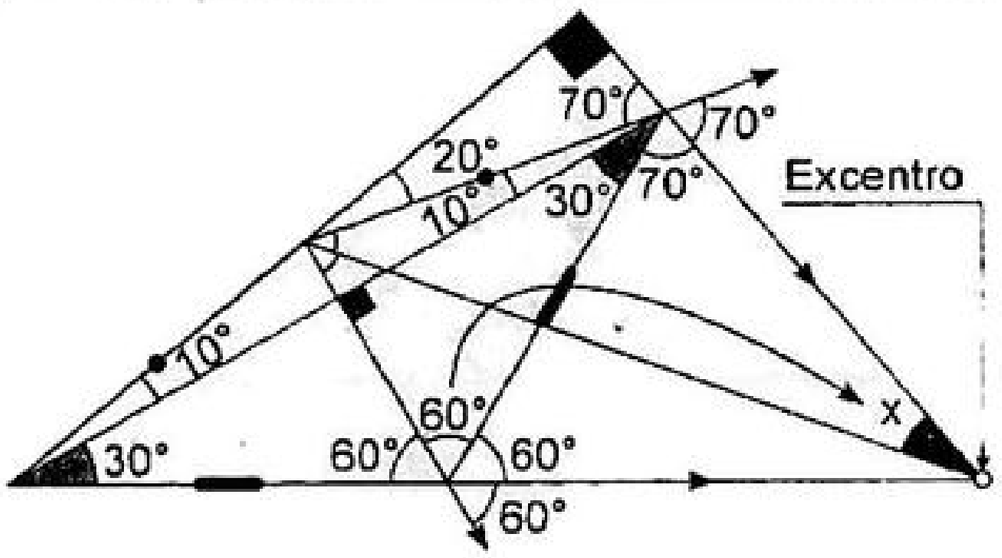
Paso N° 4. Ahora se observa en la nueva figura dos bisectrices exteriores que generan el excentro:



Paso N° 5 Empleamos la propiedad que se cumple en el excentro:

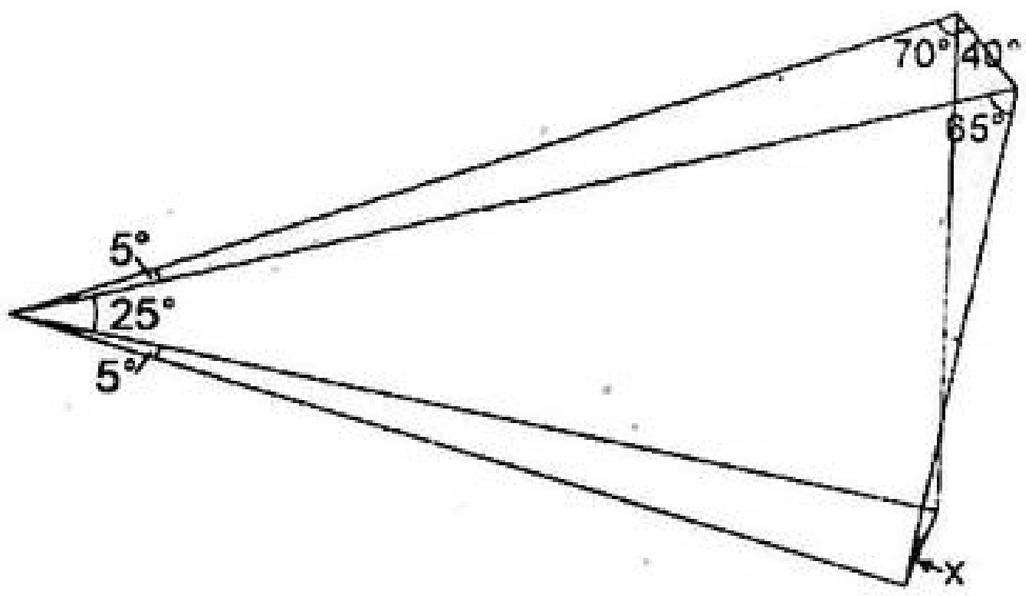


Scanned by CamScanner



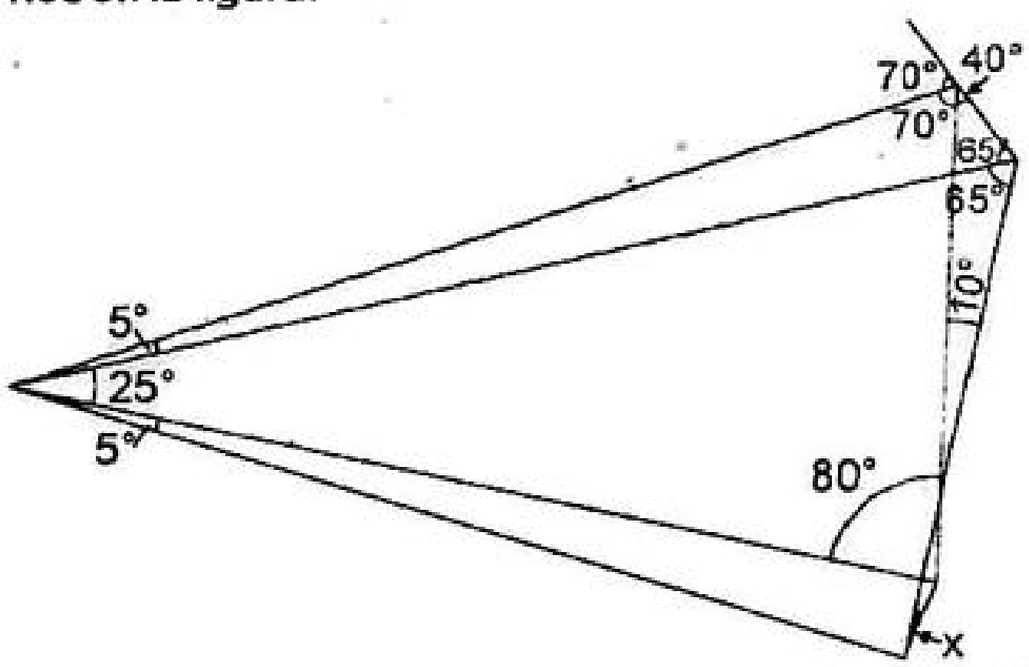
$\therefore x = 30°$

Problema 100. Calcular x.

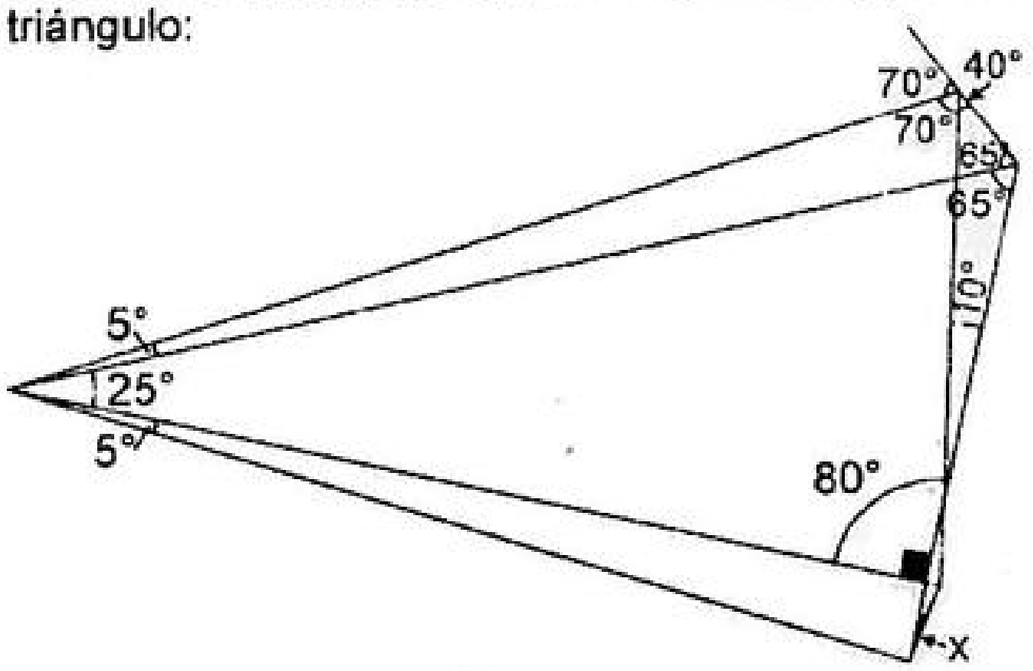


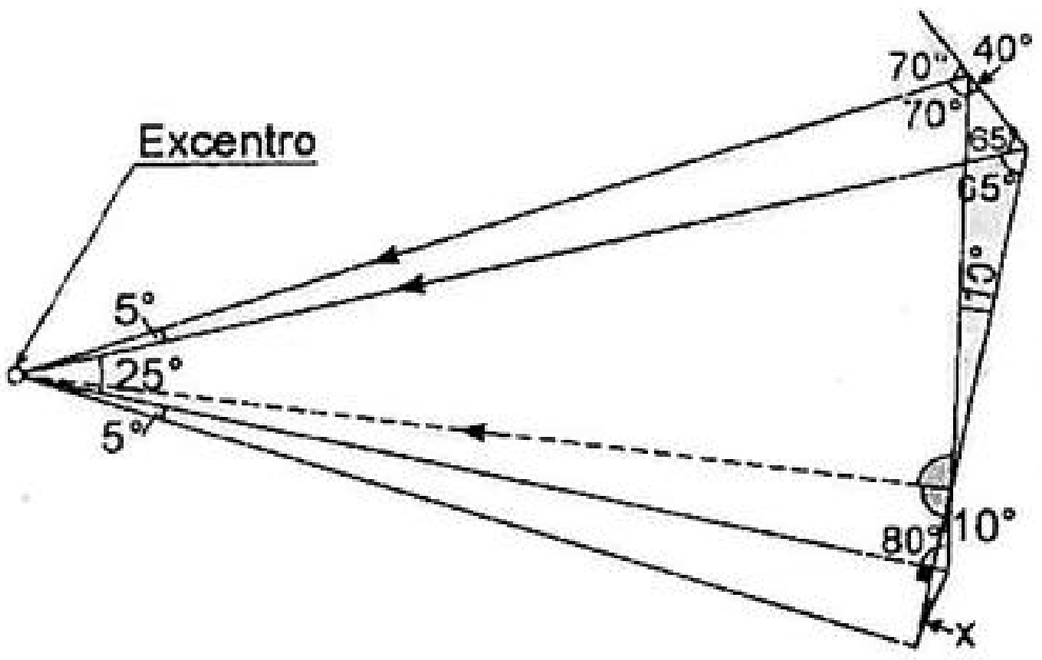
Resolución:

Paso N° 1. Completamos ángulos internos y externos en la figura:

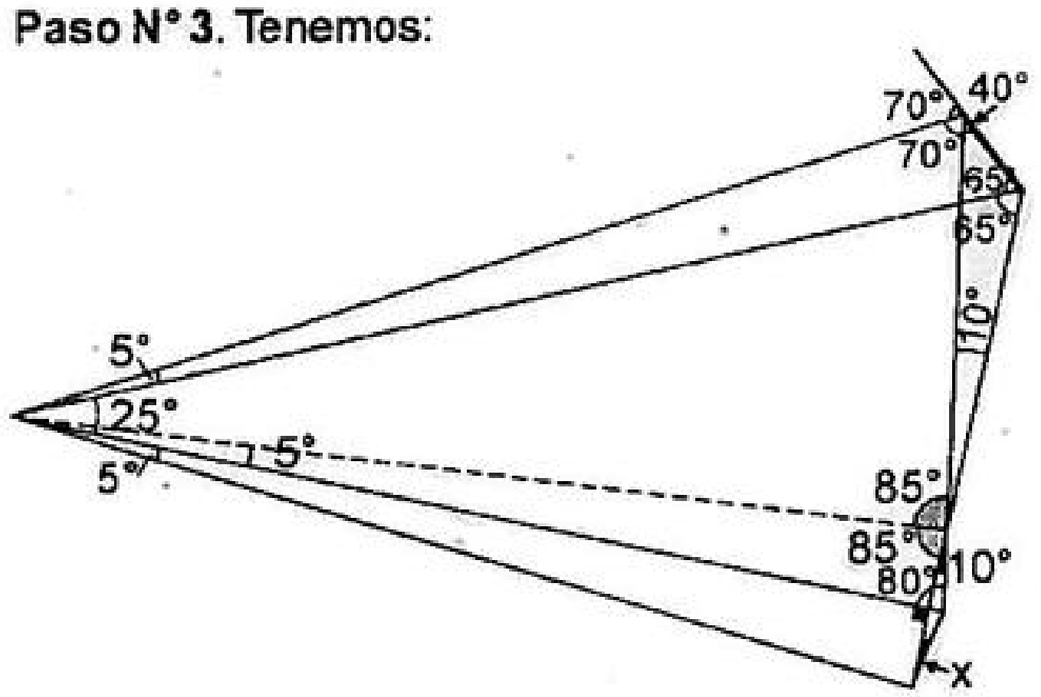


Paso N° 2. Se obtiene el incentro para el siguiente triángulo:



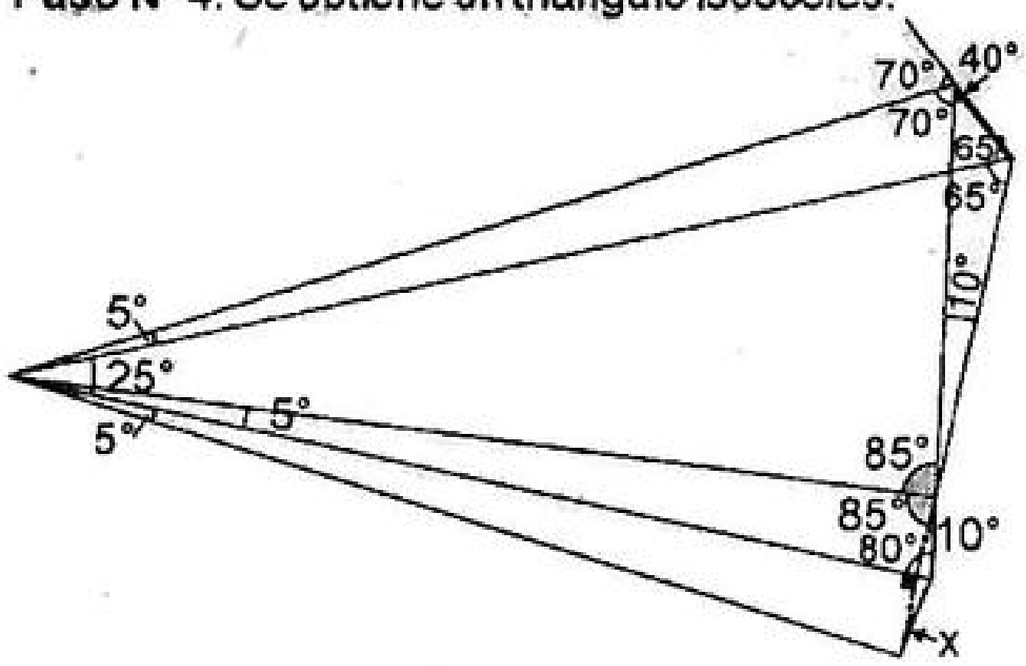


Paso N° 3. Tenemos:

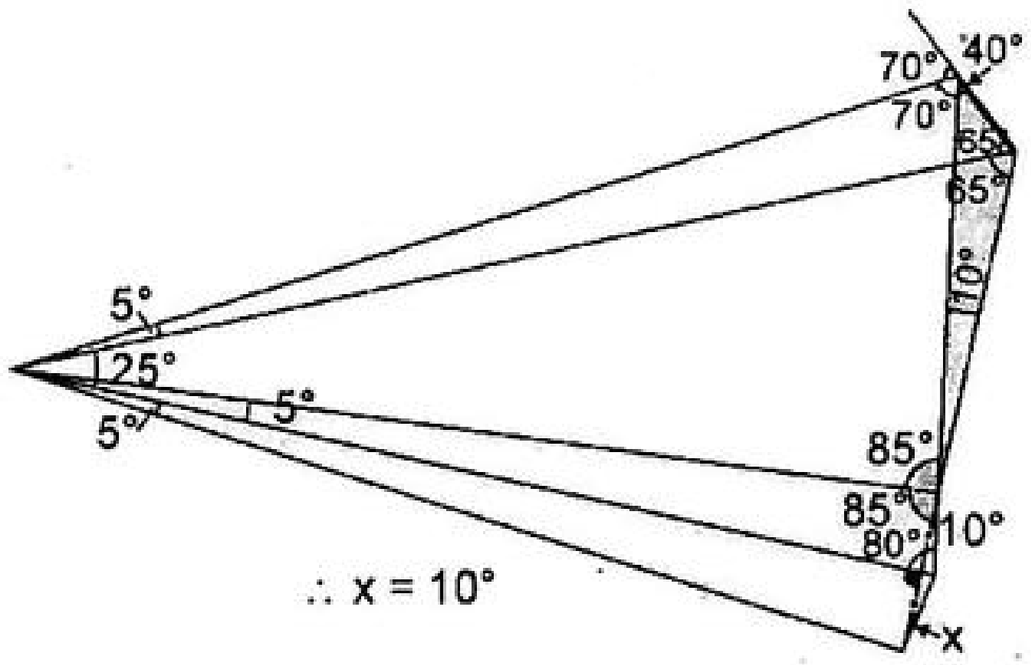


Scanned by CamScanner

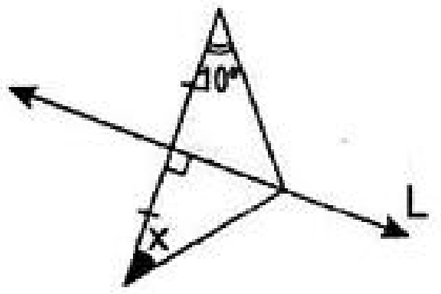
Paso N° 4. Se obtiene un triángulo isósceles:



Paso N° 5. Se obtiene la recta mediatriz, donde cumple:



$\therefore x = 10°$



Poesía 16°

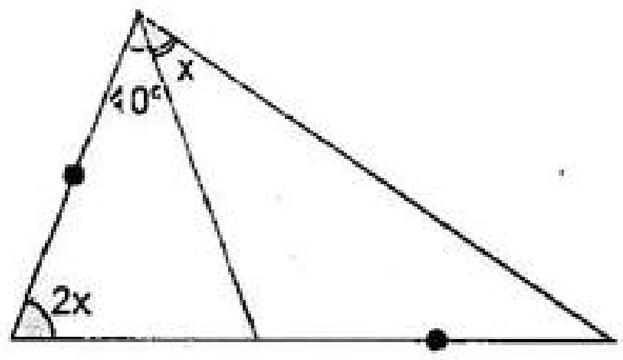
Me Impactaste
Como Cleopatra al valiente Marco Antonio
Quien tan solo con una bella mirada
Doblegó al mas feroz guerrero de un imperio
Ofreciéndole su pecho y espada
Para que sea su amada.
Me Cautivaste
Como la reina de Saba, al sabio Salomón
A quien lo dedico los bellos cantares
Siendo la musa de su noble inspiración
Y la unica; entre todos sus amores.
Me Provocaste
Como la preciosa Julieta a Romeo
Quien de su belleza quedo prendido
Y a escondidas unieron su corazón
En la mas sublime historia amor.
Me Dominaste
Como Josefina al gran Napoleón
Que a sus pies rendido su corona le ofreció
Haciéndola la reina de su corazón
Y mil batallas geniales por ella, venció.
Me Enamoraste
Como la fiel Penélope, al astulo Ulises
Quien por su amor tomo.... a Troya
Derrotando a ciclopes y a soberbios dioses
En honor a quien le tejió su camino a la victoria.
Me Conquistaste
Preciosa mia
Y entre todas estas hermosas doncellas
¡Eres Tú!..... la mas linda, la mas bella
mas Yo, no tengo, una espada, ni una corona...
que ofrecerte
sólo.... mi única vida, para por siempre am.. te.

M. Barcena.

Scanned by CamScanner

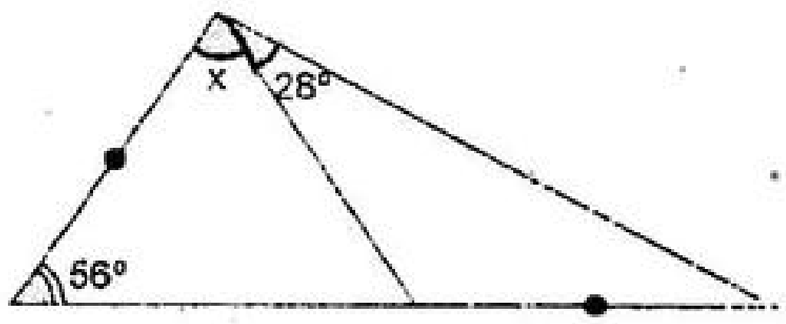
Problemas Propuestos

01. Calcular x



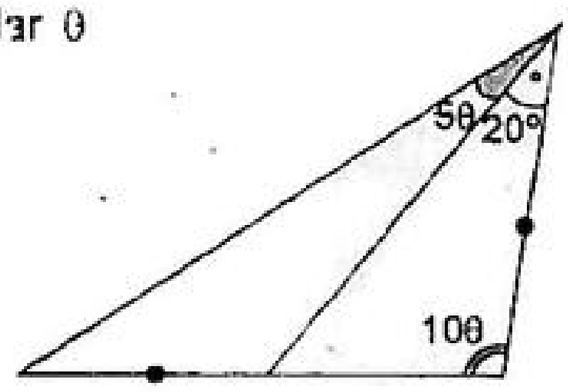
A) 10° B) 20° C) 35°
D) 36° E) 40°

02. Calcular x



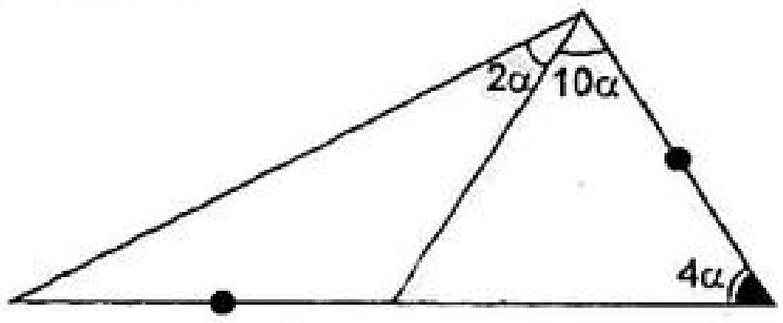
A) 75 B) 56° C) 60°
D) 68° E) 78°

03. Calcular θ



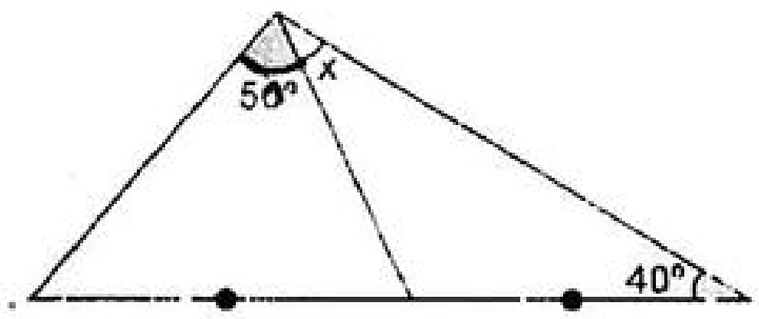
A) 7° B) 8° C) 9°
D) 10° E) 6°

04. Calcular α



A) 10° B) 12° C) 8°
D) 9° E) 11°

05. Calcular x

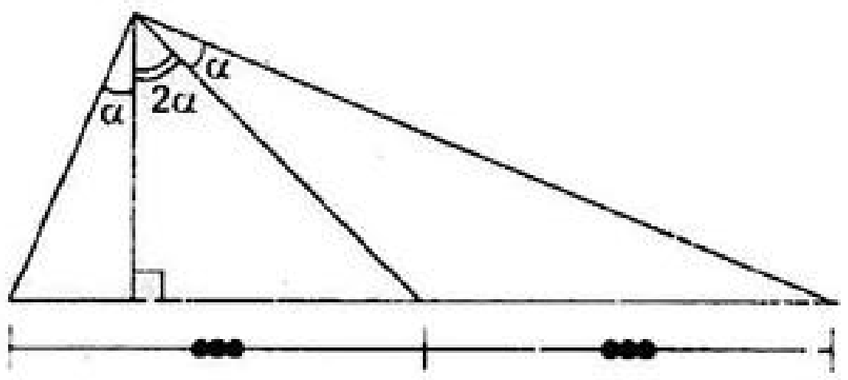


A) 15° B) 18° C) 30°
D) 40° E) 50°

06. Calcular x

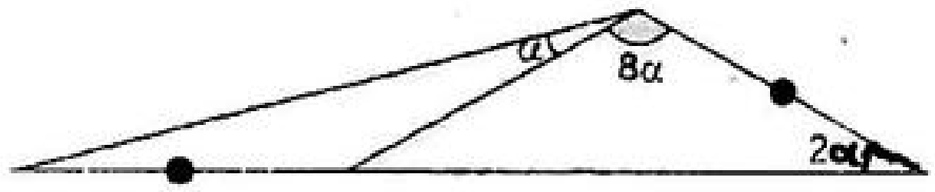
A) 16° B) 17° C) 27°
D) 30° E) 35°

07. Calcular α



A) 18°30' B) 22°30' C) 26°30'
D) 15° E) 10°

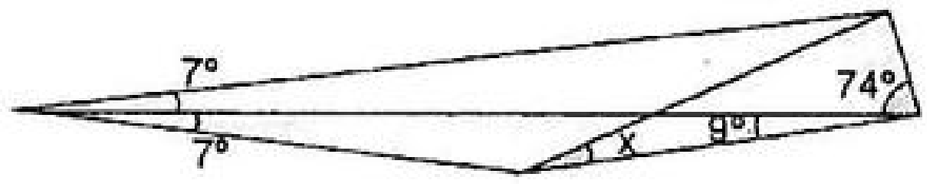
08. Calcular α



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 18°

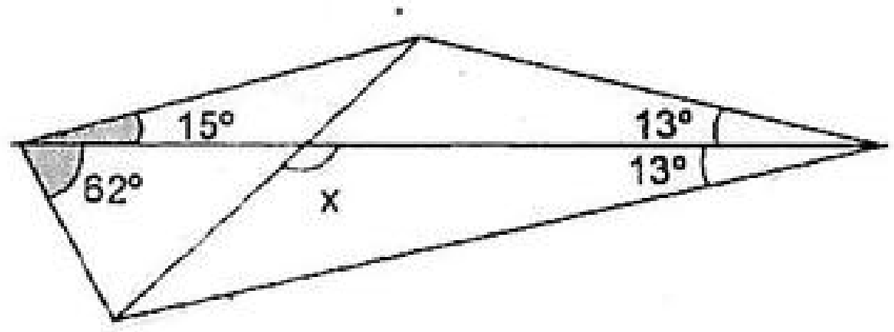
Scanned by CamScanner

09. Calcular x



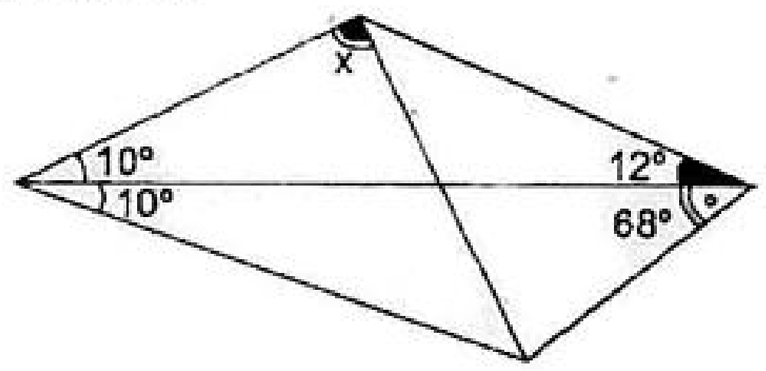
A) 14° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 16°

10. Calcular α



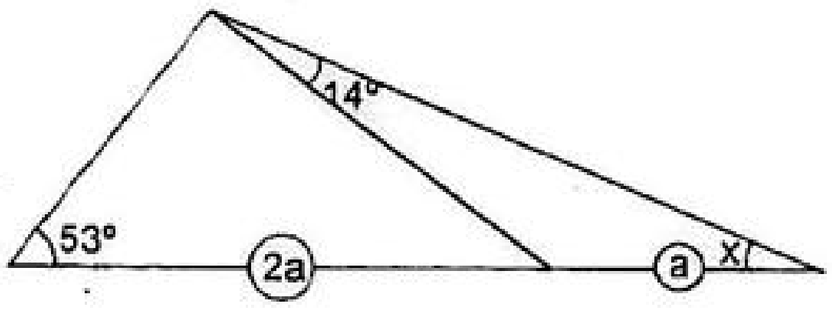
A) 137° B) 120° C) 100°
D) 150° E) 154

11. Calcular x



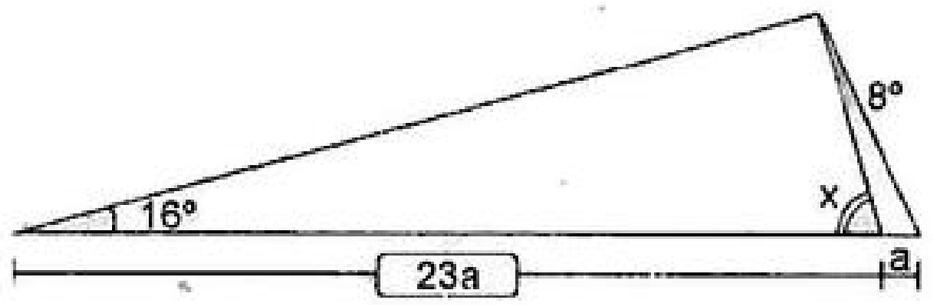
A) 34° B) 44° C) 146°
D) 156° E) 136°

12. Calcular x



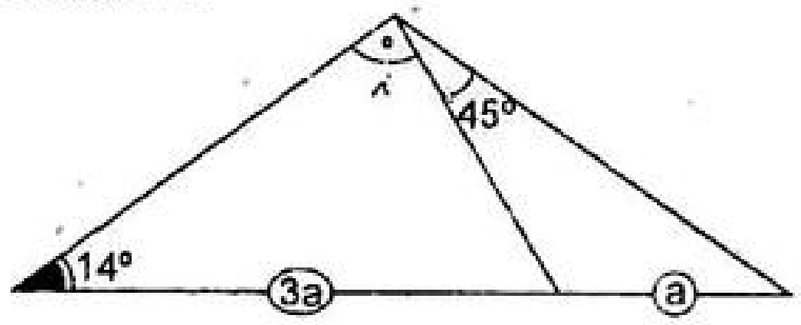
A) 14° B) 18° C) 23°
D) 18°30' E) 37°

13. Calcular x



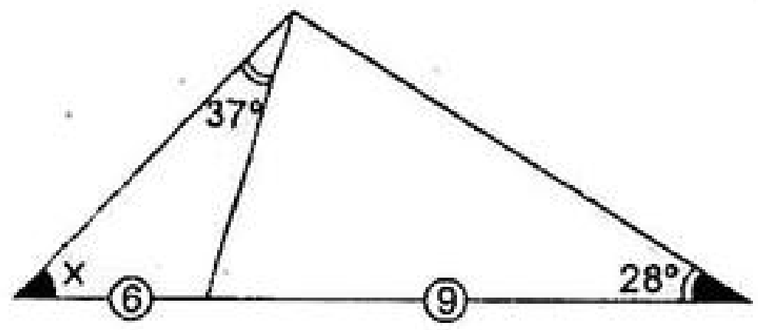
A) 16° B) 45° C) 60°
D) 74° E) 82°

14 Calcular x



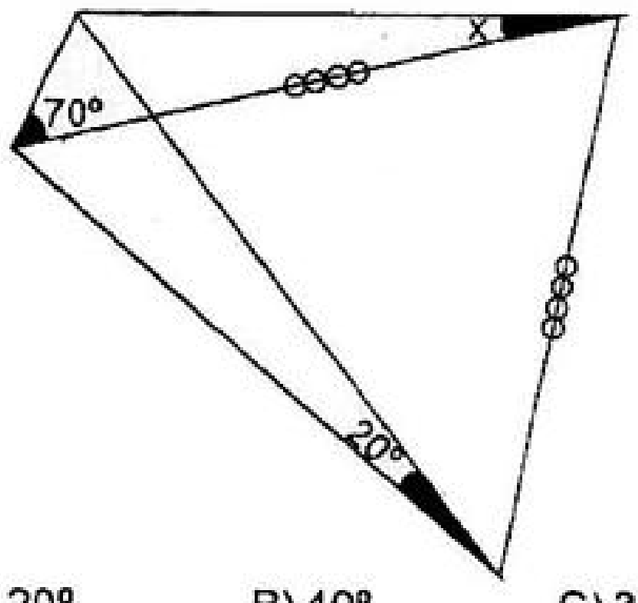
A) 45° B) 76° C) 59°
D) 90° E) 120°

15. Calcular x



A) 37° B) 26° 30' C) 25°
D) 28° E) 30°

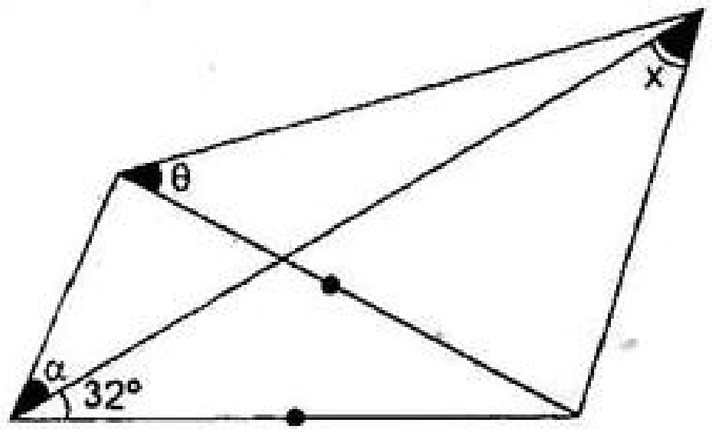
16. Calcular x



A) 20° B) 40° C) 35°
D) 50° E) 45°

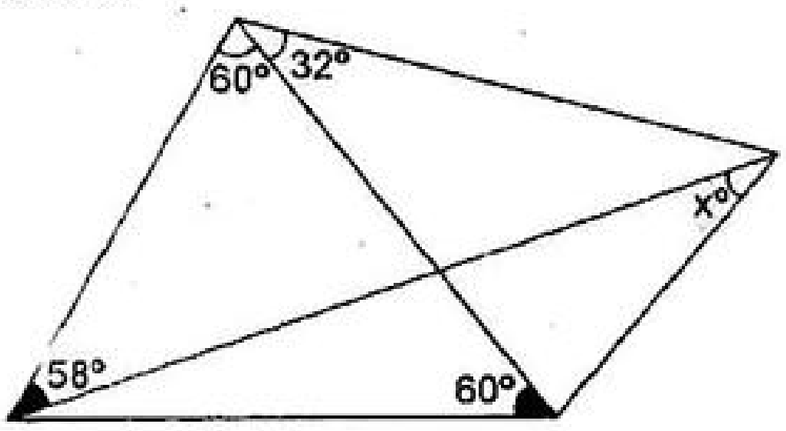
Scanned by CamScanner

17. Calcular x, si $\alpha + \theta = 90°$



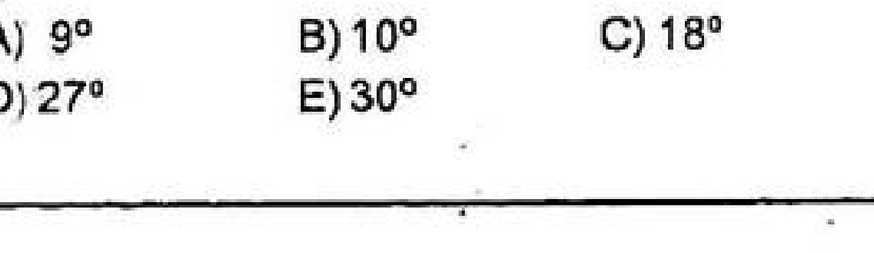
A) 32° B) 30° C) 64°
D) 58° E) 48°

18. Calcular x



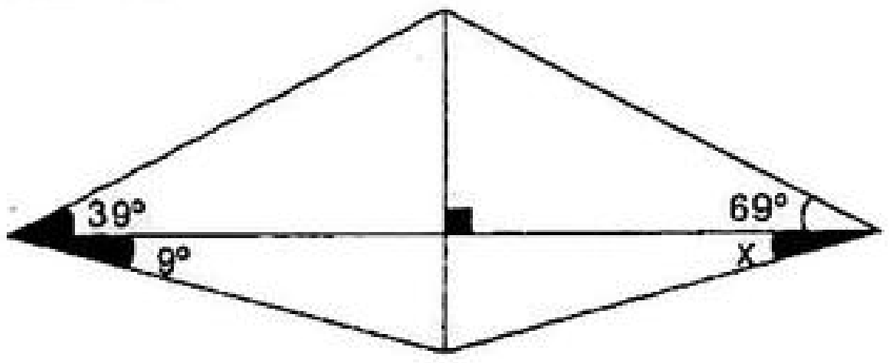
A) 1° B) 1,5° C) 2°
D) 3° E) 5°

19. Calcular x



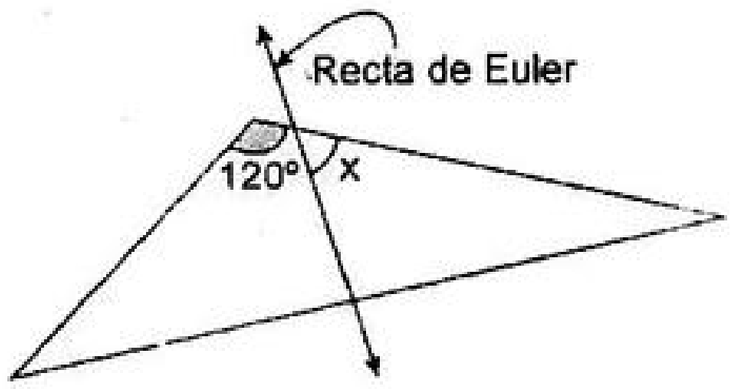
A) 19° B) 18° C) 20°
D) 22° E) 24°

20. Calcular x



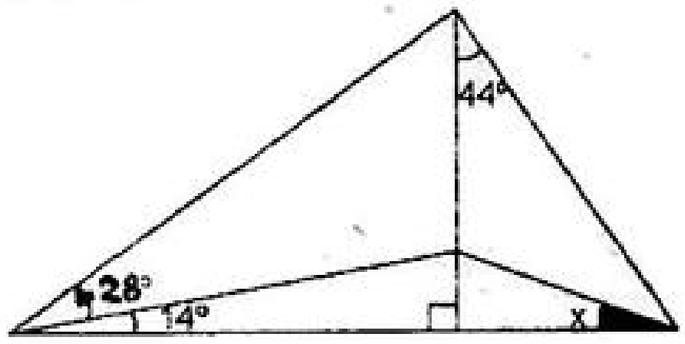
A) 9° B) 10° C) 18°
D) 27° E) 30°

21. Calcular x



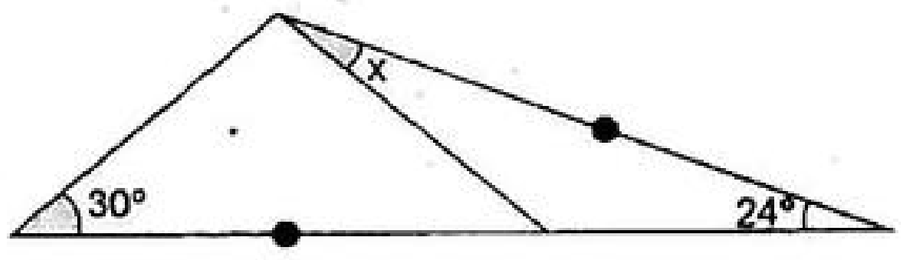
A) 15° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 60°

22. Calcular x



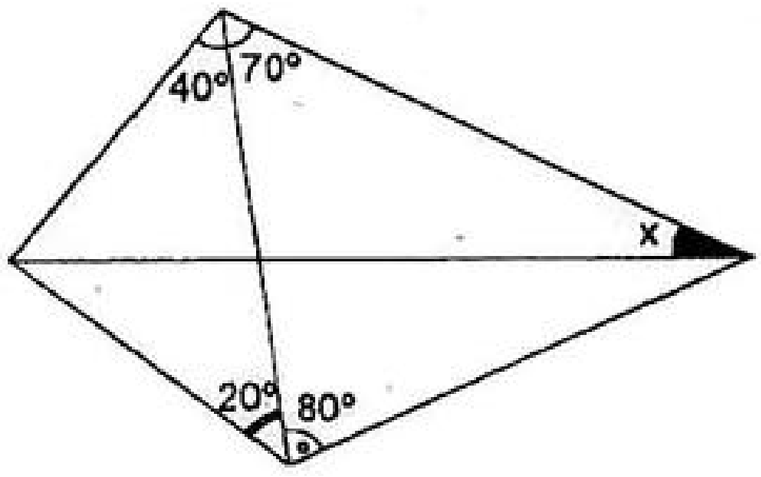
A) 15° B) 16° C) 18°
D) 30° E) 24°

23. Calcular x



A) 24° B) 36° C) 30°
D) 48° E) 54°

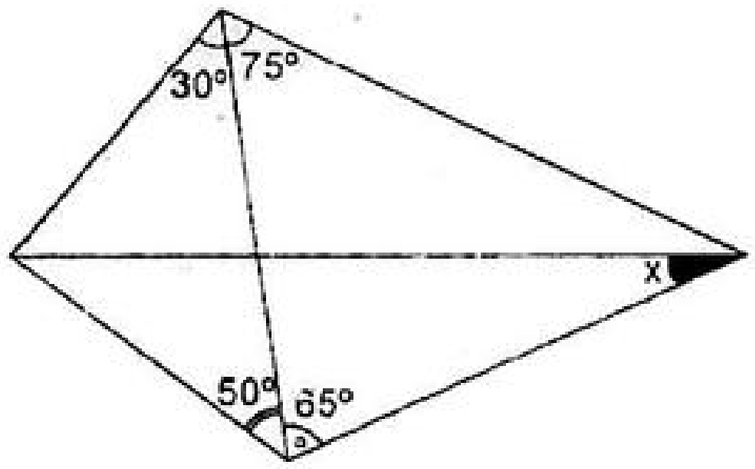
24. Calcular x



A) 10° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 30°

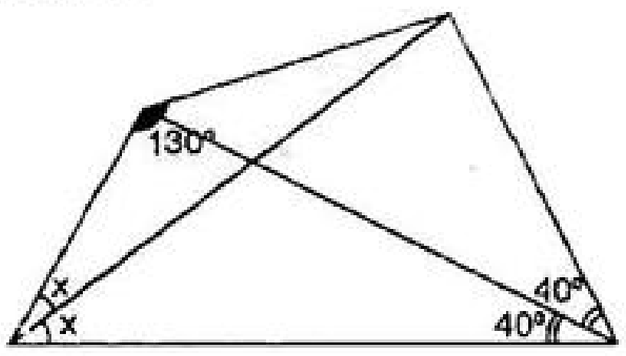
Scanned by CamScanner

25. Calcular x



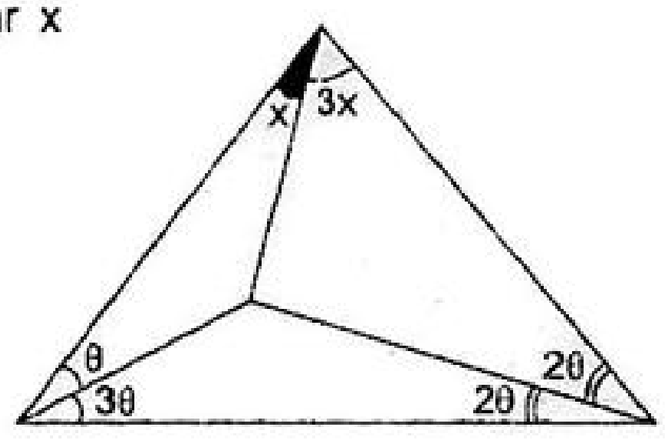
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

26. Calcular x



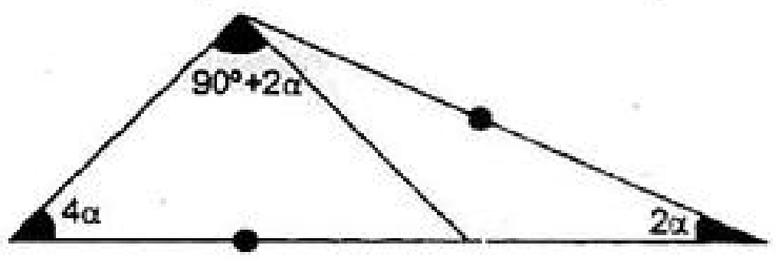
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

27. Calcular x



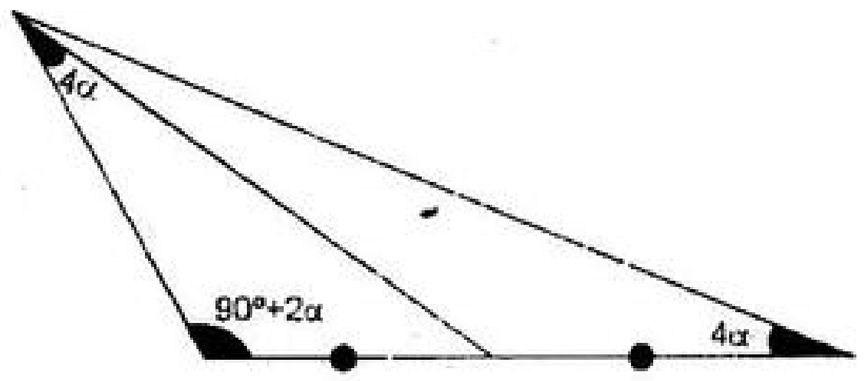
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

28. Calcular α



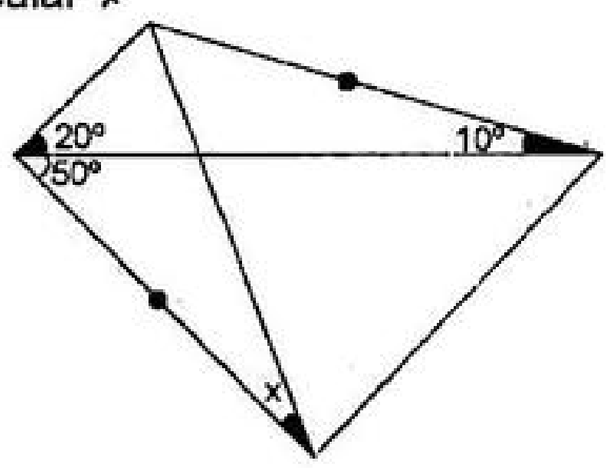
A) 6° B) 7° C) 10°
D) 9° E) 15°

29. Calcular α



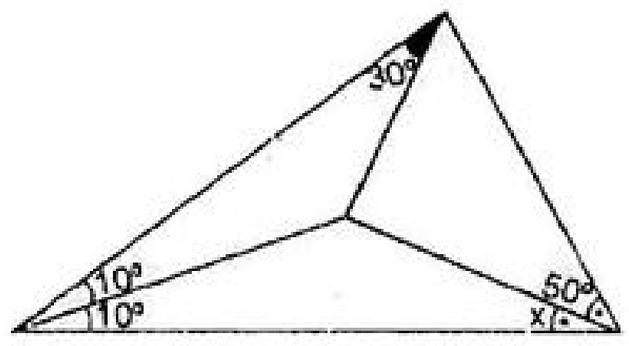
A) 6° B) 7° C) 7° 30'
D) 8° É) 8° 30'

30. Calcular x



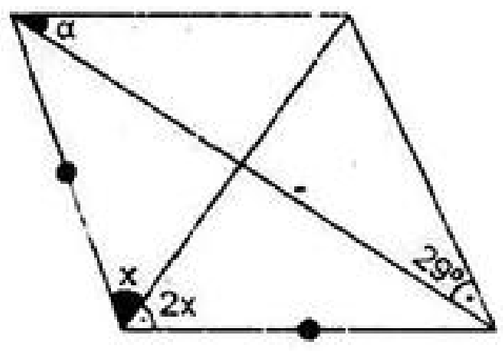
A) 15° B) 20° C) 25°
D) 10° E) 30°

31. Calcular x



A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

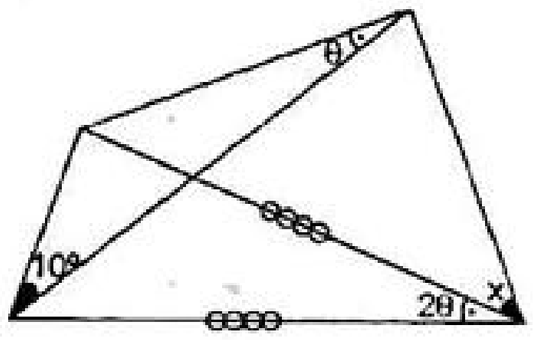
32. Calcular x



A) 87° B) 29° C) 30°
D) 58° E) 60°

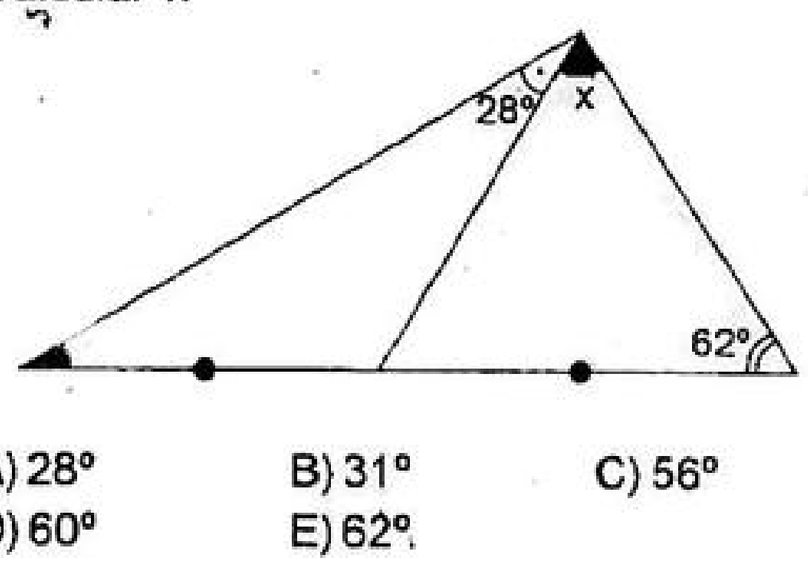
Scanned by CamScanner

33. Calcular x



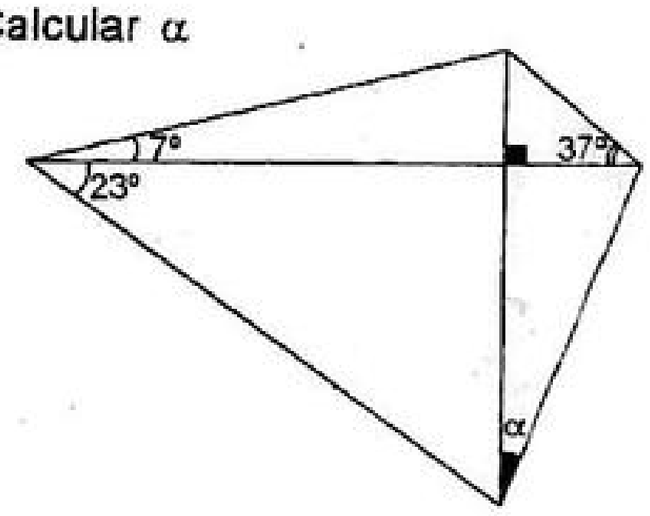
A) 5° B) 10° C) 15°
D) 30° E) 20°

34. Calcular x



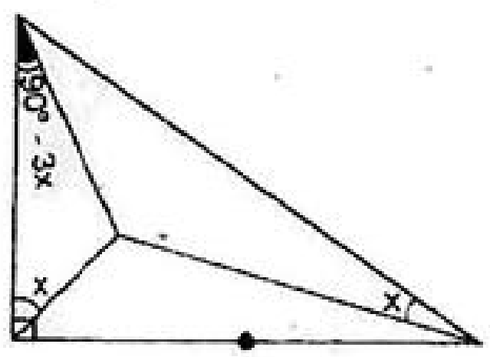
A) 28° B) 31° C) 56°
D) 60° E) 62°

35. Calcular α



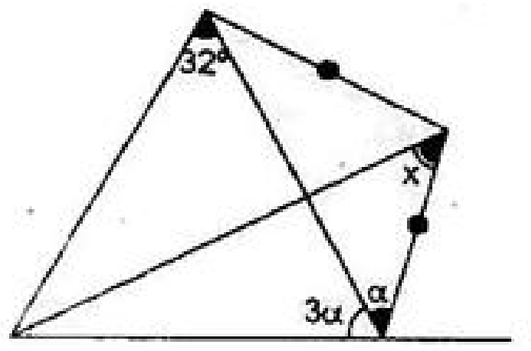
A) 7° B) 14° C) 15°
D) 21° E) 30°

36. Calcular x



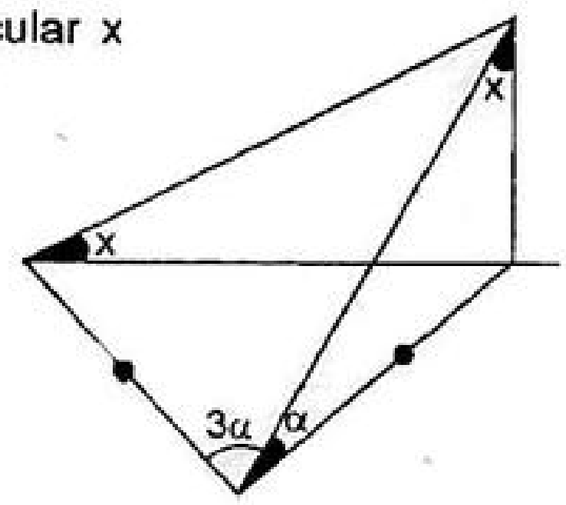
A) 10° B) 22°30' C) 26°30'
D) 18°30' E) 20°

37. Calcular x



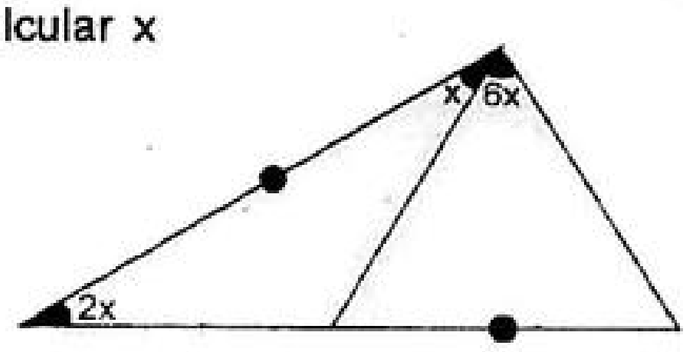
A) 42° B) 46° C) 50°
D) 48° E) 54°

38. Calcular x



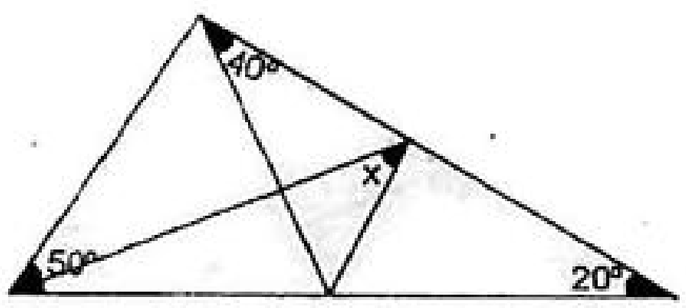
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 60°

39. Calcular x



A) 12° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 10°

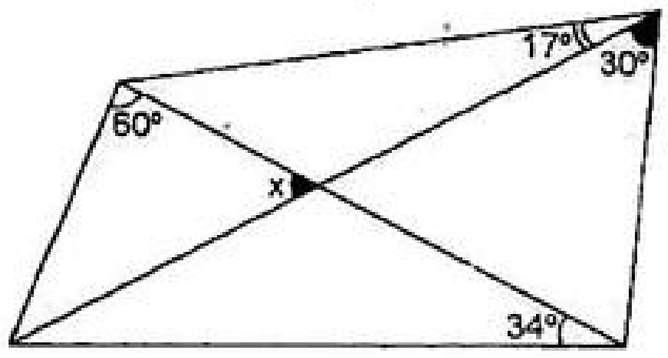
40. Calcular x



A) 10° B) 25° C) 50°
D) 40° E) 45°

Scanned by CamScanner

41. Calcular x



A) 78° B) 60° C) 45°
D) 86° E) 77°

42. En un cuadrilátero ABC, la m∢DBA = 20°, m∢CBD = 80°, la m∢CDB = 70° y la m∢BDA = 40°. Calcular la m∢ACD

A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 20°

43. En un triángulo ABC se traza la mediana BM, tal que la: m∢ABM + m∢ACB = 90°, halle m∢ABC

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

44. En un triángulo ABC, AB = BC, la m∢BAC = 40°, "D" es un punto en el interior tal que la m∢ABD = 25°, m∢BCD = 2m∢BAD. Calcule la m∢DAC.

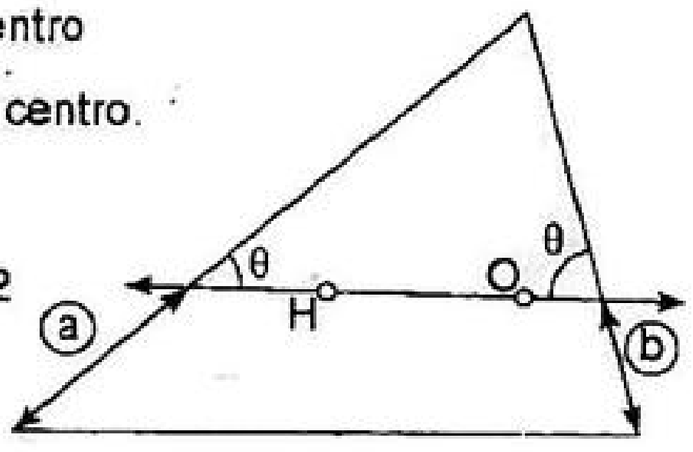
A) 15° B) 18° C) 22° 30'
D) 30° E) 35°

45. De la figura, hallar "OH", siendo:

H → ortocentro

O → circuncentro.

A) a + b
B) a − b
C) (a − b)/2
D) 2a − b
E) b − a



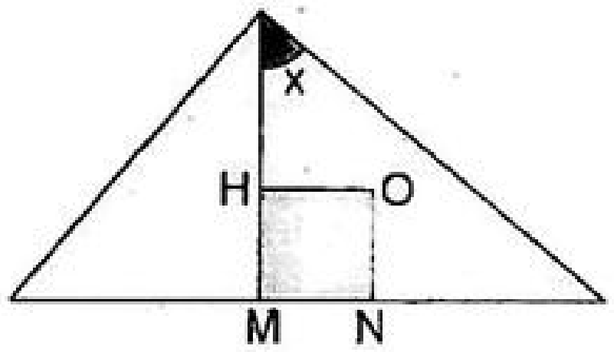
46. En la figura mostrada, hallar x, siendo

H → ortocentro

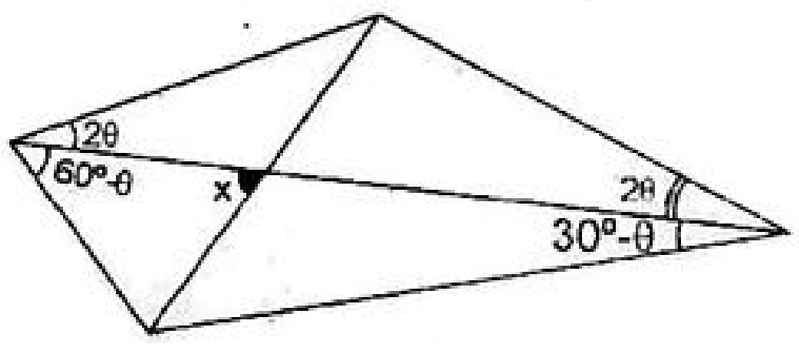
O → circuncentro

"MHON" es un cuadrado

A) 30°
B) 45°
C) 37°
D) 60°
E) 53°

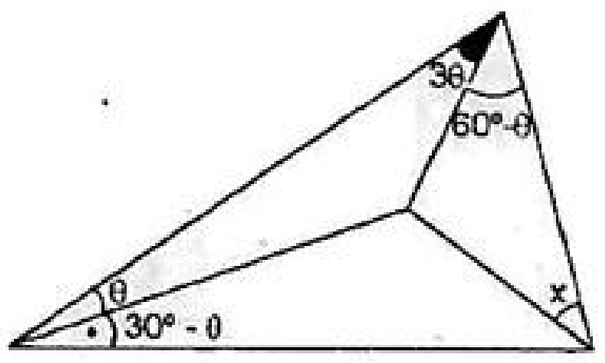


47. Calcular x



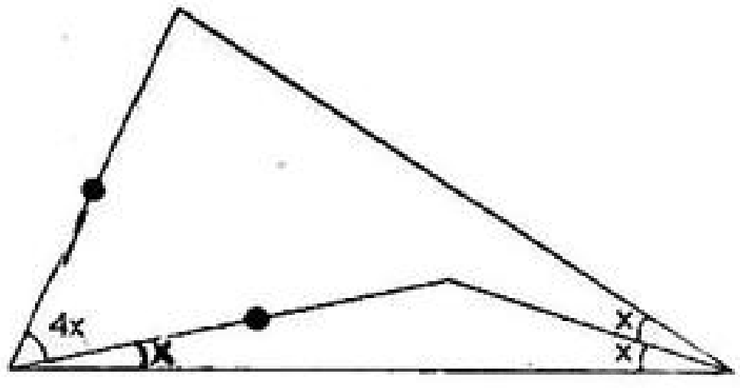
A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 72°

48. Calcular x



A) 22° B) 28° C) 30°
D) 32° E) 36°

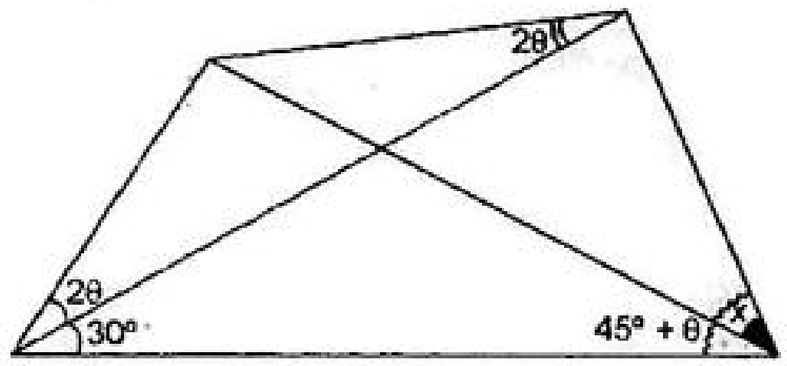
49. Calcular x



A) 10° B) 12° C) 14°
D) 15° E) 16°

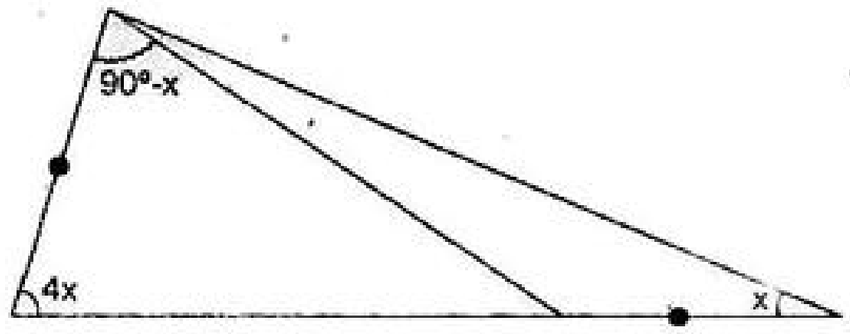
Scanned by CamScanner

50. Calcular x



A) 18° B) 22°30' C) 30°
D) 32° E) 36°

51. Calcular x



A) 8° B) 9° C) 10°
D) 11° E) 20°

Claves

01	C	11	E	21	D	31	C	41	E
02	D	12	C	22	B	32	C	42	E
03	D	13	D	23	C	33	E	43	E
04	A	14	D	24	D	34	E	44	E
05	D	15	C	25	C	35	D	45	E
06	B	16	B	26	C	36	B	46	B
07	B	17	A	27	B	37	D	47	D
08	C	18	C	28	C	38	C	48	C
09	D	19	D	29	C	39	B	49	D
10	A	20	D	30	E	40	D	50	C
								51	E

Scanned by CamScanner

IMPECUS

Una nueva generación de Libros didácticos

Scanned by CamScanner